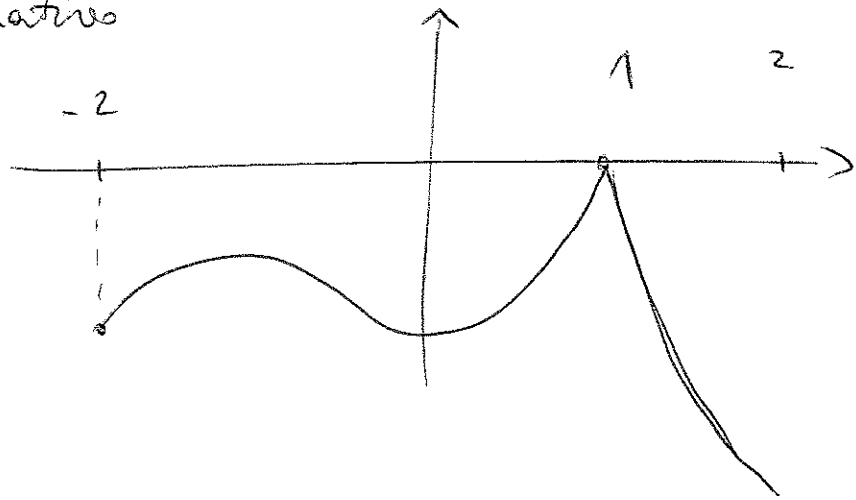


Alcuni studi di funzione

• Studiare $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

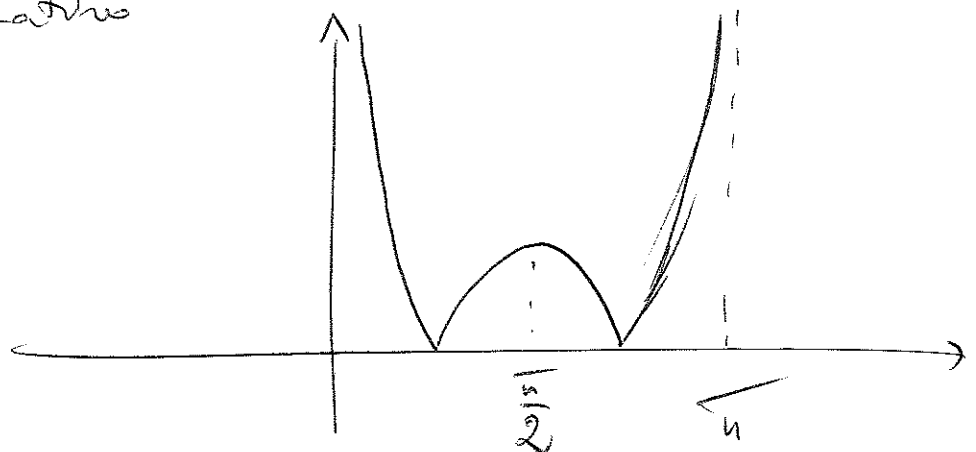
$$x \mapsto \frac{|x-1|}{x^2-9} e^x$$

grafico approssimativo



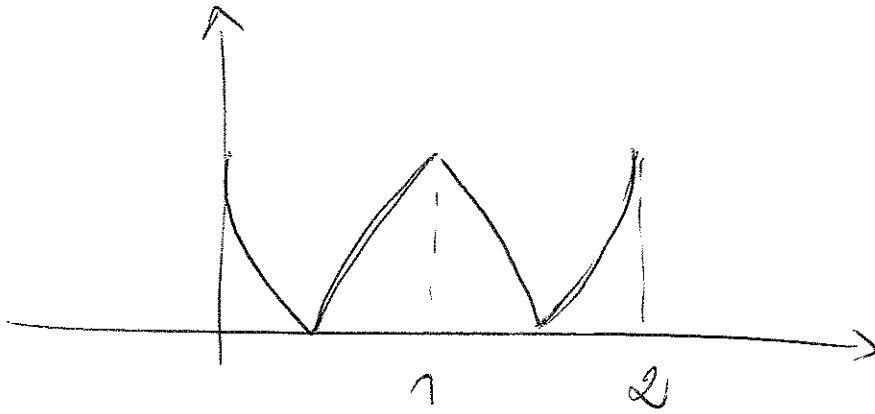
• Studiare $f(x) = \frac{|\cos(2x)|}{\sin x}$ per $x \in (0, \pi)$

grafico approssimativo



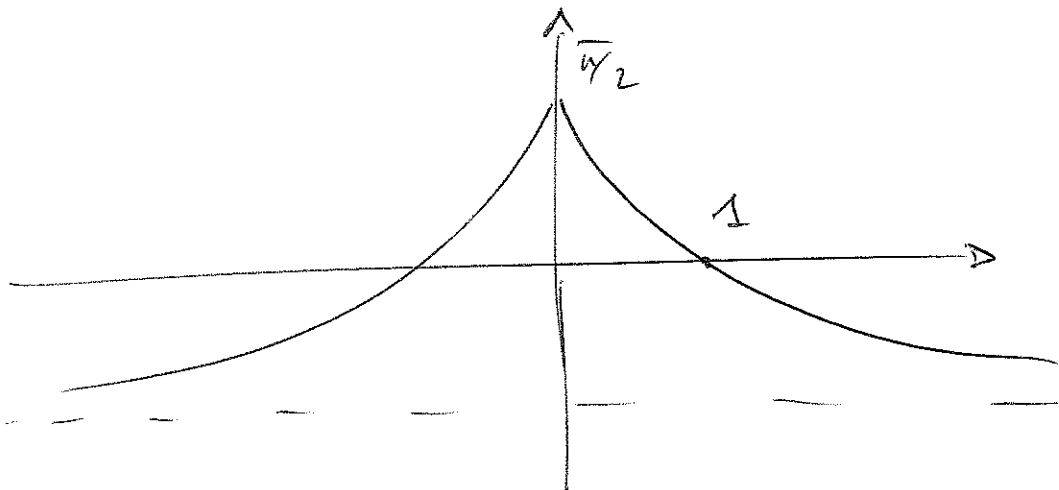
Studiere $f(x) = \left| \arccos(x-1) - \frac{\pi}{4} \right|$

für $x \in [0, 2]$



Studiere $f(x) = x^{2/3} |\log|x|| - x$

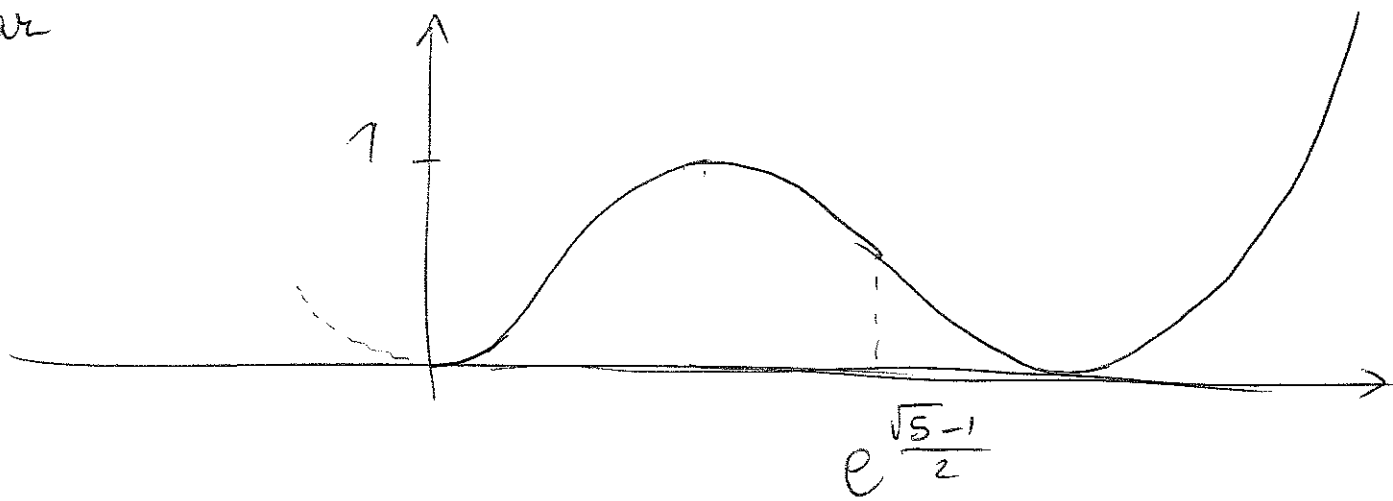
Studiere $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$



Studiamo $f(x) = \max(x \log|x| - x)^2$

Si osservi che il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma
 f è estendibile ad una funzione
continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$!

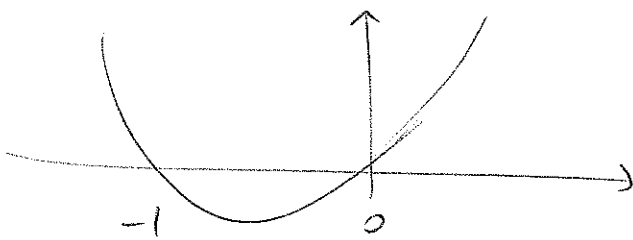
è pari



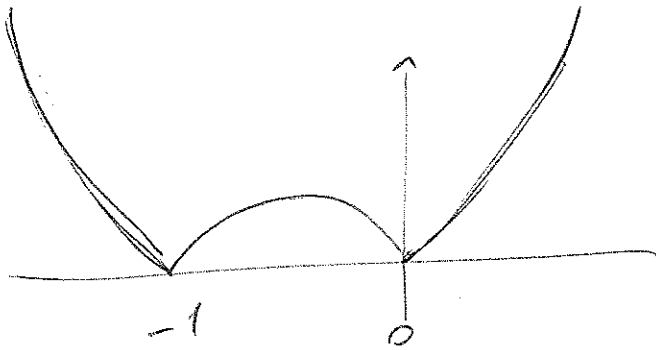
Alcuni studi di funzione

Studiare $f(x) = \sqrt{|x^2+x|} - x$

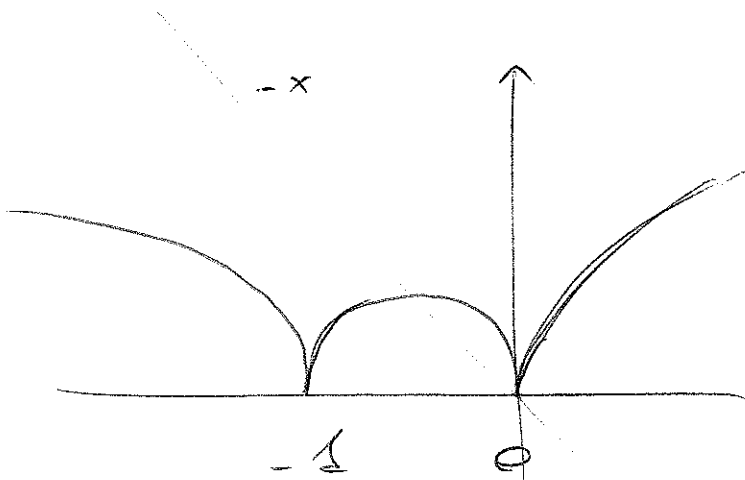
Si osservi innanzitutto che



$$x^2 + x$$

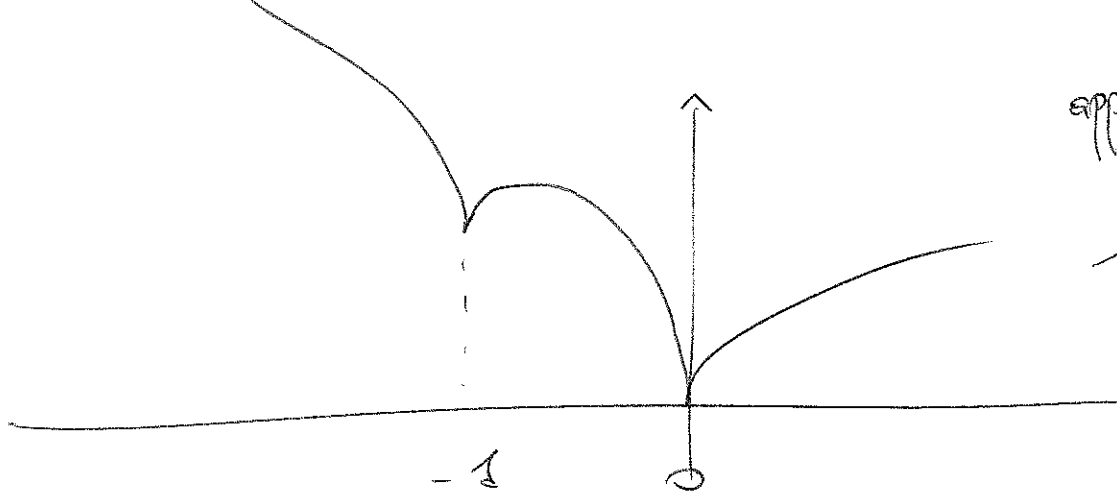


$$|x^2 + x|$$



$$\sqrt{|x^2 + x|}$$

approssimativamente
 f
 ha punti
 fleschi



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x^2+x|}} \cdot \frac{|x^2+x|}{x^2+x} (2x+1) - 1 \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{matrix}$$

$$x^2+x > 0 \quad \text{per} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} (2x+1) - 1 & x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x^2-x}} (2x+1) - 1 & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Nei punti 0 e 1 f non è derivabile.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$$

Studiamo il segno di f'

per $x < -1$ $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1$

s'osservi che $2x+1 < -1$

quindi $f'(x) < -\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 < 0$
 $\forall x \in (-\infty, -1)$

per $x > 0$ $f'(x) > 0 \iff \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 > 0$

$$\iff 2x+1 > 2\sqrt{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x$$

che $\forall x > 0$

$$\underline{-1 < x < 0}$$

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{2\sqrt{-x^2-x}} - 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{(2x+1)}{2\sqrt{-x^2-x}} > 1$$

$$\Leftrightarrow -2x-1 > 2\sqrt{-x^2-x} \quad | \quad (*)$$

si osservi che per $x \in [-\frac{1}{2}, 0)$

il termine $-2x-1 \leq 0$, per cui la disuguaglianza $(*)$ non può essere vera.

Per $x \in (-1, -\frac{1}{2})$ elevo al quadrato e ottengo

$$4x^2 + 4x + 1 > -4x^2 - 4x$$

$$8x^2 + 8x + 1 > 0$$

$$8x^2 + 8x + 1 = 0 \quad \text{per } x = \frac{-2-\sqrt{2}}{4} \in (-1, -\frac{1}{2})$$

$$\text{e per } x = \frac{-2+\sqrt{2}}{4} \notin (-1, -\frac{1}{2})$$

quindi l'unico punto in cui $f'(x) = 0$
 è $x = -\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Per conferma ~~sto~~ possiamo verificare
 la concavità di f studiando le
 derivate seconde.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4(x^2+x) - (2x+1)^2}{4(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} & \text{se } x^2+x > 0 \\ & \text{vale per } x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ \frac{-4(x^2+x) + (2x+1)^2}{4(x^2+x)\sqrt{-x^2-x}} & \text{se } x^2+x < 0 \\ & \text{vale per } x \in (0, 1) \end{cases}$$

per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ si ha che

$$4(x^2+x)\sqrt{x^2+x} > 0$$

mentre il numeratore è

$$4(x^2+x) - (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 1 = -1$$

quindi $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

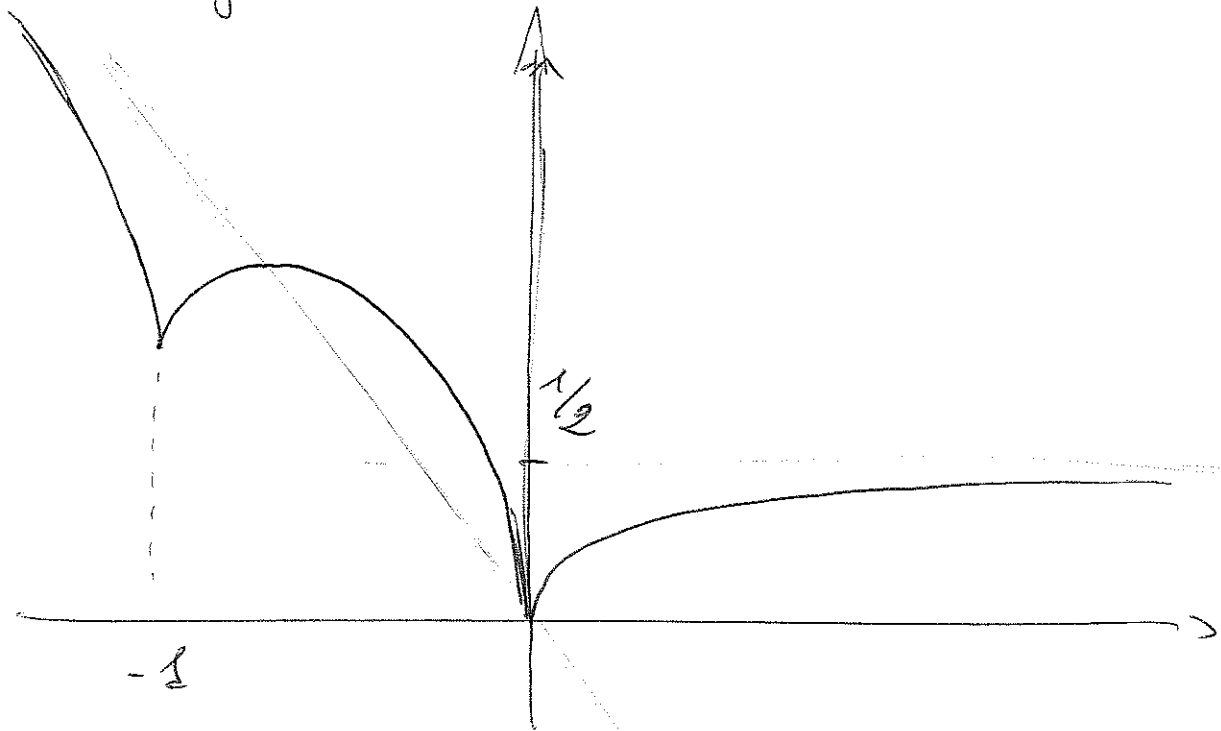
Analogamente per $x \in (0, 1)$ si ha

$$f''(x) = \frac{1}{4(x^2+x)\sqrt{-x^2-x}} \quad \text{con } x^2+x < 0$$

Conclusione: f'' è definita $\forall x \in \mathbb{R}$
 $x \neq 0, x \neq 1$

e quando è definita è negativa.

Il grafico è



f assume il 0 come minimo assoluto
nel punto 0.

-1 è un punto di minimo locale

$$f(-1) = +1$$

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2 \left| \frac{1}{x} - 1 \right|$
definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

La derivata prima è data da

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \left[e^{\frac{1}{x}} + 2 \frac{\left| \frac{1}{x} - 1 \right|}{\frac{1}{x} - 1} \right] \quad \begin{array}{l} \text{se } x \neq 1 \\ (e x \neq 0) \end{array}$$

$$\frac{1}{x} - 1 > 0 \quad (\Rightarrow) \quad x \in (0, 1)$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} (e^{\frac{1}{x}} + 2) & \text{se } 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} (e^{\frac{1}{x}} - 2) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -e - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -e + 2$$

Studiamo il segno di f' :

$$\underline{f'(x) = 0} \quad \text{sse} \quad e^{1/x} - 2 = 0, \quad \text{cioè}$$

$$\text{per } x = \frac{1}{\log 2}$$

$$\text{ammesso che } \frac{1}{\log 2} \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$\frac{1}{\log 2} > 1 \quad \underline{\text{or}} \quad$$

$$\underline{f'(x) > 0} \quad \text{sse} \quad e^{1/x} - 2 < 0 \quad \left(\text{visto che } -\frac{1}{x^2} < 0 \right)$$

$$\text{cioè per } x > \frac{1}{\log 2} \quad \text{se } x > 0$$

$$\text{sempre se } x < 0$$

$$\underline{f'(x) < 0} \quad \text{sempre in } (0, 1)$$

$$\text{per } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f' < 0 \quad \text{sse} \quad x < \frac{1}{\log 2} \quad \text{cioè}$$

$$x \in \left(1, \frac{1}{\log 2} \right)$$

Ricapitolando :

$$f' > 0 \quad \text{in} \quad (-\infty, 0)$$

$$f' < 0 \quad \text{in} \quad (0, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -e - 2 < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -e + 2 < 0$$

$$\boxed{\text{Dato}} \quad f' < 0 \quad \text{in} \quad (1, \frac{1}{\log 2})$$

$$f' = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{1}{\log 2}$$

$$f' > 0 \quad \text{in} \quad (\frac{1}{\log 2}, +\infty)$$

Dal segno di f' si deduce che $\frac{1}{\log 2}$ è
un punto di minimo locale.

Il valore di f in tale punto sarà
sicuramente minore di 3 (come si può
verificare) perché f è crescente in

$(\frac{1}{\log 2}, +\infty)$ e ha come limite a $+\infty$
proprio 3.

Inoltre poiché f decresce in $(0, \frac{1}{\log 2})$
 e in $(-\infty, 0)$ è sempre crescente
 e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ si conclude che

$\frac{1}{\log 2}$ è il punto di minimo (assoluto!)

per f e $f\left(\frac{1}{\log 2}\right) = 2 + 2 \log \frac{e}{2}$

il valore minimo assunto da f .

Volendo studiare la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 \frac{1}{x^3} (e^{\frac{1}{x}} + 2) + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} & 0 < x < 1 \\ 2 \frac{1}{x^3} (e^{\frac{1}{x}} - 2) + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

in $(0, 1)$ $f'' > 0$

in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ $f''(x) = \frac{-4x + 2x e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$

Per quanto riguarda $x < 0$ si osserva che

$$0 < e^{1/x} < 1 \quad \text{per cui} \quad 2x e^{1/x} > 2x$$

quindi $-4x + 2x e^{1/x} + e^{1/x} > -2x + e^{1/x} > 0$

per cui $f'' > 0 \quad \forall x < 0$.

Per quanto riguarda $x > 1$:

$$f''(x) = \frac{1}{x^4} (2x e^{1/x} + e^{1/x} - 4x)$$

$\frac{f}{x^4} > 0$, limitiamoci a studiare $g(x) = 2x e^{1/x} + e^{1/x}$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} (2x+1) + e^{1/x} 2 =$$

$$= -e^{1/x} (2x+1 - 2x^2) \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{e^{1/x}}{x^2} (2x^2 - 2x - 1)$$

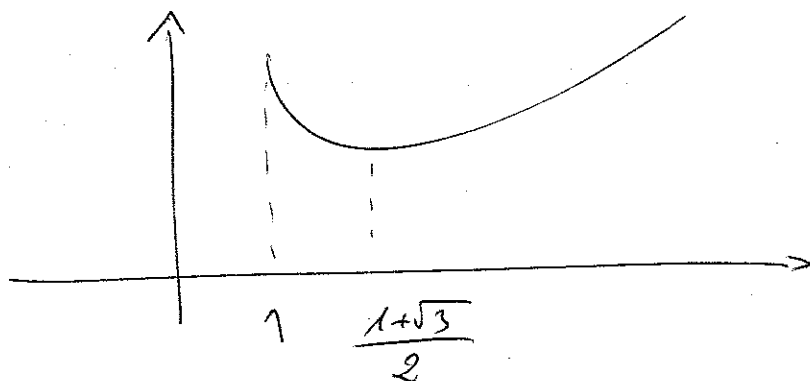
$$g'(x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (=)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Il secondo valore è negativo, per cui va scartato.

Per $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $g'(x) > 0$, per $x \in \left(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ $g'(x) < 0$

Il grafico di g è pertanto



Ora consideriamo la funzione $h(x) = 4x$.

Si osserva che

$$g(1) = 3e > 4 \quad h(1) = 4$$

$$\text{Poiché } g\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{2}{1+\sqrt{3}}}(2+\sqrt{3}) < h\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(\text{infatti } e^{\frac{2}{1+\sqrt{3}}}(2+\sqrt{3}) < 4\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

$$\text{che è equivalente a } 2+\sqrt{3} < e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}(2+2\sqrt{3})$$

possiamo concludere che

$$g(x) - h(x) = 0 \quad \text{per un qualche valore}$$

compreso tra 1 e $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Poiché in tale intervallo g decresce
e h cresce tale punto è l'unico

tra 1 e $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ -

Verificare che $g(x) - h(x) < 0 \quad \forall x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

è non è immediato.

Infatti $g''(x) = \frac{e^{1/2x}}{x^4} (2x^3 - 2x^2 + 3x + 1)$

Si osserva che

$$\frac{d}{dx} (2x^3 - 2x^2 + 3x + 1) = 6x^2 - 4x + 3 > 0 \quad \forall x$$

Perché $2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ valutata in $x=0$ è positiva e la sua derivata è positiva tale polinomio è sempre positivo per $x > 1$ e quindi $g'' > 0$, quindi g convessa.

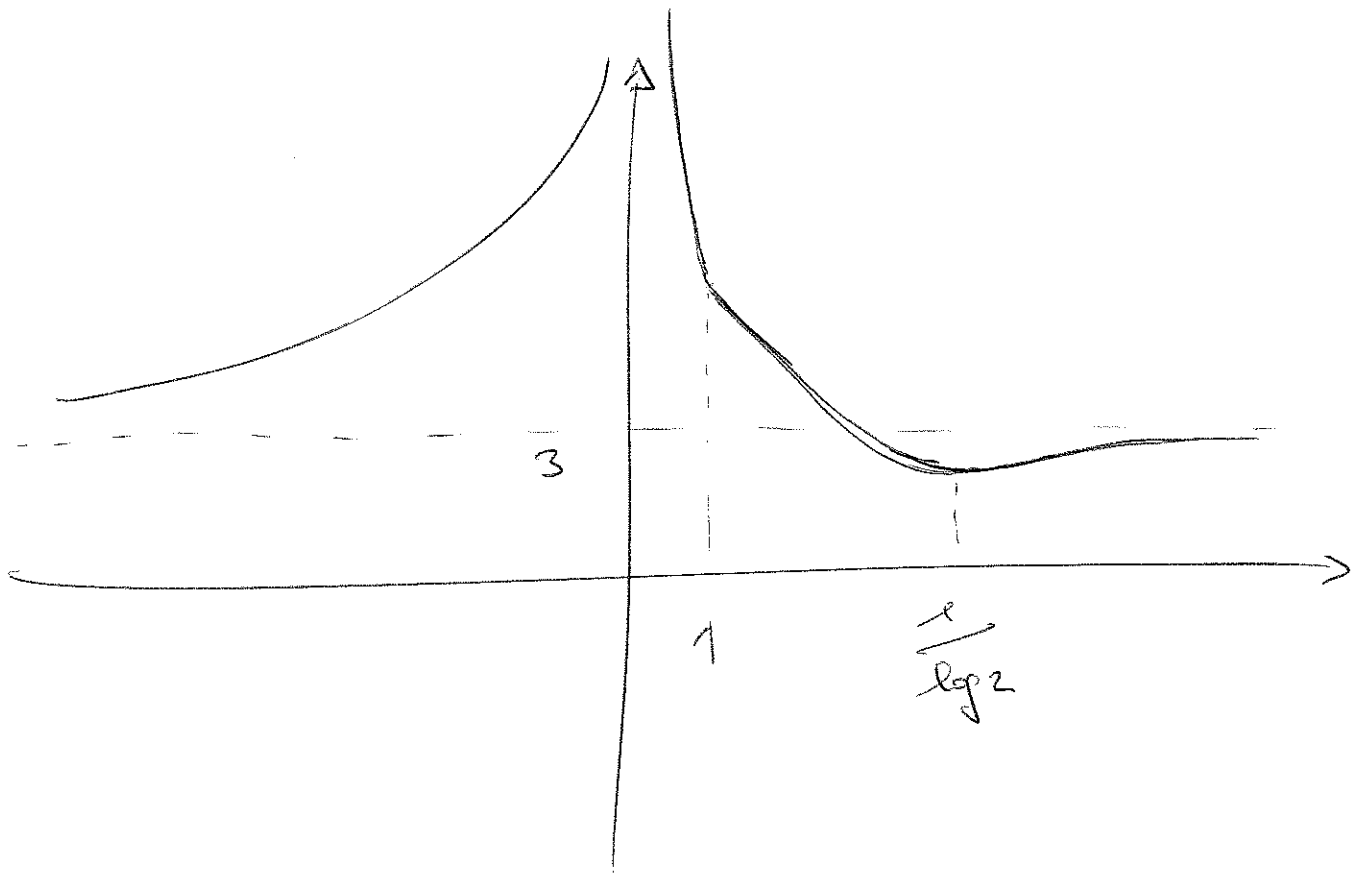
Perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/2x} (2x+1)}{2x+1} = 1$,

cioè asintoticamente g cresce con derivata uguale a 2 ed è convessa

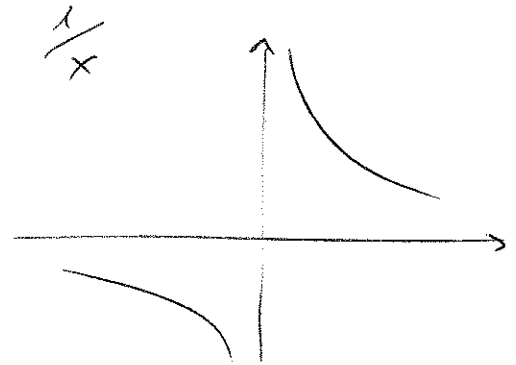
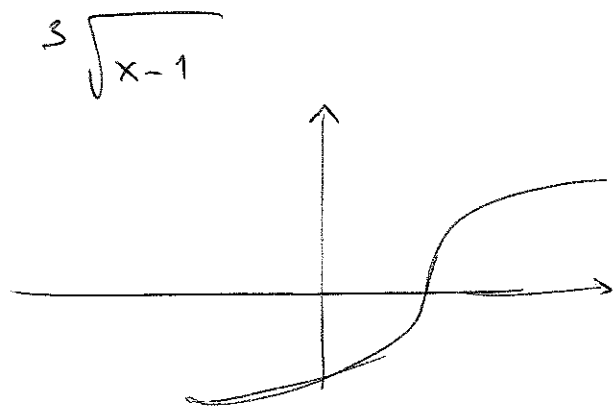
non può intersecare $h(x) = 4x$

In altri punti dopo $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ -

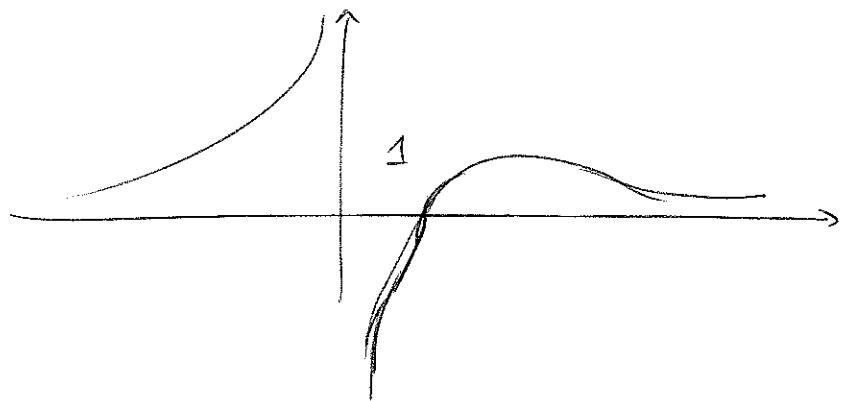
In conclusione $f''(x)$ si annulla in
 un solo punto compreso tra 1 e $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
 e anzi tra $\frac{1}{\log 2}$ e $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.



Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}$



qualitativamente
f e i grafici



Vediamo i dettagli:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty / \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{x-1} \right)^{2/3} \frac{x^3 - 3x^2(x-1)}{x^6} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{x-1} \right)^{2/3} \frac{3-2x}{x^4} \quad \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{array}$$

segno di f'

$$f' > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 3 - 2x > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x < \frac{3}{2}$$

$$f' = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{3}{2}$$

$$f' < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x > \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{x-1}{x^3} \right)^{1/3} \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} \frac{3-2x}{x^4} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^3}{x-1} \right)^{2/3} \frac{-2x^4 - 4x^3(3-2x)}{x^8} \right] =$$

$$\stackrel{\text{conti}}{=} \dots = -\frac{2}{9} \frac{(3-2x)^2 (x-1)^{1/3}}{(x-1)^2 x^3} - \frac{6(2-x)}{3x^3 (x-1)^{2/3}} =$$

$$\stackrel{\text{conti}}{=} \dots = -\frac{(x-1)^{1/3}}{x^3} \frac{-2(5x^2 - 15x + 9)}{9(x-1)^2}$$

$$5x^2 - 15 + 9 = 0$$

per $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{10}$ e $x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{45}}{10}$

Si osserva che

$$\frac{\sqrt{36}}{10} = \frac{6}{10} < \frac{\sqrt{45}}{10} < \frac{7}{10} = \frac{\sqrt{49}}{10}$$

per cui

$$\frac{8}{10} < \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{10} < \frac{9}{10}$$

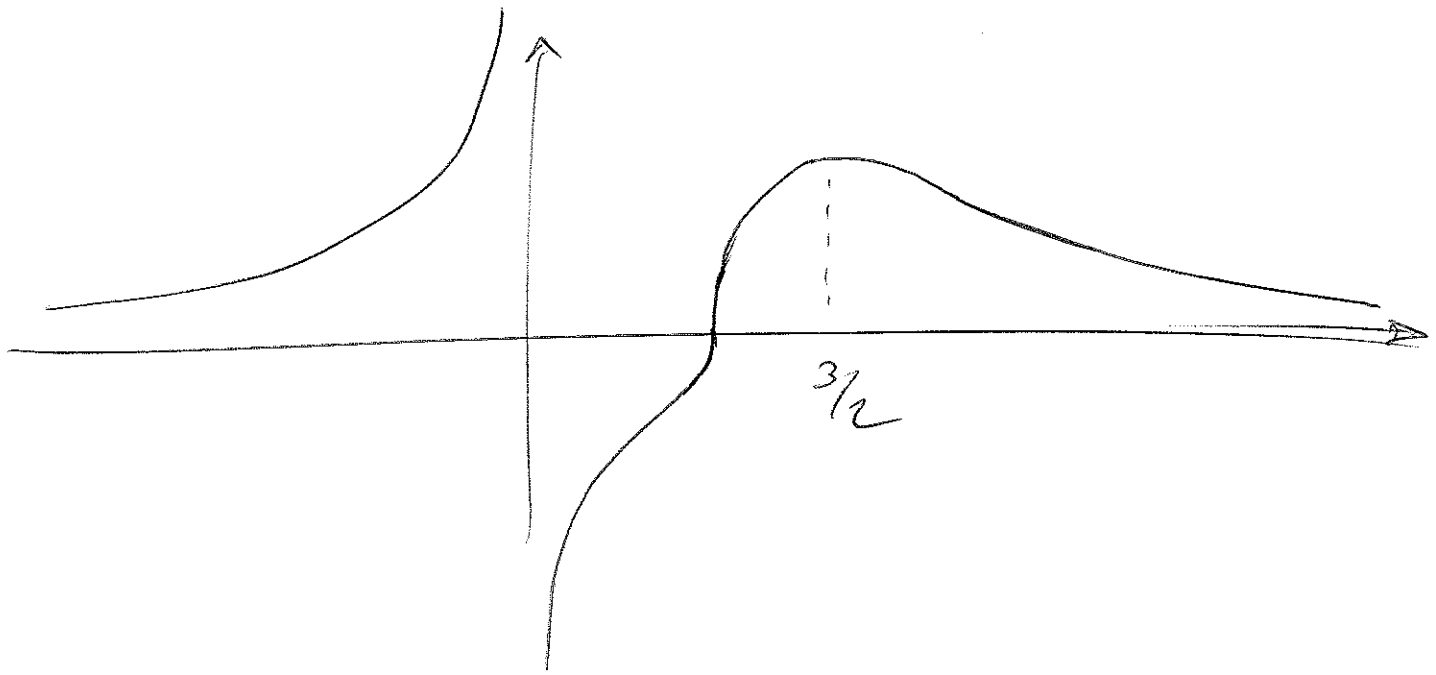
	0	$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{10}$	1	$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{45}}{10}$
segno di $\frac{(x-1)^{1/3}}{x^3}$	+	-	-	+
segno di $5x^2 - 15 + 9$	+	+	-	+

per cui $f'' > 0$ in $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{10}, 1\right) \cup \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{45}}{10}, +\infty\right)$

$f'' < 0$ in $\left(0, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{10}\right) \cup \left(1, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{45}}{10}\right)$

$f'' = 0$ per $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{45}}{10}$

Al suo grafico qual'aspetto è



$\frac{3}{2}$ è un punto di massimo locale

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{2}{3}$$