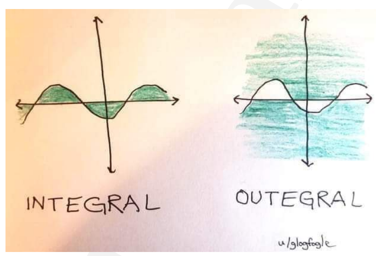
Capitolo 13

Integrali

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 1 FEBBRAIO 2023



Ricordiamo le principali primitive:

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \log|x| + c & \text{se } \alpha = -1 \\ \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \text{se } \alpha \neq -1 \end{cases}$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + c = -\arccos x + c$$

Si verifica facilmente che valgono anche le seguenti uguaglianze, dove u è una generica funzione derivabile

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \log|u(x)| + c$$

$$\int \big(u(x)\big)^\alpha u'(x) \, dx = \frac{\big(u(x)\big)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \tag{13.1}$$

$$\int e^{u(x)} u'(x) \, dx = e^{u(x)} + c$$

Qualche giochino:

Esercizio 13.1 - Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e si supponga di sapere che $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, dx = 1$, che $f(2x) = 3f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e che f non è la funzione nulla.
Si dimostri che $\displaystyle\int_1^2 f(x) \, dx = 5$.

Si trovino le primitive quando l'integrale è indefinito o si calcoli quando l'integrale è definito.

Alcuni integrali per parti:

Esercizio 13.2 - $\int x \cos x \, dx$

Esercizio 13.3 - $\int x^2 \cos x \, dx$

Esercizio 13.4 - $\int x^2 e^{ax} \, dx$

Esercizio 13.5 - $\int \log x \, dx$

Esercizio 13.6 - $\int x^n \log x \, dx, \quad n \in \mathbf{N}$

Esercizio 13.7 - $\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx$

Esercizio 13.8 - $\int_0^1 x \operatorname{arctg} 2x \, dx$

Esercizio 13.9 - $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$

Esercizio 13.10 - Si mostrino le seguenti uguaglianze

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^n x \, dx, \qquad n \in \mathbf{N}$$

$$\int e^x \operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{n^2+1} \big[e^x \operatorname{sen} nx - n e^x \cos nx \big], \qquad n \in \mathbf{N}$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx = \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+x^2)^n} \, dx + \frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

Alcuni integrali per sostituzione:

Esercizio 13.11 - $\int \frac{4x^3}{1+x^4} \, dx$

Esercizio 13.12 - $\int \frac{2x}{(1+x^2)^5} \, dx$

Esercizio 13.13 - $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

Esercizio 13.14 - $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$

Esercizio 13.15 - $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

Esercizio 13.16 - $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$

Esercizio 13.17 - $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

Esercizio 13.18 - $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+\log^2 x)}\,dx$

Esercizio 13.19 - $\displaystyle\int \sqrt{e^{2x}-1}\,dx$

Esercizio 13.20 - $\displaystyle\int \frac{e^{4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\log(1+e^{2\sqrt{x}})\,dx$

Esercizio 13.21 - $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$

Esercizio 13.22 - $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x+1}+x+2}\,dx$

Esercizio 13.23 - $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

Esercizio 13.24 - $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} x \operatorname{arcsen} 3x^2\,dx$

Alcuni integrali razionali

Esercizio 13.25 - $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-x+3}{x^2+3x-1}\,dx$

Esercizio 13.26 - $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-x+3}{x^2+3x-1}\,dx$

Esercizio 13.27 - $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+3}{x^2+3x-1}\,dx$

Esercizio 13.28 - $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$

Esercizio 13.29 - $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$

Esercizio 13.30 - $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2-1)}\,dx$

Esercizio 13.31 - $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2-1)}\,dx$

Esercizio 13.32 - $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx$

Esercizio 13.33 - $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)(x-2)}\,dx$

Esercizio 13.34 - $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-2x+3)^2}\,dx$

Esercizio 13.35 - $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-2x-1)^2}\,dx$

Esercizio 13.36 - $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

Esercizio 13.37 - $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$

Esercizio 13.38 - $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)^2+4}\,dx$

Esercizio 13.39 - Si fattorizzi il polinomio $p(x) = x^6+1$.

Esercizio 13.40 - Si fattorizzi il polinomio $p(x) = x^8-1$.

Alcuni integrali

Esercizio 13.41 - $\int x \log^2 x \, dx, \qquad \int \frac{\log^2 x}{x} \, dx$

Esercizio 13.42 - $\int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$

Esercizio 13.43 - $\int e^x \sqrt{1-e^{2x}} \, dx$

Esercizio 13.44 - $\int_{1/2}^{1} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

Esercizio 13.45 - $\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dx$

Esercizio 13.46 - $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dx$

Esercizio 13.47 - $\int \frac{1}{\cos x} \, dx$

Esercizio 13.48 - $\int \operatorname{tg} x \, dx$

Esercizio 13.49 - $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \, dx$

Esercizio 13.50 - $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \, dx$

Esercizio 13.51 - $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \, dx$

Esercizio 13.52 - $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x \cos x} \, dx$

Esercizio 13.53 - $\int \sqrt{8-4x^2-4x} \, dx$

Esercizio 13.54 - $\displaystyle\int \sqrt{10+4x^2+4x}\,dx$

Esercizio 13.55 - $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+4x-8}\,dx$

Esercizio 13.56 - $\displaystyle\int \frac{1}{4-5\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Esercizio 13.57 - $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}\,dx$

Esercizio 13.58 - $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{2x^2-2}}\,dx$

Esercizio 13.59 - $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$

Esercizio 13.60 - $\displaystyle\int \frac{1}{2x+\sqrt{4x^2+8}}\,dx$

Esercizio 13.61 - $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(|x|+3)(x+3)}\,dx$

Esercizio 13.62 - Esiste una primitiva di $\dfrac{x+2}{(|x|+3)(x+3)}$ che si annulla in 0? Se sì, la si trovi.

Esercizio 13.63 - $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$

Esercizio 13.64 - $\displaystyle\int \log \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

Esercizio 13.65 - $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} (1+\operatorname{tg}^2 x)\log(1+\operatorname{tg} x)\,dx$

Esercizio 13.66 - $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\,dx$

Esercizio 13.67 - $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x^3})}\,dx$

Esercizio 13.68 - $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$

Esercizio 13.69 - Si calcoli $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} (|t-1|+2)\,dt$

Esercizio 13.70 - $\displaystyle\int_{1}^{3} \sqrt{3+|x^2-4|}\,dx$

Esercizio 13.71 - $\displaystyle\int x^{-3/2}\log(1+x^{3/2})\,dx$

Esercizio 13.72 - Dopo aver fatto l'esercizio precedente si impostino i due seguenti:

$$\int x^{-5/2}\log(1+x^{3/2})\,dx, \qquad \int x^{-1/3}\log(1+x^{3/2})\,dx$$

Soluzioni

Soluzione 13.1 - È un esercizio sulla sotituzione. Calcoliamo $\displaystyle\int_0^1 f(2x)\,dx$ sostituendo y a $2x$.

$$\int_0^1 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(y)\,dy = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(y)\,dy + \int_1^2 f(y)\,dy\right].$$

Usando le due ipotesi si ha da una parte

$$\int_0^1 f(2x)\,dx = 3\int_0^1 f(x)\,dx = 3,$$

dall'altra

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(y)\,dy + \int_1^2 f(y)\,dy\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^2 f(y)\,dy$$

da cui si conclude.

Soluzione 13.11 - Facendo la sostituzione $t = 1 + x^4$ si ottiene la famiglia $\log(1 + x^4) + c$. Si osservi che questo integrale è uno dei tipi mostrati in (13.1).

Soluzione 13.12 - Facendo la sostituzione $t = 1 + x^2$ si ottiene la famiglia $-\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+x^2)^4} + c$. Si osservi che questo integrale è uno dei tipi mostrati in (13.1).

Soluzione 13.13 - Facendo la sostituzione $t = \operatorname{arctg} x$ si ottiene la famiglia $e^{\operatorname{arctg} x} + c$. Si osservi che questo integrale è uno dei tipi mostrati in (13.1).

Soluzione 13.15 - $\operatorname{arctg} e^2 - \operatorname{arctg} e$

Soluzione 13.37 - Scrivendo $x^4 + 1 = (x^2 + b\,x + c)(x^2 + \beta x + \gamma)$ e cercando b, c, β, γ si ottiene

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$$

per cui

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}.$$

Cercando A, B, C, D si integra come al solito.
Si osservi che cercando le soluzioni in $\mathbf{C}$ di x^4+1, che sono $e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4}$, che corrispondono a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

si può ricavare la fattorizzazione reale moltiplicando

$$\left(x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

dove si sono prese due radici coniugate. Infatti dal prodotto di sopra si ottiene

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = x^2 - \sqrt{2}\,x + 1.$$

Analogamente si ottiene l'altro polinomio.

Soluzione 13.39 - Utilizzando la formula $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ci si può accorgere che

$$x^6 + 1 = (x^2+1)(x^4 - x + 1),$$

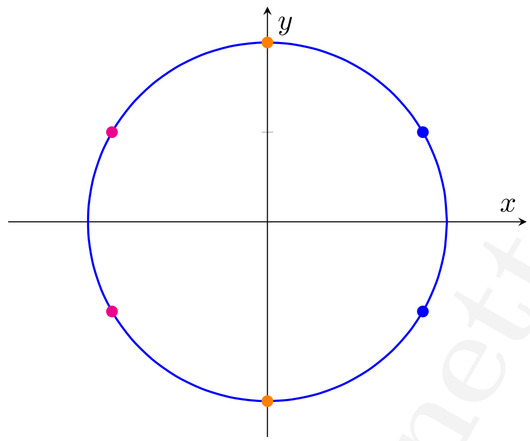
dopodiché, fattorizzando $x^4 - x + 1$m si ottengono i due polinomi di secondo grado $x^2 - \sqrt{3}x + 1$ e $x^2 + \sqrt{3}x + 1$, cioè

$$x^6 + 1 = (x^2+1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1).$$

Volendo procedere come nella soluzione dell'esercizio (13.37) dove si è passati dal campo complesso si osservi che le soluzioni di

$$x^6 + 1 = 0$$

in $\mathbf{C}$ sono le soluzioni evidenziate in figura



dove le due soluzioni marcate con lo stesso colore sono l'una la coniugata dell'altra. Precisamente si hanno

$$
\begin{aligned}
&e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, && e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2},\\
&e^{i\frac{\pi}{2}} = i, && e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i,\\
&e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, && e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Moltiplicando

$$(x - z)(x - \bar{z})$$

dove z è una delle sei soluzioni e $\bar{z}$ la sua coniugata si ottengono i tre polinomi ottenuti precedentemente.
Volendo integrare

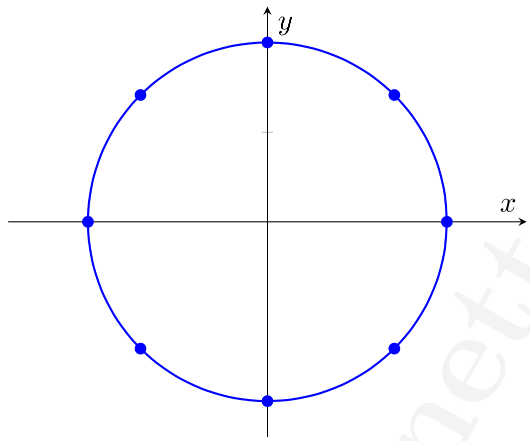
$$\int \frac{1}{x^6 + 1}\, dx$$

bisogna prima trovare A, B, C, D, E, F tali che

$$\frac{1}{x^6 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + \sqrt{3}x + 1}$$

e poi integrare singolarmente i tre termini.

Soluzione 13.40 - Usando il metodo delle radici complesse si ha che in questo caso le soluzioni sono quelle marcate in figura:



per cui si può procedere come nell'esercizio predente dopo aver scritto le otto radici, osservando che in questo caso due sono reali, per cui due fattori saranno di primo grado.
Diversamente si ha che

$$x^8-1 = (x^4-1)(x^4+1) = (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

e a questo punto si può fattorizzare x^4+1 come nell'esercizio 13.37.

Soluzione 13.48 - Scrivendo la tangente come $\operatorname{sen} x/\cos x$ si ottiene $-\log|\cos x| + c$.

Soluzione 13.62 - La funzione è continua, per cui ammette una primitiva (di classe C^1, almeno per $x > -3$). Vanno cercate tutte le primitive per $x > 0$, tutte per $x < 0$ e vanno raccordate in modo che in 0 valgano entrambe 0.

Soluzione 13.63 - Con le sostituzioni del caso ($t = \operatorname{tg} x/2$) si perviene ad integrare

$$\frac{A}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

con A, B, C, D che dovrebbero essere

$$A = \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-2}{2+3\sqrt{2}}, \quad B = \frac{\sqrt{2}+2}{2+3\sqrt{2}}, \quad D = -C = A + B.$$

Soluzione 13.68 - Si sostituisca t a $\sqrt[6]{x}$. Questa scelta è dettata dal fatto di far sparire entrambe le potenze non intere, per cui si sceglie il minimo comune multiplo tra 2 e 3 (poiché si hanno $x^{1/2}$ e $x^{1/3}$) e si impone $x = t^6$. Se la funzione integranda fosse

$$\frac{1}{\sqrt[10]{x}\,(1+\sqrt[6]{x})}$$

si potrebbe operare la sostituzione

$$t = \sqrt[30]{x}, \qquad x = t^{30}.$$

Soluzione 13.71 - Si osservi che il problema è che si ha una potenza di x non intera. Se si avesse x^3 anziché $x^{3/2}$ si potrebbe procedere per parti. In questo caso procedendo per parti si perviene comunque ad un integrale con potenze non intere. La cosa più conveniente è eliminare $x^{3/2}$ facendo la sostituzione

$$x^{1/2} = t$$

e non $x^{3/2} = t$. Si provi a farle entrambe per convincersi della cosa. Si arriverà ad un integrale che, fatto per parti, porterà ad un integrale razionale.

Soluzione 13.72 - Nello spirito del precedente si sostituisca, nel primo, t alla radice quadrata di x, cioè

$$x^{1/2} = t.$$

Per il secondo, si veda anche la soluzione dell'esercizio 13.68, si faccia la sostituzione

$$x^{1/6} = t.$$