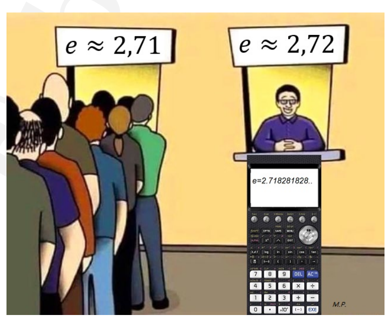
Capitolo 11

Infiniti e infinitesimi
Formula di Taylor
Limiti - Parte seconda

Ultimo aggiornamento: 29 novembre 2023



Dato un numero irrazionale a, sia b un numero reale che approssima a a meno di $1/100$, cioè $|a - b| < 1/100$.
Il numero b ha necessariamente le prime due cifre dopo la virgola uguali a quelle di a?

Esercizio 11.1 - Si dica se le seguenti funzioni hanno un ordine di infinitesimo per $x \to 0$ (o $x \to 0^+$ a seconda del caso) e un ordine di infinito per $x \to +\infty$ ed eventualmente si dica qual è:

1. $f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$
2. $f(x) = e^x + x + x^2 + x^3 - 1$
3. $f(x) = e^x - x + x^2 + x^3 - 1$
4. $f(x) = \log \dfrac{1}{x} + x + x^2 + x^3$
5. $f(x) = \log(x + 1) + x + x^2 + x^3$

Esercizio 11.2 - Si mettano in ordine crescente i seguenti infinitesimi per $x \to 0^+$:

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = \log(x + 1)^2$
3. $f(x) = \log(x^2 + 1)$
4. $f(x) = x^2 \log x$
5. $f(x) = e^{x^4} + x^4 - 1$

Esercizio 11.3 - Si dica se le seguenti funzioni hanno un ordine di infinitesimo dove indicato ed eventualmente si dica qual è:

1. $f(x) = \operatorname{sen} x^3$ per $x \to 0$
2. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ per $x \to 0$
3. $f(x) = x^2 \log x$ per $x \to 0^+$
4. $f(x) = \log x$ per $x \to 1$
5. $f(x) = (x - 1)^2 \log^2 x$ per $x \to 1$
6. $f(x) = e^x - 1$ per $x \to 0$
7. $f(x) = e^{x^2} - 1$ per $x \to 0$

8. $f(x) = e^{x^2 \log x} - 1$ per $x \to 0^+$
9. $f(x) = \cos x^2 - 1$ per $x \to 0$
10. $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}$ per $x \to 0$
11. $f(x) = x + \sqrt{x}$ per $x \to 0^+$
12. $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}$ per $x \to 0$
13. $f(x) = 2\log x + x^2 - x$ per $x \to 1$
14. $f(x) = \operatorname{sen}(\pi \cos x)$ per $x \to \pi$
15. $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ per $x \to 0$
16. $f(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{sen} x$ per $x \to 0$
17. $f(x) = \operatorname{tg} ax - \operatorname{sen} bx$ per $x \to 0$
18. $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{sen} x + x^\alpha}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0^+$ al variare di $\alpha > 0$

Esercizio 11.4 - Si dica qual è l'ordine di infinitesimo in 0 delle seguenti funzioni

1. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x),\ \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x))$
2. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ f(x) = e^{\operatorname{sen} x} - 1,\ f(x) = \operatorname{tg}(e^{\operatorname{sen} x} - 1)$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x^2,\ f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x^2),\ \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x^2))$
4. $f(x) = \operatorname{sen} x^2,\ f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{sen}^2 x),\ \operatorname{arcsen}^2(\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x))$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x^2,\ f(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x} - 1,\ f(x) = \log(1 + \operatorname{tg}^2(e^{\operatorname{sen} x} - 1))$

Esercizio 11.5 - Si mostri che

$$o(x + x^2 + x^3) = o(x).$$

Esercizio 11.6 - Si mostri che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 11.7 - Si mostri che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2$$

Esercizio 11.8 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

Esercizio 11.9 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x) + x^2 + x^4/2}{\sqrt{1+x^6} - \sqrt{1-x^6}}$$

Esercizio 11.10 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}\sqrt{1+2x} - 1}{4x}$$

Esercizio 11.11 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x - 2 + 2\cos x}{x\log(1+x) - x^2}$$

Esercizio 11.12 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Esercizio 11.13 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^2 - 5x + 6)^2}{(e^{(x^2-9)} - 1)^4}.$$

Esercizio 11.14 - Si calcoli

$$\lim_{x\to -3} \frac{(x^2 + x - 6)^2}{(\log(x^2 - 8))^4}.$$

Esercizio 11.15 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x^2 - 3x - 4)^2}{\sqrt{x^2 - 15} - 1}.$$

Esercizio 11.16 - Si calcoli

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^2 + 5x + 4)^2}{(\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(x^4 - 1)))^2}.$$

Esercizio 11.17 -

$$\lim_{x\to \sqrt{2}} \frac{e^{x^2} + e^2(1 - x^2)}{\log^2(x^2 - 3\sqrt{2}x + 5)}.$$

Esercizio 11.18 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{\frac{1}{x \operatorname{sen} x}}$$

Esercizio 11.19 - Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}}{e^{1/x}-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}}$$

$*$ Esercizio 11.20 Si calcoli

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log(2-\cos e^{-x})\right]\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2}$$

Esercizio 11.21 - Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\log(2-\cos e^{-n})\right]\left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right)^{n^{2\alpha}}$$

al variare di $\alpha > 0$.

****

Esercizio 11.22 - Si dimostri che la funzione

$$f(x) = e^x - 1 - x$$

è infinitesima di ordine 2 in 0.

Esercizio 11.23 - Si dimostri che la funzione

$$f(x) = e^{x^2} - 1 - x^2$$

è infinitesima di ordine 4 in 0.

Esercizio 11.24 - Si dimostri che la funzione

$$f(x) = e^{x^3} - 1 - x^3$$

è infinitesima di ordine 6 in 0. Quale sarà l'ordine di infinitesimo in 0 di $f(x) = e^{x^k} - 1 - x^k$? ($k \in \mathbf{N}^*$)

Esercizio 11.25 - Si trovino i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali esiste $\delta > 0$ tale che

$$\cos x < \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^\alpha \qquad \text{per ogni } x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta).$$

Esercizio 11.26 - Qual è l'ordine di infinitesimo in 0 della funzione

$$f_1(x) = \sqrt{1+x+x^2+x^3} - 1?$$

E della funzione

$$f_2(x) = \sqrt{1+x^2+x^3} - 1?$$

E della funzione

$$f_3(x) = \sqrt{1+x^3} - 1?$$

Esercizio 11.27 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2+x^3+x^4) - (x+x^2+x^3)}{x^2}$$

Esercizio 11.28 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2+x^3+x^4) - (x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4)}{x^4}$$

Esercizio 11.29 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2+x^4) - x^2 - x^4}{x^4}$$

Esercizio 11.30 - Si calcoli per $k \in \mathbf{N}^*$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^k+x^{2k}) - x^k - x^{2k}}{x^{2k}}$$

Esercizio 11.31 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x - \frac{x^3}{6}}{x^4}$$

Esercizio 11.32 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - 2\pi}$$

Esercizio 11.33 - Si calcoli

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x^3}{(x-\pi)^3}$$

Esercizio 11.34 - Al variare di $\alpha > 0$ si calcoli

$$\lim_{x\to \pi^+} \frac{\operatorname{sen} x + x - \pi}{(x-\pi)^\alpha}$$

Esercizio 11.35 - Si calcoli

$$\lim_{x\to\pi/2}\left[\frac{\operatorname{sen}x-1}{(x-\pi/2)^4}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-\pi/2)^2}\right]$$

Esercizio 11.36 - Si calcolino i polinomi di Taylor di grado 4 intorno a 0 e intorno a $\pi/2$ della funzione

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{e^x}.$$

Dopodiché si calcolino i polinomi di Taylor di grado 10 intorno a 0 e intorno a $\pi/2$ della stessa funzione.

Esercizio 11.37 - Data la funzione

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

si scrivano gli sviluppi di Taylor (con resto di Peano) al primo, al secondo e al terzo ordine nel punto 0 di

$$g(x)=\sqrt{2}\,f(x)-\sqrt{1+x}.$$

Esercizio 11.38 - Si calcolino i polinomi di Taylor intorno a 0 di grado 15, 16, 17 e 18 della funzione $f(x)=\operatorname{sen}x^3$.

Esercizio 11.39 - Si calcolino i polinomi di Taylor intorno a 0 di grado 18, 19, 20 della funzione $f(x)=\cos x^3$.

Esercizio 11.40 - Si calcoli il polinomio di Taylor intorno a 0 di grado 6 della funzione $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$.

Esercizio 11.41 - Si calcoli il polinomio di Taylor intorno a 0 di grado 6 della funzione $f(x)=\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}x)$.

$\ast$ Esercizio 11.42 Si calcoli il polinomio di Taylor intorno a 1 di grado 1 delle funzioni $f(x)=2\log x$ e $g(x)=\log x^2$.

$\ast$ Esercizio 11.43 Sfruttando esclusivamente lo sviluppo noto di Taylor della funzione $g(y)=\operatorname{sen}y$ intorno a 0 si trovi il polinomio di Taylor intorno a 0 di grado 5 della funzione $f(x)=\operatorname{arcsen}x$ senza usare le derivate.

$*$ Esercizio 11.44 Sfruttando esclusivamente lo sviluppo noto di Taylor della funzione $g(y) = \operatorname{tg} y$ intorno a 0 si trovi il polinomio di Taylor intorno a 0 di grado 5 della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ senza usare le derivate.

Esercizio 11.45 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x - x\cos x}{x^4} \log\left(3 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

Esercizio 11.46 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x - x\cos x}{x^4} \log\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

Esercizio 11.47 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x\cos x}{x^4} \log\left(2 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

Esercizio 11.48 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1-x^2} - \cos x}$$

Esercizio 11.49 - Si calcoli al variare di $a > 0$

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\log(1+x^a)}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$

Esercizio 11.50 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x) + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

Esercizio 11.51 - Si determini l'ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$ di

$$f(x) = \cos\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$$

Esercizio 11.52 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+x^2) - \operatorname{sen} x - x^2}{2 - x^2 - 2\cos x}$$

Esercizio 11.53 - Si calcoli al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x - \log(1+x)^2}{x^4 + x^\alpha}$$

Esercizio 11.54 - Si calcoli al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha}{6}x^4 - x^2 + \operatorname{sen}^2 x}{4\cos x - 4 + 2x^2 + x^\alpha}$$

Esercizio 11.55 - Si calcoli al variare di $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha) + \log(1-x^\alpha) + x^2}{e^{x^2} - e^{-x^2} - 2\alpha x^2}$$

Esercizio 11.56 - Si dica se la funzione

$$f(x) = x \exp\left(\frac{x+1}{x^2}\right) \qquad\qquad (\exp(t) := e^t)$$

ha un asintoto a $+\infty$.

Esercizio 11.57 - Si dica se la funzione

$$f(x) = x \exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

ha un asintoto a $+\infty$.

Esercizio 11.58 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1 - x}{x^2}$$

Esercizio 11.59 - Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{arctg} x^2}{\operatorname{senh}^2 x - x^2}$$

Esercizio 11.60 - Sapendo che

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k,j=1}^{n} a_k a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{\substack{k,\, j\, =\, 1 \\ k\, >\, j}}^{n} 2a_k a_j$$

si calcolino i valori della derivata sesta in 0, della derivata settima in 0 e della derivata 173-esima in 0 della funzione $f(x) = (\operatorname{sen} x)^2$.

Esercizio 11.61 - Dopo aver fatto l'esercizio precedente si calcoli il valore della derivata sesta in 0 della funzione $f(x) = \log(\cos^2 x)$.

Esercizio 11.62 - Dopo aver fatto l'esercizio precedente si calcoli il valore della derivata sesta in 0 della funzione $f(x) = (\cos^2 x)^{x^2}$.

Esercizio 11.63 - Si calcoli il valore della derivata sesta in 0 della funzione $f(x) = \cosh(\log(\cos x))$ dove $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$.

****

Esercizio 11.64 - Usando la formula di Taylor si approssimi e con un errore minore di $\frac{1}{100}$ sommando i primi n termini del tipo $\frac{1}{k!}$.

Esercizio 11.65 - Usando la formula di Taylor si approssimi e con un errore minore di $\frac{1}{10000}$ sommando i primi n termini del tipo $\frac{1}{k!}$.

Esercizio 11.66 - Usando la formula di Taylor si approssimi $\log_e 2$ con un errore minore di $\frac{1}{100}$ sommando i primi n termini del tipo $\frac{(-1)^k}{k}$.

Esercizio 11.67 - Usando la formula di Taylor si approssimi $\operatorname{sen} 1$ con un errore minore di $\frac{1}{1000}$ sommando i primi n termini del tipo $\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.

****

Esercizio 11.68 - Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{2}{n^3}} - 1}{\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}} \left(\log\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n \right)$$

Esercizio 11.69 - Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} 2n^2 \left(\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{2}{\sqrt{n}} \right) - \cosh \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Esercizio 11.70 - Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cosh\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right) - \cos\left(\frac{n!}{n^{7n}}\right)}{1 + \log\left(1 + \frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right) - \exp\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+1}}\right)}$$

Soluzioni

Soluzione 11.1 -

1. ordine di infinitesimo in 0: 1
   ordine di infinito a $+\infty$: 4
2. ordine di infinitesimo in 0: 1
   ordine di infinito a $+\infty$: non esiste
3. ordine di infinitesimo in 0: 2
   ordine di infinito a $+\infty$: non esiste
4. ordine di infinitesimo in 0: non è infinitesima
   ordine di infinito a $+\infty$: 3
5. ordine di infinitesimo in 0: 1
   ordine di infinito a $+\infty$: 3

Soluzione 11.2 - 5. - 1. - 3. - 4. - 2.

Soluzione 11.3 -

2. L'ordine è 3
3. non ha ordine
4. L'ordine è 1
7. L'ordine è 2
8. non ha ordine
14. L'ordine è 2. Infatti si osservi che

$$\operatorname{sen}(\pi\cos x) = \operatorname{sen}((\pi\cos x + \pi) - \pi) = -\operatorname{sen}(\pi\cos x + \pi)$$

e che

$$\cos x = \cos(x - \pi + \pi) = -\cos(x - \pi).$$

Di conseguenza, dividendo per $|x-\pi|^a$ con a da determinarsi, si ha

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi\cos x)}{|x-\pi|^a} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi\cos x + \pi)}{\pi\cos x + \pi}\ \frac{\pi(1 - \cos(x-\pi))}{|x-\pi|^a}.$$

Passando al limite si ha

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(\pi\cos x+\pi)}{\pi\cos x+\pi} = 1$$

poiché la quantità $\pi\cos x+\pi$ è infinitesima per $x\to\pi$ e

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\pi(1-\cos(x-\pi))}{|x-\pi|^a} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{se e solo se} \qquad a=2.$$

15. 3
16. 1
17. 1 se $a \neq b$, 3 se $a=b$

Soluzione 11.4 -

1. hanno tutte ordine di infinitesimo 1
2. hanno tutte ordine di infinitesimo 1
3. hanno tutte ordine di infinitesimo 2
4. hanno tutte ordine di infinitesimo 2
5. hanno tutte ordine di infinitesimo 2

Soluzione 11.5 - Mostrare che $o(x+x^2+x^3)=o(x)$ significa mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x+x^2+x^3)}{x} = 0\,.$$

Per mostrare ciò moltiplichiamo e dividiamo per $x+x^2+x^3$: si ha

$$\frac{o(x+x^2+x^3)}{x} = \frac{o(x+x^2+x^3)}{x+x^2+x^3}\;\frac{x+x^2+x^3}{x}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x+x^2+x^3)}{x+x^2+x^3} = 0 \qquad \text{per definizione,}$$

mentre
$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + x^3}{x} = 1,$$
per cui il limite che si voleva calcolare è 0.

Soluzione 11.17 - Si osservi che abbiamo una quantità infinitesima sia a numeratore che a denominatore.
Poiché x tende a $\sqrt{2}$ e a numeratore abbiamo e^{x^2} conviene sviluppare la funzione e^t in 2. Lo facciamo fino al second'ordine:
$$e^t = e^2 + e^2(t-2) + e^2(t-2)^2 + o((t-2)^2),$$
cosicché
$$e^{x^2} = e^2 + e^2(x^2-2) + e^2(x^2-2)^2 + o((x^2-2)^2),$$
Si osservi che
$$(x^2-2)^2 = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$$
per cui, poiché la quantità $(x^2-2)^2$ è infinitesima in $\sqrt{2}$ ed è asintotica a $(x-\sqrt{2})^2$ si ha che
$$o((x^2-2)^2) = o((x-\sqrt{2})^2) \qquad \text{in } \sqrt{2}.$$
Infatti
$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{o((x^2-2)^2)}{(x-\sqrt{2})^2}$$

Soluzione 11.18 - Si può scrivere
$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 = 1 + \frac{\operatorname{sen} x - x}{x}$$
per cui la quantità da studiare può essere scritta come
$$\left[\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{sen} x - x}}\right]^{\frac{\operatorname{sen} x - x}{x}\frac{1}{x \operatorname{sen} x}}.$$
Quanto sta fra parentesi quadre tende a e, mentre l'esponente converge a $1/6$ (si veda l'Esercizio 11.6).

Soluzione 11.19 - Ricordo:

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Oltre alla dimostrazione di quest'uguaglianza mostrata nella soluzione di un esercizio del capitolo di esercizi Serie Numeriche - Parte seconda mostriamo quella che segue. Si osservi che

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) = 0$$

da cui la funzione derivanda è costante. Poiché non è definita in 0 risulterà costante in $(0, +\infty)$ e costante in $(-\infty, 0)$ (saranno due costanti diverse). Per $x > 0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

per cui la costante cercata è $\pi/2$ (per $x < 0$ la costante è $-\pi/2$) e di conseguenza

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

A questo punto si utilizza lo sviluppo della funzione $t \mapsto \operatorname{arctg} t$ in 0 poiché per $x \to +\infty$ si ha $1/x \to 0$:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

e di conseguenza il numeratore diventa

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \tag{11.1}$$

Sviluppando al primo ordine $t \mapsto e^t$ in 0 si ottiene

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

In questo modo il denominatore diventa

$$e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right). \tag{11.2}$$

È chiaro che raccogliendo $-\frac{1}{2x^2}$ si ottiene

$$-\frac{1}{2x^2}\left[1+x^2 o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{1}{2x^2}\left[1+x\,\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]$$

e sul limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \text{non si può dire nulla.}$$

È evidente quindi che lo sviluppo al primo ordine (11.2) non basta. Provando al secondo ordine, poiché $e^t = 1+t+t^2/2+o(t^2)$, si ottiene

$$e^{1/x}-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Allora da (11.1) si ottiene che la quantità da studiare diventa

$$\frac{-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{3x^3}\,\frac{\left[1+\frac{o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}\right]}{o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{3x}\,\frac{\left[1+\frac{o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}\right]}{\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}}.$$

Nuovamente si ha un caso indeterminato: mentre x tende a $+\infty$ si ha che $-\frac{1}{3x}$ e il denominatore tendono a 0. Anche lo sviluppo arrestato al secondo ordine per la funzione esponenziale non basta. Andando avanti al terzo ordine si ha

$$e^{1/x}-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

e quindi finalmente

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}}{e^{1/x}-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}} = \frac{-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{-\frac{1}{3x^3}}{\frac{1}{6x^3}}\;\frac{1+\frac{o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}}{1+\frac{o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}}.$$

Passando al limite si ottiene facilmente -2.

Soluzione 11.20 - Si osservi che la quantità

$$\log(2-\cos e^{-x})$$

può essere riscritta come

$$\frac{\log(2-\cos e^{-x})}{1-\cos e^{-x}}\;\frac{1-\cos e^{-x}}{\frac{e^{-2x}}{2}}\;\frac{e^{-2x}}{2}.$$

Poiché i primi due fattori, al tendere di x a $+\infty$, tendono a 1 prendiamo in considerazione solo il terzo fattore assieme al termine che abbiamo trascurato nel limite, consideriamo cioè

$$\frac{e^{-2x}}{2}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2}.$$

Scriviamo, trascurando per ora 1/2

$$e^{-2x}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2}=\left(\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}}{e}\right)^{2x}=\left(\frac{e^{\frac{x}{2}\log\left(1+\frac{2}{x}\right)}}{e}\right)^{2x}=\left(e^{\frac{x}{2}\log\left(1+\frac{2}{x}\right)-1}\right)^{2x}$$

Sviluppando ora la funzione $t\mapsto\log(1+t)$ in 0 si ottiene

$$e^{\frac{x}{2}\log\left(1+\frac{2}{x}\right)-1}=e^{\frac{x}{2}\left[\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-1}=e^{-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Tornando al termine che si voleva studiare si ha

$$\frac{e^{-2x}}{2}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x^2}=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{2x}=\frac{1}{2}\left(e^{-2+o(1)}\right)$$

il cui limite è $\frac{1}{2\,e^2}$.

Soluzione 11.25 - La risposta è $\alpha<3$. Infatti la disuguaglianza è vera se

$$1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)<\left(\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x}\right)^{\alpha}=\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^{\alpha}=1-\frac{\alpha}{6}\,x^2+o(x^2).$$

Affinché questa sia vera si deve avere

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{6}\right)x^2>o(x^2)$$

e, dividendo per x^2, si ha che

$$\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{6}>\frac{o(x^2)}{x^2}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che esiste $\delta > 0$ tale che

$$-\varepsilon < \frac{o(x^2)}{x^2} < \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta).$$

Affinché la disuguaglianza di sopra sia vera è allora sufficiente che $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}$ sia positivo: infatti basterà scegliere ε positivo e minore $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}$ per concludere.

Soluzione 11.26 - i per f_i, $i = 1, 2, 3$

Soluzione 11.27 - Sviluppando in 0 al primo ordine la funzione $x \mapsto \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) &= x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x + x^2 + x^3 + x^4) = \\ &= x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x) \end{aligned}$$

per cui

$$\frac{\log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) - (x + x^2 + x^3)}{x^2} = \frac{x^4 + o(x)}{x^2} = x^2 \frac{x^2 + \frac{o(x)}{x^2}}{x^2}.$$

Questo limite **non è zero** poiché sul comportamento di $\frac{o(x)}{x^2}$ non si può dire nulla. Infatti

$$\frac{o(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \, \frac{o(x)}{x},$$

per $x \to 0$ il primo fattore non ha limite e il suo valore assoluto, $\frac{1}{|x|}$, tende a $+\infty$, il secondo fattore tende a 0.
Sviluppiamo al secondo ordine:

$$\begin{aligned} &\log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = \\ &\quad = x + x^2 + x^3 + x^4 - \tfrac{1}{2}(x + x^2 + x^3 + x^4)^2 + o((x + x^2 + x^3 + x^4)^2) = \\ &\quad = x + x^2 + x^3 + x^4 - \tfrac{1}{2}(x^2 + 2x^3 + 3x^4 + +4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8) + o(x^2) = \\ &\quad = x + x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) = x + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che sia x^3 che x^4 sono $o(x^2)$.
A questo punto il limite si può calcolare e si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) - (x + x^2 + x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Soluzione 11.28 - Come visto nell'esercizio precedente sicuramente non basterà sviluppare al prim'ordine. Anzi, precisamente si ha che sviluppando la funzione $x \mapsto \log(1+x+x^2+x^3+x^4)$ al k-esimo ordine in 0 si ha che

$$o((x+x^2+x^3+x^4)^k) = o(x^k).$$

Di conseguenza, per confrontare il numeratore con x^4, il denominatore, bisognerà avere a numeratore un $o(x^4)$ e quindi bisognerà sviluppare la funzione $x \mapsto \log(1+x+x^2+x^3+x^4)$ al quarto ordine. Per farlo non è necessario calcolare esattamente tutte le potenze di $x+x^2+x^3+x^4$.
Vediamo come fare:

$$\begin{aligned}
\log(1+x+x^2+x^3+x^4) = \\
&= x+x^2+x^3+x^4+ \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(x+x^2+x^3+x^4)^2+ \\
&\quad +\tfrac{1}{3}(x+x^2+x^3+x^4)^3+ \\
&\quad -\tfrac{1}{4}(x+x^2+x^3+x^4)^4+ \\
&\quad +o((x+x^2+x^3+x^4)^4).
\end{aligned}$$

Poiché per calcolare il limite ci basta avere un resto che sia $o(x^4)$ e tutti i termini che si ottengono sviluppando le potenze $(x+x^2+x^3+x^4)^k$, $k=2,3,4$, che sono del tipo x^m con $m \geqslant 5$ sono $o(x^4)$ il precedente sviluppo si può semplificare come segue; analizziamo in dettaglio il secondo termine:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(x+x^2+x^3+x^4)^2 = \\
&= \frac{1}{2}(x^2+2x^3+3x^4+4x^5+3x^6+2x^7+x^8) = \\
&= \frac{1}{2}(x^2+2x^3+3x^4+o(x^4)).
\end{aligned}$$

In maniera simile si trattano gli altri termini, per cui si ottiene

$$
\begin{aligned}
\log(1+x+x^2+x^3+x^4) = \\
&= x + x^2 + x^3 + x^4 + \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(x^2+2x^3+3x^4)+ \\
&\quad +\tfrac{1}{3}(x^3+3x^4)+ \\
&\quad -\tfrac{1}{4}x^4+ \\
&\quad +o(x^4) = \\
&= x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}
$$

Di conseguenza

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2+x^3+x^4) - (x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4)}{x^4} = \frac{1}{4}.
$$

Soluzione 11.36 - Le derivate della funzione f sono

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\operatorname{sen} x}{e^x}, \\
f'(x) &= \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{e^x}, \\
f''(x) &= -\frac{2\cos x}{e^x}, \\
f'''(x) &= \frac{2(\operatorname{sen} x + \cos x)}{e^x}, \\
f''''(x) &= -\frac{4 \operatorname{sen} x}{e^x}.
\end{aligned}
$$

Da ciò si ha

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 0, && f(\pi/2) = \frac{1}{e^{\pi/2}}, \\
&f'(0) = 1, && f'(\pi/2) = -\frac{1}{e^{\pi/2}}, \\
&f''(0) = -2, && f''(\pi/2) = 0, \\
&f'''(0) = 2, && f'''(\pi/2) = \frac{2}{e^{\pi/2}}, \\
&f''''(0) = 0, && f''''(\pi/2) = -\frac{4}{e^{\pi/2}}.
\end{aligned}
$$

Per cui il polinomio di quarto grado in 0 di f è

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

il polinomio di quarto grado in $\pi/2$ di f è

$$\frac{1}{e^{\pi/2}} - \frac{1}{e^{\pi/2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3\,e^{\pi/2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{6\,e^{\pi/2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$$

e i corrispondenti sviluppi sono

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4),$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{\pi/2}} - \frac{1}{e^{\pi/2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3\,e^{\pi/2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{6\,e^{\pi/2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right).$$

Per gli sviluppi successivi si osservi che

$$f''''(x) = -4\,f(x)$$

per cui non occorre calcolare le derivate fino al decimo ordine, ma si ha semplicemente

$$\begin{aligned}
f^{(5)}(x) &= -4f^{(1)}(x),\\
f^{(6)}(x) &= -4f^{(2)}(x),\\
f^{(7)}(x) &= -4f^{(3)}(x),\\
f^{(8)}(x) &= -4f^{(4)}(x),\\
f^{(9)}(x) &= -4f^{(5)}(x) = 16f^{(1)}(x),\\
f^{(10)}(x) &= -4f^{(6)}(x) = 16f^{(2)}(x).
\end{aligned}$$

Soluzione 11.37 - Bisogna calcolare le derivate di f, mentre per la funzione $x \mapsto \sqrt{1+x}$ conosciamo già lo sviluppo. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x}+1}\left[e^x\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\right] = \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^{3/2}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{(e^{2x}+1)^3}\left[e^x(e^{2x}+1)^{3/2} - 3e^{3x}(e^{2x}+1)^{1/2}\right] = \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^{5/2}}[1-2e^{2x}],$$

$$
\begin{aligned}
f'''(x) = \quad & \frac{1}{(e^{2x}+1)^5}\Big[\Big(e^x[1-2e^{2x}] + e^x[-4e^{2x}]\Big)(e^{2x}+1)^{5/2} + \\
& \qquad -e^x(1-2e^{2x}\frac{5}{2}(e^{2x}+1)^{3/2}2\,e^{2x}\Big] = \\
= \quad & \frac{1}{(e^{2x}+1)^{7/2}}\Big[(e^x-2e^{3x}-4e^{3x})(e^{2x}+1)-5e^{3x}(1-2e^{2x})\Big] = \\
= \quad & \frac{1}{(e^{2x}+1)^{7/2}}\Big[e^x-10e^{3x}+4e^{5x}\Big].
\end{aligned}
$$

Per cui lo sviluppo di f al terzo ordine in 0 è

$$
f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o(x^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,x-\frac{1}{8\sqrt{2}}\,x^2-\frac{5}{8\sqrt{2}}\,\frac{1}{6}\,x^3+o(x^3).
$$

Inoltre si ha

$$
\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{8}\,x^2+\frac{1}{16}\,x^3+o(x^3).
$$

Per cui i polinomi di Taylor di g in 0 del primo e del secondo ordine sono il polinomio nullo e gli sviluppi richiesti sono

$$
\begin{gathered}
g(x) = o(x), \\
g(x) = o(x^2), \\
g(x) = -\frac{1}{24}\,x^3+o(x^3).
\end{gathered}
$$

Soluzione 11.38 - Si può procedere come negli esercizi 11.36 e 11.37, svolgendo le derivate della funzione f.
In questo caso però si può risparmiare lavoro e sfruttare lo sviluppo

$$
\operatorname{sen} t = t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{5!}+o(t^5)
$$

e scrivere (sostituendo x^3 a t)

$$
\operatorname{sen} x^3 = x^3-\frac{x^9}{6}+\frac{x^15}{5!}+o(x^{15}).
$$

Se sfruttiamo l'informazione aggiuntiva che

$$
\operatorname{sen} t = t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{5!}+o(t^6)
$$

ci si accorge che in realtà

$$\operatorname{sen} x^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^1 5}{5!} + o(x^{18}).$$

Soluzione 11.41 - $x^2 - \dfrac{x^4}{6} + \left(\dfrac{1}{5!} - 1\right) x^6 + o(x^6)$

Soluzione 11.42 - Utilizzando lo sviluppo del logaritmo

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \tag{11.3}$$

si ottiene che sviluppando f intorno al punto 1 si ottiene (ponendo $x = 1+t$)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)\right] = \\ &= 2(x-1) - (x-1)^2 + o((x-1)^2) = \\ &= -3 + 4x - x^2 + o((x-1)^2). \end{aligned} \tag{11.4}$$

Ora passiamo a g: è evidente che $g(x) = f(x)$, ma senza usare il fatto che $\log x^2 = 2\log x$ proviamo a sviluppare direttamente g. Poiché $x^2 = 1 + (x^2 - 1)$ si può essere tentati di scrivere

$$\begin{aligned} \log x^2 &= \log(1 + (x^2 - 1)) = \\ &= x^2 - 1 - \frac{1}{2}(x^2-1)^2 + o((x^2-1)^2) = \\ &= (x-1)(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)^2(x+1)^2 + o((x-1)^2) \end{aligned} \tag{11.5}$$

poiché (specificando il punto in cui l'o piccolo è infinitesimo)

$$o_1((x^2-1)^2) = o_1((x-1)^2(x+1)^2) = o_1((x-1)^2).$$

L'uguaglianza trovata non è sbagliata, ma quello trovato **non è** il polinomio di Taylor di grado 2 di g intorno al punto 1 perché non è della forma

$$g(1) + g'(1)(x-1) + g''(1)(x-1)^2 = a + b(x-1) + c(x-1)^2.$$

Si noti che le valutazioni nel punto $x = 1$ delle espressioni a destra di (11.4) e di (11.5) e delle loro derivate prime e seconde coincidono. Quella che

può essere sviluppata in maniera immediata usando lo sviluppo (11.3) è la funzione
$$h(x) = \log(1 + (x-1)^2)$$
che ha come sviluppo
$$h(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$
Volendo sviluppare g nel punto 1 dobbiamo prima sviluppare nel punto 1 la funzione $\varphi(x) = x^2$ che, nonostante sia un polinomio, non è della forma $a + b(x-1) + c(x-1)^2$. Si ha
$$\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{1}{2}\,\varphi''(1)(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$
cioè
$$x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2).$$
Si noti che in questo caso $o((x-1)^2) \equiv 0$ dal momento che $x^2 = 1+2(x-1)+(x-1)^2$. Dopo aver sviluppato la funzione φ fino al secondo ordine, ma di fatto fino a qualunque ordine vista l'uguaglianza $x^2 = 1+2(x-1)+(x-1)^2$, si procede con lo sviluppare il logaritmo:
$$\begin{aligned}
\log x^2 &= \log(1 + 2(x-1) + (x-1)^2) \\
&= 2(x-1) + (x-1)^2 - \frac{1}{2}\left[2(x-1) + (x-1)^2\right]^2 + \\
&\qquad + o((2(x-1) + (x-1)^2)^2) = \\
&= 2(x-1) - (x-1)^2 + o((x-1)^2)
\end{aligned}$$
che effettivamente coincide con lo sviluppo (11.4).

Ovviamente l'esercizio ha solo uno scopo didattico, la cosa migliore per sviluppare la funzione $x \mapsto \log x^k$ intorno a 1 è sviluppare la funzione $x \mapsto \log x = \log(1 + (x-1))$ intorno a 1 e moltiplicare per k il suo sviluppo.

Soluzione 11.43 - Lo sviluppo sarà del tipo
$$\operatorname{arcsen} x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + o(x^5).$$

Si debbono trovare α_i, con i tra 0 e 5. Prima di tutto si osservi che $f(0)=0$, per cui α_0 sarà 0. Il valore di α_1 è dato da

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \lim_{x\to 0}\frac{[\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4+\alpha_5 x^5+o(x^5)]-\alpha_0}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x-\alpha_0}{x}
\end{aligned}$$

quindi

$$\alpha_1=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sen} y}=1.$$

Dopodiché si avrà (usiamo il fatto che conosciamo α_0 e α_1)

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \lim_{x\to 0}\frac{[\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4+\alpha_5 x^5+o(x^5)]-\alpha_0-\alpha_1 x}{x^2} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x-x}{x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}^2 y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{y^3}\;\frac{y^3}{\operatorname{sen}^2 y}=0.
\end{aligned}$$

Per il terzo termine si ha

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= \lim_{x\to 0}\frac{[\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4+\alpha_5 x^5+o(x^5)]-\alpha_0-\alpha_1 x-\alpha_2 x^2}{x^3} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x-x}{x^3}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen}^3 y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{y^3}\;\frac{y^3}{\operatorname{sen}^3 y}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Il termine α_4 (come pure tutti i termini α_{2k}) è nullo, il termine α_5 è dato da

$$\begin{aligned}
\alpha_5 &= \lim_{x\to 0}\frac{[\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4+\alpha_5 x^5+o(x^5)]-\alpha_0-\alpha_1 x-\alpha_2 x^2-\alpha_3 x^3-\alpha_4 x^4}{x^5} = \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x-x-\frac{1}{6}x^3}{x^5}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 y}{\operatorname{sen}^5 y} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y-\left(y-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{5!}y^5+o(y^5)\right)-\frac{1}{6}\left(y-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{5!}y^5+o(y^5)\right)^3}{\operatorname{sen}^5 y}.
\end{aligned}$$

Poiché ci bastano i termini fino al quinto ordine possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^3 y &= \left(y-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{5!}y^5+o(y^5)\right)^3 = \\
&= \left(y^3-\frac{1}{2}y^5+o(y^5)\right)
\end{aligned}$$

per cui infine

$$\begin{aligned}
\alpha_5 &= \lim_{y\to 0} \frac{y - \left(y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 + o(y^5)\right) - \frac{1}{6}\left(y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 + o(y^5)\right)^3}{\operatorname{sen}^5 y} = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{y - \left(y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 + o(y^5)\right) - \frac{1}{6}\left(y^3 - \frac{1}{2}y^5 + o(y^5)\right)}{\operatorname{sen}^5 y} = \frac{9}{5!}.
\end{aligned}$$

Per cui

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{9}{5!}x^5 + o(x^6)$$

dove nella valutazione del resto di Peano si è sfruttato il fatto che f è dispari per cui il resto $o(x^5)$ in realtà è $o(x^6)$.

Soluzione 11.45 - $+\infty$

Soluzione 11.46 - Non esiste

Soluzione 11.50 - $1/12$

Soluzione 11.52 - 6

Soluzione 11.56 - Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[x \exp\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\right] = 1.$$

Per capire se c'è un asintoto, che eventualmente sarà una retta del tipo $x+b$, si deve vedere se esiste finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[e^{\left(\frac{x+1}{x^2}\right)} - 1\right].$$

Tale limite è 1. Lo si vede riscrivendo opportunamente l'oggetto del limite poiché $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$:

$$x\left[e^{\left(\frac{x+1}{x^2}\right)} - 1\right] = x\left[\frac{e^{\left(\frac{x+1}{x^2}\right)} - 1}{\frac{x+1}{x^2}}\right]\frac{x+1}{x^2} = \left[\frac{e^{\left(\frac{x+1}{x^2}\right)} - 1}{\frac{x+1}{x^2}}\right]\frac{x+1}{x}.$$

Soluzione 11.57 - Si osservi che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e}.$$

Ora

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{e} &= x\left[\exp\left(\frac{2+x}{2-x}\right) - \frac{1}{e}\right] = \frac{x}{e}\left[\exp\left(1+\frac{2+x}{2-x}\right) - 1\right] = \\ &= \frac{x}{e}\left[1 + \frac{2+x}{2-x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{x}{e}\left[\frac{4}{2-x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}$$

dove si è sviluppata la funzione esponenziale al primo ordine in 0 ottenendo

$$\exp\left(1+\frac{2+x}{2-x}\right) = 1 + o\left(1+\frac{2+x}{2-x}\right)$$

e si è usato il fatto che

$$o\left(1+\frac{2+x}{2-x}\right) = o\left(\frac{4}{2-x}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Passando al limite si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \frac{x}{e}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e}\left[\frac{4}{2-x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\frac{4}{e}$$

per cui a $+\infty$ la funzione ha come asintoto obliquo la retta

$$\frac{x}{e} - \frac{4}{e}.$$

Si provi anche a $-\infty$.

Soluzione 11.60 - Per calcolare la derivata sesta si ha bisogno dello sviluppo fino al sesto ordine della funzione, cioè va trovato lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{6} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + o(x^6).$$

Sapendo che

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

si ha che

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)^2 = \\
&= x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{16\,x^6}{360} + o(x^6)
\end{aligned}
\tag{11.6}
$$

di conseguenza

$$\frac{16}{360} = \frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{f^{(6)}(0)}{2 \cdot 360}$$

da cui

$$f^{(6)}(0) = 32.$$

Per calcolare la derivata settima bisogna andare avanti con lo sviluppo fino ad avere un o piccolo di x^7. In realtà si noti che, per la funzione seno che è dispari, lo sviluppo (11.6) è in realtà

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^2 = \\
&= x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^7).
\end{aligned}
$$

Di conseguenza lo sviluppo ottenuto precedentemente è anche lo sviluppo di Taylor di f di grado 7 e il coefficiente di x^7 è 0, come pure quelli di x, x^3, x^5. Per cui la derivata settima di f in 0 è 0, come pure le derivate prima, terza, quinta.
Quanto varrà la derivata 173-esima in 0?

Soluzione 11.61 - Si ha che

$$\log(\cos^2 x) = \log(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \log\left(x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6)\right)$$

dove si è sviluppata la funzione $x \mapsto \operatorname{sen}^2 x$ al sesto ordine perché poi, sviluppando almeno al primo ordine la funzione logaritmo, si dovrà avere un resto che sia un o piccolo di x^6. Sviluppando il logaritmo al primo ordine si ha

$$
\begin{aligned}
\log(\cos^2 x) &= \left(x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6)\right) + o\left(x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6)\right) = \\
&= \left(x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6)\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2).
\end{aligned}
$$

Anche sviluppare al secondo ordine il logaritmo non basterà perché si otterrà un $o(x^4)$, si è costretti ad andare fino al terzo ordine:

$$\begin{aligned}
\log(\cos^2 x) &= \left(x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6)\right) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6)\right)^2 + \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6)\right)^3 + \\
&\quad +o\left(x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6)\right)^3 = \\
&= x^2 - \frac{2}{3!}\,x^4 + \frac{x^6}{180} + o(x^6) + \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(x^4 - \frac{4}{3!}\,x^6 + o(x^6)\right) + \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(x^6 + o(x^6)\right) + \\
&\quad + o(x^6) = \\
&= x^2 - \frac{5}{6}\,x^4 + \frac{121}{180}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

Quest'ultimo è lo sviluppo di Taylor al sesto ordine della funzione data, per cui

$$f^{(6)}(0) = 6!\,\frac{121}{180} = 484.$$

Soluzione 11.63 - La funzione può essere scritta come

$$f(x) = e^{x^2 \log(\cos^2 x)}$$

Possiamo considerare lo sviluppo in 0 fino al quarto ordine di $x \mapsto \log(\cos^2 x)$ (già trovato nel precedente esercizio) che è

$$x^2 - \frac{5}{6}\,x^4 + o(x^4),$$

dopodiché considerare

$$x^2 \log(\cos^2 x) = x^4 - \frac{5}{6}\,x^6 + o(x^6),$$

e infine sviluppare al primo ordine la funzione esponenziale in 0:

$$f(x) = e^{x^2 \log(\cos^2 x)} = 1 + x^4 - \frac{5}{6}\, x^6 + o(x^6).$$

La derivata sesta in 0 della funzione f sarà

$$-\frac{5}{6}\, 6! = -5\, 5! = -600.$$

Soluzione 11.64 - Sapppiamo che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{(n+1!} f^{(n+1)}(c) x^{n+1}$$

per un qualche c compreso fra 0 e x. Scegliamo $x = 1$ nella formula di sopra: si vogliono sommare fino ad un certo n (da trovare!)

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

in modo tale che l'errore sia minore di $1/100$, cioè

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{1}{100}.$$

Poiché c deve essere compreso tra 0 e 1 si avrà $e^c < e$. Si ha che

$$0 < \frac{e^c}{5!} < \frac{e}{120} < \frac{1}{40}$$

per cui non siamo sicuri che sommare i primi quattro termini sia sufficiente, ma sommando i primi cinque si ha che l'errore soddisfa

$$0 < \frac{e^c}{6!} < \frac{e}{720} < \frac{1}{100}.$$

Che l'errore sia minore di $1/100$ non significa necessariamente che la parte intera e le prime due cifre decimali esatte! Infatti si osservi che se l'errore fosse $0,009 < 0,01$ e si approssima, ad esempio, il numero $1,231$ con il numero $1,24$ si ha che

$$|1,24 - 1,231| < \frac{1}{100}$$

ma il numero scelto per approssimare $1,231$ non è esatto fino ad entrambe le prime due cifre decimali!
Anche avere un errore minore, per esempio un millesimo, non garantisce le prime due cifre decimali esatte: ad esempio se approssimiamo il numero

$$1,239 \qquad \text{con} \qquad 1,24$$

si ha che la differenza è $0,001 = 1/1000$, ma la seconda cifra decimale non è esatta.
Per essere certi di avere le prime due cifre decimali esatte si deve avere un errore minore di $1/1000$!
Per curiosità si osservi che nel nostro caso però si ha che andando a sommare i primi cinque termini ($e = 2,7182...$) si ottengono le prime due cifre esatte

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} = \frac{120+120+60+20+5+1}{120} = \frac{326}{120} = 2,7166666...$$

A proposito della vignetta ad inizio capitolo si osservi che sia il numero $2,71$ che il numero $2,72$ approssimano e a meno di $\frac{1}{100}$, ma la differenza $|e-2,71|$ è compresa tra 8 e 9 millesimi, la differenza $|e-2,72|$ è compresa tra 2 e 3 millesimi, e quindi si commette un errore minore scegliendo **una** sola cifra esatta dopo la virgola, anziché due.

Soluzione 11.68 - Poiché le quantità $2/n^3$ e $1/n$ tendono a zero al tendere di n a $+\infty$ si ha che

$$e^{\frac{2}{n^3}} = 1 + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{2}{n^3}\right) = 1 + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\log\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n = n\log\left(1+\frac{1}{4n}\right) = n\left(\frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{4} + n\,o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} + \frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Il risultato dovrebbe essere -3.

Soluzione 11.69 - -4

Soluzione 11.70 - Si osservi che la quantità

$$\frac{n!}{n^{7n}}$$

è infinitesima quando $n \to +\infty$, idem per $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{7n+3}}$. Si possono quindi sviluppare separatamente numeratore e denominatore. Si ottiene $-e^{-14}$.