Capitolo 10

Studio di un grafico di una funzione

Ultimo aggiornamento: 18 dicembre 2023

Esercizio 10.1 - Si trovino il massimo e il minimo (se ci sono) nel suo dominio naturale di

$$f(x) = \left| \frac{\pi}{4} - \arccos |x-1| \right|$$

(si provi a disegnare il grafico di f senza fare alcun calcolo).

Esercizio 10.2 - Si immagini di dover costruire una lattina volendo minimizzare la quantità di alluminio. Il problema può essere tradotto come segue: dato un cilindro di altezza h e base un cerchio di raggio r si cerchi di minimizzare, a parità di volume, la superficie.

Esercizio 10.3 - Data la funzione $f(x) = 3x^4 + 4(2a - a^2)x^3 - 12a^3x^2 + a^6$ con $a \geqslant 0$ si determinino

1. i punti di massimo e minimo locali al variare di a;
2. i valori di a per cui $f = 0$ ha non più di uno zero negativo;

3. i valori di a per cui $f = 0$ ha due zeri positivi;
4. i valori di a per cui f è convessa.

Esercizio 10.4 - Si tracci il grafico qualitativo di

$$f(x) = e^{\frac{|x+2|}{x+3}}$$

Esercizio 10.5 - Si tracci il grafico qualitativo di

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

Esercizio 10.6 - Si tracci il grafico qualitativo di

$$f(x) = \log|x-1| - \sqrt{|x|}$$

Esercizio 10.7 - Si tracci il grafico qualitativo di

$$f(x) = |x|^{2/3} \Big| \log|x| \Big| - x$$

Esercizio 10.8 - Si tracci il grafico qualitativo di

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}\right)$$

Soluzioni

Nelle figure che seguono le rette tratteggiate rappresentano asintoti.

Soluzione ?? - Scriviamo il volume e la superficie

$$V = \pi\, r^2 h, \qquad S = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, h, \qquad\qquad r, h \in (0, +\infty).$$

Supponendo V costante indipendentemente da r e h possiamo scrivere S in termini della sola r (o della sola h). Infatti

$$h = \frac{V}{\pi\, r^2}$$

quindi la funzione da minimizzare è

$$S(r) = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, r\, \frac{V}{\pi\, r^2} = 2\,\pi\, r^2 + 2\,\pi\, \frac{V}{\pi\, r}.$$

Si osservi che

$$\lim_{r\to 0^+} S(r) = \lim_{r\to +\infty} S(r) = +\infty.$$

Sicuramente per il teorema di Weierstrass in ogni compatto $[a, b] \subset (0, +\infty)$ S ha minimo, per cui f ammette minimo in $(0, +\infty)$. Annullando la derivata S si ottiene

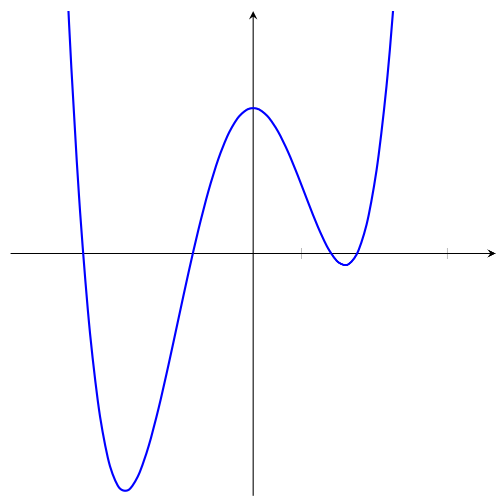
$$S'(r) = 4\,\pi\, r - \frac{2V}{r^2} = 0,$$

che ha come soluzione

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$$

che corrisponde all'unico punto di minimo. Per capire il rapporto tra r e h si osservi che scegliendo $V = 2\pi$ si ottiene $r = 1$ e $h = 2$, cioè la base e l'altezza del cilindro sono uguali.

Soluzione ?? - In generale un polinomio di quarto grado ha un grafico che può essere del tipo



Traslandolo in alto e in basso si vede che si possono avere da 0 a 4 zeri. Vediamo in dettaglio la risposta al punto 2.
Derivando la funzione si ottiene che

$$f'(x) = 0 \iff x = -2a, x = 0, x = a^2$$

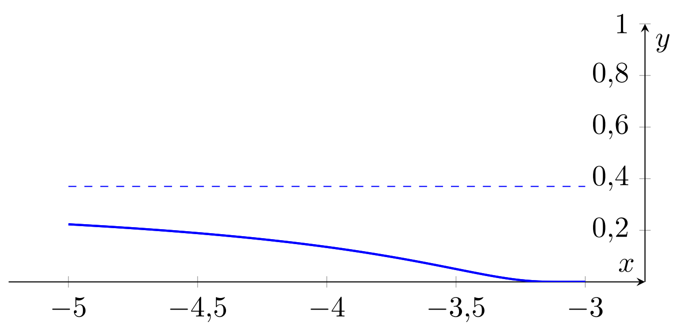
che corrispondono ai tre eventuali punti stazionari del polinomio. Si osservi che per $a = 0$ si ha un solo punto, $x = 0$, e il polinomio è $3x^2$, che non ha zeri negativi, quindi $a = 0$ è un parametro ammesso.
Negli altri casi $x = 0$ corrisponde ad un massimo locale, a^2 e $-2a$ ai due minimi locali. Si osservi che se si ammette anche a negativo, $-2a$ può essere positivo ed in tal caso il massimo locale è in corrispondenza del punto centrale ai tre punti stazionari, per cui in quel caso $x = 0$ sarà di minimo locale.
Tornando ad $a > 0$, il polinomio f avrà un minimo locale in $-2a < 0$. Se $f(-2a) \geqslant 0$ sicuramente f non ha più di uno zero negativo. Valutiamo $f(-2a)$:

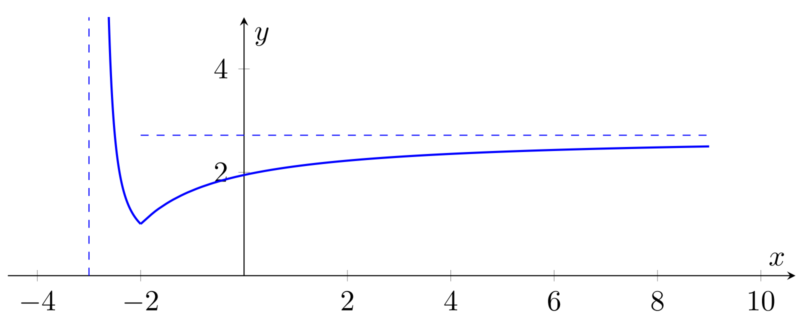
$$\begin{aligned} f(-2a) &= 48a^4 - 32(2a - a^2)a^3 - 48a^5 + a^6 = \\ &= a^4(a^2 - 16a - 16) \end{aligned}$$

che si annulla per $a = 8 + 4\sqrt{5}$ (e per $a = 8 - 4\sqrt{5}$, che è negativo). Quindi per $a = 8 + 4\sqrt{5}$ abbiamo che f si annulla in $-2(8 + 4\sqrt{5}) < 0$, per $a = 8 + 4\sqrt{5} > 0$ non si hanno zeri negativi. Per $a = 8 + 4\sqrt{5} < 0$ il valore di $f(-2a)$ è negativo, quindi esiste sicuramente uno zero negativo minore di $-2(8+4\sqrt{5})$. Possiamo escludere che ce ne sia uno tra $-2(8+4\sqrt{5})$ e 0 perché in 0 f ha un massimo locale positivo, $f(0)=a^6$, per cui per il teorema degli zeri f avrebbe un secondo zero negativo.

1. punti stazionari: $-2a, a^2$ di minimo locale, 0 di massimo locale;
2. per $a=0$ e per $a \geqslant 8+4\sqrt{5}$;
3. per $a \geqslant \sqrt{5}-2$;
4. solo per $a=0$.

Soluzione ?? - Nella prima figura è riportato il grafico fino a -3, nella seconda a destra di -3





La funzione f può essere estesa ad una funzione $\tilde{f}$ in modo tale che risulti continua a sinistra nel punto -3, cioè

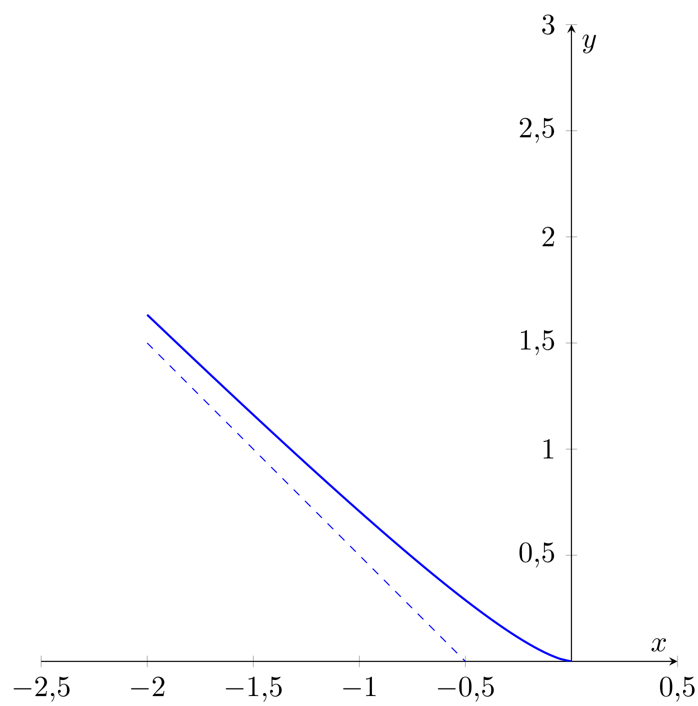
$$\lim_{x \to -3^-} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(-3)$$

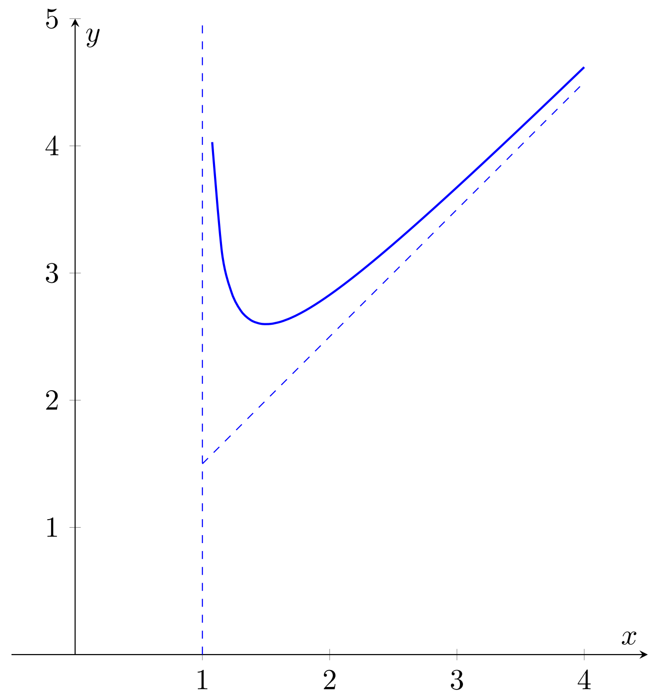
semplicemente considerando

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq -3 \\ 0 & x = -3 \end{cases}$$

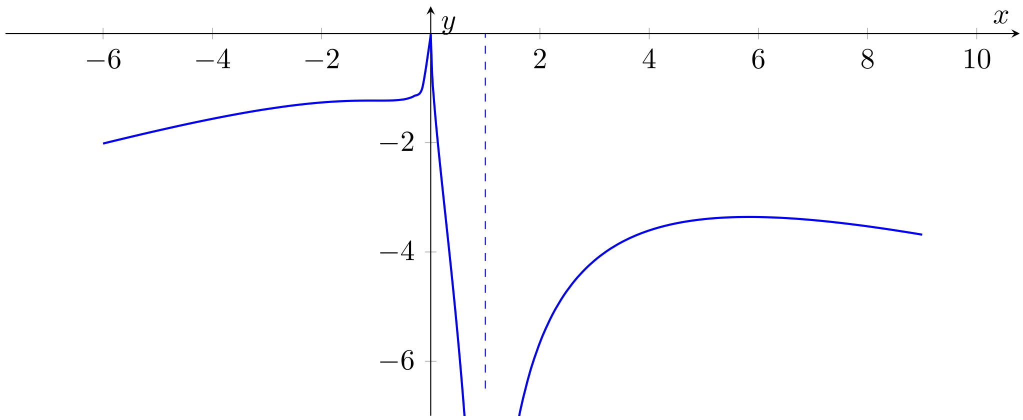
Si osservi che il punto -3 **non è** un punto di discontinuità per f, non essendo f definita nel punto -3.
È però un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $\tilde{f}$.

Soluzione ?? - Nella prima figura è riportato il grafico fino a 0, nella seconda a destra di 0

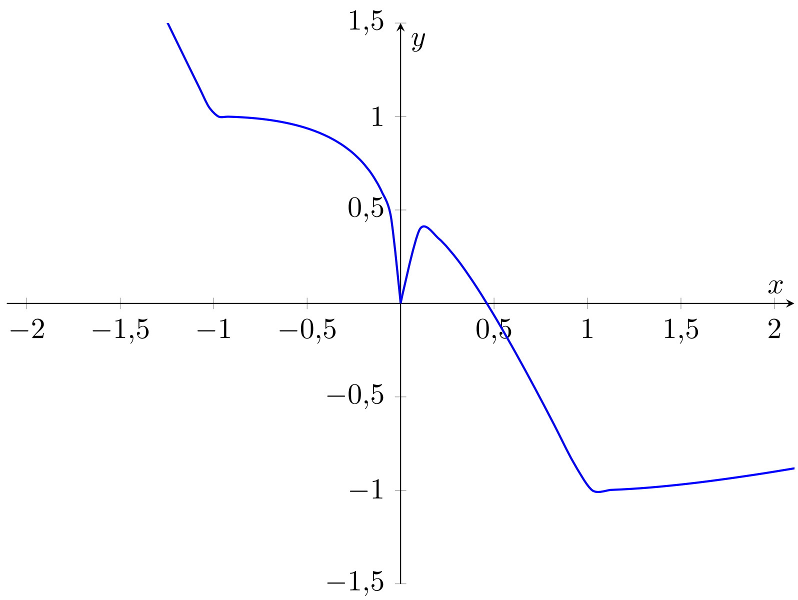




Soluzione ?? -



Soluzione ?? -



Soluzione ?? -