Capitolo 15

Studio di funzioni integrali

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 10 DICEMBRE 2020

Si studi il grafico delle seguenti funzioni.

ESERCIZIO 15.1 - $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

ESERCIZIO 15.2 - $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,dt$

ESERCIZIO 15.3 - $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^4\,e^{-t^2}\,dt$

ESERCIZIO 15.4 - $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^x \frac{e^t}{(t+2)^{1/3}}\,dt$

ESERCIZIO 15.5 - $f(x) = \displaystyle\int_0^x \log(1+|t|)e^{-t^2}\,dt$

ESERCIZIO 15.6 - $f(x) = \displaystyle\int_0^x (1-e^{-t^2})\log|t|\,dt$

ESERCIZIO 15.7 - $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2+1}{t^3+1}\,dt$

Esercizio 15.8 - $f(x) = \int_0^x \operatorname{arctg}\left(\frac{t+2}{t^3+1}\right)\,dt$

****

Esercizio 15.9 - Si calcolino i seguenti limiti (suggerimento: si usi la regola di de l'Hôpital):

$$\lim_{x\to 0^+} x \int_x^1 \frac{t}{\log(\cos t)}\,dt$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \int_x^1 \frac{t}{\log(\cos t)}\,dt \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 15.10 - Si calcolino il seguente limite al variare di $\alpha, \beta > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \int_x^1 \frac{1}{\log((\cos t)^\beta)}\,dt \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 15.11 - Si dica se la seguente funzione

$$F(x) = \int_e^x \frac{t|\log|t||^\alpha}{t^3-1}dt$$

- ha un asintoto a $+\infty$;
- per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è continua in 1;
- per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è continua in 0;
- è monotona.

Esercizio 15.12 - Data $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$ si dimostri che

$$\lim_{c\to+\infty} \int_c^{c+1} f(x) = 0.$$

$(*)$ È vero che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Soluzioni

Soluzione 15.1 - La funzione è positiva per $x > 0$ e nagativa per $x < 0$ e vale 0 in 0. La sua derivata è

$$f'(x) = e^{-x^2}.$$

È quindi strettamente crescente e all'infinito ha due asintoti orizzontali. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Soluzione 15.9 - Si osservi che

$$\frac{t}{\log(\cos t)} = \frac{t}{\log(1+(\cos t - 1))} = \frac{t}{\cos t - 1}\,\frac{\cos t - 1}{\log(1+(\cos t - 1))}$$

e sviluppando $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ si ottiene che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\log(\cos t)} = -\infty,$$

quindi l'integrale è improprio. Inoltre, proprio perché

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t}{\log(\cos t)}}{-\frac{1}{t}} = 2,$$

si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{t}{\log(\cos t)}\,dt = -\infty.$$

A questo punto osservando che

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_x^1 \frac{t}{\log(\cos t)}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{t}{\log(\cos t)}\,dt}{\frac{1}{x}}$$

si può applicare la regola di de l'Hôpital e scrivere che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{t}{\log(\cos t)}\,dt}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\dfrac{x}{\log(\cos x)}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

In realtà tale limite è zero per ogni $\alpha > 0$.

Soluzione 15.10 - Si può procedere come in quello precedente, oppure osservare che la funzione integranda è asintotica a

$$\frac{1}{t^{2\beta}}.$$

Per $\beta \neq 1/2$ l'integrale è asintotico a

$$A - \frac{1}{x^{2\beta-1}}$$

per qualche costante A, da cui il prodotto è asintotico a $x^{\alpha+1-2\beta}$ da cui si conclude che il limite è 0 se $\alpha > 2\beta - 1$, è infinito se $0 < \alpha < 2\beta - 1$, è un numero se $\alpha = 2\beta - 1$.
Se $\beta = 1/2$ l'integrale non ha ordine di infinito e il limite è zero per ogni $\alpha > 0$.

Soluzione 15.11 - Si utilizzino gli esercizi del paragrafo precedente che studiano gli integrali $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{1/e} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\,dx$

Soluzione 15.12 - Detta F la funzione integrale

$$F(c) = \int_a^c f(x)\,dx,$$

se l'integrale improprio esiste si ha, per definizione, che

$$\lim_{c\to+\infty} F(c) \qquad \text{esiste, finito.}$$

Quindi

$$\lim_{c\to+\infty} F(c) = \ell, \qquad \lim_{c\to+\infty} F(c+1) = \ell$$

da cui

$$\lim_{c\to+\infty} [F(c+1) - F(c)] = \lim_{c\to+\infty} \int_c^{c+1} f(x)\,dx = 0.$$

In generale, però, non è detto che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Esempio: si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[n, n + \frac{1}{n^2}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora
$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \frac{1}{n^2}$$
e quindi
$$\int_0^{N+1} f(x)dx = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2}$$
e passando al limite si ottiene che l'integrale improprio converge. Però
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{non esiste!}$$