Capitolo 16

Equazioni differenziali

Ultimo aggiornamento: 14 dicembre 2022

Equazioni lineari di primo grado

Ricordo: per le equazioni di primo grado del tipo $y' + ay = f$ (dove a e f sono noti) una soluzione è data da

$$y(t) = e^{-A(t)}\Big[\int e^{A(t)} f(t)dt + c\Big] \tag{16.1}$$

dove $A(t)$ è una primitiva di a e $c \in \mathbf{R}$; inoltre queste sono tutte e sole le soluzioni al variare di $c \in \mathbf{R}$.

Esercizio 16.1 - Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y' - y = -t$.

Esercizio 16.2 - Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $y' - \dfrac{y}{t} = t$.

Esercizio 16.3 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y \operatorname{tg} t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni del tipo $y' = f(x)g(y)$ con f e g continue. La funzione g deve essere diversa da zero (si veda l'Esercizio 16.5). Si divide per $g(y)$, si integra

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}dx = \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

dopodiché si inverte la primitiva di $1/g(y)$ in modo da esplicitare y.

Esercizio 16.4 - Integrare l'equazione $y' = (1+2x)e^{-y}$.

Esercizio 16.5 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{f'(x)}{y} \\ y(x_0) = y_0 \,. \end{cases}$$

Esercizio 16.6 - Integrare l'equazione $y' = x\,\dfrac{y+1}{y}$.

Equazioni lineari a coefficienti costanti di grado 1 e 2

Le equazioni di grado 1 sono del tipo

$$y' + ay = f \,.$$

quelle di grado 2 del tipo

$$y'' + ay' + by = f \,.$$

Prima si risolve l'equazione omogenea, cioè

$$y' + ay = 0 \qquad \text{o} \qquad y'' + ay' + by = 0 \,.$$

trovando le soluzioni del polinomio

$$\lambda + a = 0 \qquad \text{o} \qquad P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

poi si cerca una soluzione dell'equazione non omogenea che andrà sommata ad una generica soluzione dell'equazione omogenea.

Nel primo caso risolvere l'equazione omogenea è immediato, una generica soluzione sarà

$$y(t) = c\, e^{-at},$$

nel secondo caso si distingueranno i tre casi: il polinomio P ha due radici reali distinte, due radici reali coincidenti, due radici complesse coniugate, che daranno luogo a tre diversi spazi vettoriali di dimensione 2.

Esercizio 16.7 - Si integri l'equazione $y' + 3y = 0$.

Esercizio 16.8 - Si integri l'equazione $y'' - 3y + 2y = 0$.

Esercizio 16.9 - Si integri l'equazione $y'' + 4y + 4y = 0$.

Esercizio 16.10 - Si integri l'equazione $y'' + 6y' + 10y = 0$.

Nel caso l'equazione non sia omogenea e il dato (la forzante f in $ay'' + by' + cy = f$) è del tipo

$$p_n(x)e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,\beta x \qquad \text{oppure} \qquad p_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ e p_n è un polinomio di grado n una soluzione dell'equazione va cercata tra le funzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = x^m e^{\alpha x}(q_n(x)\cos\beta x + \tilde{q}_n \mathrm{sen}\,\beta x)$$

dove q_n e $\tilde{q}_n$ sono polinomi di grado n. Inoltre $m = 0$ tranne nei seguenti casi:

i) se il discriminante del polinomio caratteristico dell'equazione $ay'' + by' + cy = 0$ è positivo, si hanno cioè due radici reali distinte, $\beta = 0$ e α coincide con una delle due radici del polinomio allora si prende $m = 1$;

ii) se il discriminante del polinomio caratteristico dell'equazione $ay'' + by' + cy = 0$ è nullo, si hanno cioè due radici reali coincidenti, $\beta = 0$ e α coincide con la radice del polinomio allora si prende $m = 2$;

iii) se il discriminante del polinomio caratteristico dell'equazione $ay'' + by' + cy = 0$ è negativo, si hanno cioè due radici complesse coniugate ed esse sono $\alpha + i\beta$ ed $\alpha - i\beta$ (α, β della forzante) allora si prende $m = 1$.

Esempi

1 - Se l'equazione è $y''-4y'+3y = f$ (siamo nel caso i)) con $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 2x$, le soluzioni dell'omogenea $y'' - 4y' + 3y = 0$ sono

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^x.$$

Cerchiamo allora una soluzione dell'equazione tra le funzioni del tipo

$$(ax^2 + bx + c) \cos 2x + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \operatorname{sen} 2x$$

con $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ da trovarsi.

2 - Se l'equazione è $y'' - 4y' + 3y = f$ con $f(x) = x^2 e^{2x}$ cerchiamo una soluzione dell'equazione tra le funzioni del tipo

$$(ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

con a, b, c da trovarsi.

3 - Se l'equazione è $y'' - 4y' + 3y = f$ con $f(x) = x^2 e^{3x}$ cerchiamo una soluzione dell'equazione tra le funzioni del tipo

$$x(ax^2 + bx + c)e^{3x} = (ax^3 + bx^2 + cx)e^{3x}$$

con a, b, c da trovarsi.

4 - Se l'equazione è $y'' - 4y' + 4y = f$ (siamo nel caso ii)) con $f(x) = x^2 \operatorname{sen} 2x$, le soluzioni dell'omogenea $y'' - 4y' + 4y = 0$ sono

$$c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Cerchiamo allora una soluzione dell'equazione tra le funzioni del tipo

$$(ax^2 + bx + c) \cos 2x + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \operatorname{sen} 2x$$

con $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ da trovarsi.

5 - Se l'equazione è $y'' - 4y' + 4y = f$ con $f(x) = x^2 e^{2x}$ cerchiamo una soluzione dell'equazione tra le funzioni del tipo

$$x^2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^{2x}$$

con a, b, c da trovarsi.

6 - Se l'equazione è $y'' - 4y' + 5y = f$ (siamo nel caso iii)) con $f(x) = x^2 e^{2x} \operatorname{sen} 2x$, le soluzioni dell'omogenea $y'' - 4y' + 5y = 0$ sono

$$c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \operatorname{sen} x.$$

Cerchiamo allora una soluzione dell'equazione tra le funzioni del tipo

$$(ax^2 + bx + c)e^{2x} \cos 2x + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x} \text{sen}\, 2x$$

con $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ da trovarsi.

7 - Se l'equazione è $y'' - 4y' + 5y = f$ con $f(x) = x^2 e^{2x} \text{sen}\, 2x$ cerchiamo una soluzione dell'equazione tra le funzioni del tipo

$$x(ax^2 + bx + c)e^{2x} \cos 2x + x(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x} \text{sen}\, 2x$$

con $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ da trovarsi.

8 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^{-t} .$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea sono

$$c_1 \, e^t + c_2 \, e^{2t} , \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R} .$$

Per trovare una soluzione dell'equazione è sufficiente limitarci a quelle del tipo

$$v(t) = c_3 \, e^{-t} .$$

Derivando v si ottiene

$$v'(t) = -c_3 \, e^{-t} , \qquad\qquad v''(t) = c_3 \, e^{-t} ,$$

per cui inserendo questi dati nell'equazione si ottiene

$$c_3 \, e^{-t} + 3 \, c_3 \, e^{-t} + 2 \, c_3 \, e^{-t} = e^{-t}$$

da cui $c_3 = 1/6$. Le soluzioni dell'equazione data sono allora tutte e sole le funzioni

$$c_1 \, e^t + c_2 \, e^{2t} + \frac{1}{6} e^{-t} , \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R} .$$

9 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = 3 \, t \, e^{-t} .$$

Le soluzioni dell'omogenea sono quelle dell'esempio recedente. Cerchiamo una soluzione fra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3 \, e^{-t} + c_4 \, t \, e^{-t} = e^{-t}(c_3 + c_4 t) , \qquad\qquad c_3, c_4 \in \mathbf{R} .$$

Derivando v si ottiene

$$v'(t) = -c_3\, e^{-t} + c_4\, e^{-t} - c_4\, t\, e^{-t}\,,$$
$$v''(t) = c_3\, e^{-t} - c_4\, e^{-t} - c_4\, e^{-t} + c_4\, t\, e^{-t}\,.$$

Inserendo queste informazioni nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} c_3\, e^{-t} - c_4\, e^{-t} - c_4\, e^{-t} + c_4\, t\, e^{-t} + \\ -3(\, - c_3\, e^{-t} + c_4\, e^{-t} - c_4\, t\, e^{-t}) + \\ +2(c_3\, e^{-t} + c_4\, t\, e^{-t}) = 3\, t\, e^{-t} \end{aligned}$$

da cui $c_3 = 5/12$ e $c_4 = 1/2$. Tutte le soluzioni saranno

$$c_1\, e^t + c_2\, e^{2t} + \frac{5}{12}\, e^{-t} + \frac{1}{2}\, t\, e^{-t}\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

10 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = 3\, t^4 + t\,.$$

Cerchiamo una soluzione tra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, t^4 + c_4\, t^3 + c_5\, t^2 + c_6\, t + c_7.$$

Derivando si ha

$$v'(t) = 4\, c_3\, t^3 + 3\, c_4\, t^2 + 2\, c_5\, t + c_6\,,$$
$$v''(t) = 12\, c_3\, t^2 + 6\, c_4\, t + 2\, c_5\,.$$

Inserendo nell'equazione si ha

$$\begin{aligned} 12\, c_3\, t^2 + 6\, c_4\, t + 2\, c_5 - 3(4\, c_3\, t^3 + 3\, c_4\, t^2 + 2\, c_5\, t + c_6) + \\ +2(c_3\, t^4 + c_4\, t^3 + c_5\, t^2 + c_6\, t + c_7) = 3\, t^4 + t \end{aligned}$$

per cui si ha

$$\begin{cases} 2\, c_3 = 3 \\ -12\, c_3 + 2\, c_4 = 0 \\ 12\, c_3 - 9\, c_4 + 2\, c_5 = 0 \\ 6\, c_4 - 6\, c_5 + 2\, c_6 = 1 \\ 2\, c_5 - 3\, c_6 + 2\, c_7 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricavano

$$c_3 = \frac{3}{2}\,, \quad c_4 = 9\,, \quad c_5 = \frac{63}{2}\,, \quad c_6 = 68\,, \quad c_7 = \frac{141}{2}\,.$$

Tutte le soluzioni saranno

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} + \frac{3}{2}\,t^4 + 9\,t^3 + \frac{63}{2}\,t^2 + 68\,t + \frac{141}{2}\,, \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

11 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^t\,.$$

Poiché e^t risolve l'equazione omogenea andiamo a cercare una soluzione della non omogenea tra le funzioni del tipo

$$c_3\,t\,e^t$$

(e non $c_3\,e^t$!). Chiamando $v(t)$ la funzione $c_3\,t\,e^t$ e derivando si ottiene

$$v'(t) = c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t\,, \qquad\qquad v''(t) = 2\,c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t\,.$$

Inserendo queste informazioni nell'equazione si ha

$$2\,c_3\,e^t + c_3\,t\,e^t - 3\,c_3\,e^t - 3\,c_3\,t\,e^t + 2\,c_3\,t\,e^t = e^t$$

da cui $c_3 = -1$. Le soluzioni sono quindi

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} - t\,e^t\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

12 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$u'' - 3u' + 2u = e^{-t} + e^t\,.$$

In questo caso le soluzioni saranno date da tutte le soluzioni dell'equazione omogenea, da una che risolve l'equazione

$$u'' - 3u' + 2u = e^{-t}$$

e da una che risolve l'equazione

$$u'' - 3u' + 2u = e^t\,.$$

Dagli esempi precedenti si conclude che l'insieme delle soluzioni è dato da

$$c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t} - t\,e^t\,, \qquad\qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

13 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$y'' + y = \operatorname{sen} t\,.$$

Cominciamo con il risolvere l'equazione omogeneache ha come soluzioni

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,. \tag{16.2}$$

In questo caso il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 1$ ha come zeri i e $-i$, cioè $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ con $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Poiché la forzante risolve l'omogenea una soluzione dell'equazione va ricercata fra le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, t \cos t + c_4\, t \operatorname{sen} t.$$

Derivando

$$\begin{aligned} v'(t) = & \quad c_3 \cos t - c_3\, t \operatorname{sen} t + c_4 \operatorname{sen} t + c_4\, t \cos t\,, \\ v''(t) = & \quad -c_3 \operatorname{sen} t - c_3 \operatorname{sen} t - c_3\, t \cos t + \\ & \qquad\qquad + c_4 \cos t + c_4 \cos t - c_4\, t \operatorname{sen} t\,. \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} & c_3 \operatorname{sen} t - c_3 \operatorname{sen} t - c_3\, t \cos t + \\ & \qquad + c_4 \cos t + c_4 \cos t - c_4\, t \operatorname{sen} t + \\ & \qquad\qquad + c_3\, t \cos t + c_4\, t \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

da cui $c_3 = -1/2$ e $c_4 = 0$. Le soluzioni cercate sono

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t - \frac{1}{2}\, t \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

14 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$y'' + y = t\, e^t \operatorname{sen} 2t\,.$$

Dall'esempio precedente sappiamo che le soluzioni dell'omogenea sono

$$c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \qquad c_1, c_2 \in \mathbf{R}\,.$$

Le soluzioni di questa equazione sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$v(t) = c_3\, e^t \operatorname{sen} 2t + c_4\, e^t \cos 2t + c_5\, t\, e^t \operatorname{sen} 2t + c_6\, t\, e^t \cos 2t$$

con $c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbf{R}$. Derivando e inserendo nell'equazione si trovano i valori di c_3, c_4, c_5, c_6.

Il moto armonico

Si risolvano i seguenti esercizi.

Esercizio 16.11 - Si trovino le soluzioni di $y'' + y = t$.

Esercizio 16.12 - Si trovino le soluzioni di $y'' - 16y = x^2 + 1$.

Esercizio 16.13 - Si trovino le soluzioni di $y'' - 5y' + 6y = xe^x$.

Esercizio 16.14 - Si risolva $y'' + y = \operatorname{sen} t$.

Esercizio 16.15 - Si integri l'equazione $y' = (x + 2y - 1)^2$.

Esercizio 16.16 - Determinare, se ne esistono, le soluzioni limitate all'equazione

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{2+x} \qquad x > 0\,.$$

Esercizio 16.17 - Data l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 8y = 2xe^{-x}$$

i) determinarne la soluzione generale,

ii) caratterizzare le soluzioni y tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$,

iii) caratterizzare le soluzioni tali che $\int_0^{+\infty} |y(x)|dx < +\infty$.

Esercizio 16.18 - Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\operatorname{sen} y^2}{y} \\ y(0) = \sqrt{\pi} \end{cases}$$

Esercizio 16.19 - Posta $f(x) = \operatorname{sen} x$ per $x \in (0, \pi)$, $f(x) = 0$ altrimenti determinare la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y = f & \qquad x > 0 \\ y'(0) = 3/2 & \\ y(0) = 0\,. & \end{cases}$$

Esercizio 16.20 - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1+2x}{\cos y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 16.21 - Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2}{x}\, y(x) + \frac{x+1}{x}.$$

Esercizio 16.22 - Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y(x)e^{2x} - (1+e^{2x})y'(x) = 0.$$

Esercizio 16.23 - Si risolva la seguente equazione differenziale

$$e^{x+y(x)}y'(x) + x = 0.$$

Esercizio 16.24 - Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'' + y = x \operatorname{sen} x.$$

Esercizio 16.25 - Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 16.26 - Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' - \frac{1}{t}\, y' = t + 1$$

Soluzioni

Soluzione 16.1 - Usando l'espressione (16.1) calcoliamo prima una primitiva di $a(t) = 1$, $A(t) = t$, poi

$$y(t) = e^t \Big[- \int e^{-t} t dt + c \Big] = ce^t + t + 1 \, .$$

Si osservi che i grafici non si intersecano (disegnare i grafici di $ce^t + t + 1$ al variare di c); infatti considerando $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ si ha che $c_1 e^t + t + 1 = c_2 e^t + t + 1$ per qualche t solo se $c_1 = c_2$. Ciò è dovuto al fatto che l'equazione, fissato un dato valore di y in un punto t_0, ha soluzione unica.

Soluzione 16.2 - Usando l'espressione (16.1) calcoliamo prima una primitiva di $a(t) = -1/t$, che è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $A(t) = -\log|t|$, infine

$$y(t) = e^{\log|t|} \Big[\int e^{-\log|t|} t dt + c \Big] = |t| \; [\int t/|t| dt + c] = |t|(|t| + c)$$

definite in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$ (si veda la Figura 16.1). Poiché a non è continua in 0 l'equazione non si può risolvere con un dato iniziale

$$y(0) = x_0 \, .$$

Si osservi però che, poiché il limite per $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$ delle soluzioni

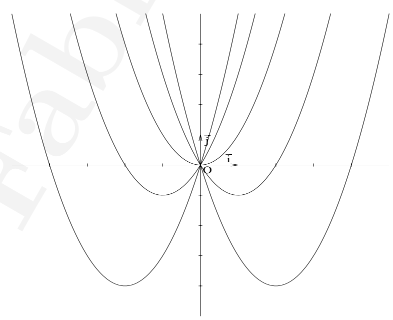

Figura 16.1:

è zero, nel caso in cui x_0 sia 0, si possono cercare soluzioni C^1 su tutto $\mathbf{R}$ scegliendo

$$y_c(t) = \begin{cases} |t|(|t| - c) = t^2 + ct & t \in (-\infty, 0) \\ |t|(|t| + c) = t^2 + ct & t \in (0, \infty) \, . \end{cases}$$

Si osservi che tutte queste sono soluzioni del problema con dato iniziale nullo in $t = 0$, quindi poiché a non è continua in zero il problema di Cauchy non ha soluzione con dato iniziale definito per $t = 0$ oppure se ha soluzione questa può non essere unica (in questo caso infinite).

Soluzione 16.3 - Questo problema ha una sola soluzione. Valutiamo prima una primitiva di $a(t) = \operatorname{tg} t$:

$$\int \operatorname{tg} t dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} dt = -\log|\cos t| .$$

Si osservi che $\log|\cos t|$ è definita per $\cos t \neq 0$ ed è quindi continua negli intervalli $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ e così via (in tutti gli intervalli del tipo $((2k+1)\pi/2, (2k+3)\pi/2)$ con $k \in \mathbf{Z}$). Poiché siamo interessati a trovare una soluzione in un intorno di $t = 0$ consideriamo come primitiva di $\operatorname{tg} t$ la funzione $-\log \cos t$ perché intorno a $t = 0$ il coseno è positivo.
Ora valutiamo

$$\int e^{-\log \cos t} \frac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t} dt = \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t (1 + \operatorname{sen} t)} dt .$$

Ponendo $z = \operatorname{sen} t$ l'integrale diviene

$$\int \frac{z}{(1 - z^2)(1 + z)} dz .$$

Scrivendo

$$\frac{z}{(1 - z^2)(1 + z)} = \frac{z}{(1 - z)(1 + z)^2} = \frac{a}{1 + z} + \frac{b}{(1 + z)^2} + \frac{c}{1 - z}$$

si ottiene

$$\frac{z}{(1 - z^2)(1 + z)} = \frac{1}{4(1 + z)} - \frac{1}{2(1 + z)^2} + \frac{1}{4(1 - z)}$$

per cui integrando si ottiene

$$\frac{1}{4} \log|1 + z| + \frac{1}{4} \log|1 - z| + \frac{1}{2(1 + z)}$$

per cui

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t (1 + \operatorname{sen} t)} dt = \frac{1}{4} \log \frac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \operatorname{sen} t} + c$$

e quindi infine

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\log\cos t}\Big[\frac{1}{4}\log\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\operatorname{sen} t}+c\Big]= \\ &= \frac{1}{4}\cos t\log\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}+\frac{1}{2}\frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}+c\cos t\,. \end{aligned}$$

Per trovare *la* soluzione valuto $y(0)$ e impongo che valga $1/2$:

$$y(0)=\frac{1}{2}+c=\frac{1}{2}$$

da cui $c=0$. La soluzione è

$$y(t)=\frac{1}{4}\cos t\log\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}+\frac{1}{2}\frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\,.$$

Si calcoli il limite per $t\to\frac{\pi}{2}^-$ e $t\to-\frac{\pi}{2}^+$ di y e della sua derivata.

Soluzione 16.4 - Dividendo per e^{-y} si ottiene

$$e^y y' = 1+2x\,.$$

Integrando

$$\int e^y dy=\int(1+2x)dx$$

da cui

$$e^y=x+x^2+c$$

per cui le soluzioni sono $y(x)=\log(x+x^2+c)$.

Soluzione 16.5 - Denotiamo con $g(y)$ la funzione $\frac{1}{y}$ che è continua in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Questo significa che il problema può essere risolto se $y\neq 0$, cioè per un dato iniziale $y(x_0)\neq 0$.
Si ha semplicemente $yy'=f'(x)$ da cui

$$y^2(x)=2\,f(x)+c\,.$$

Se $y_0\neq 0$ ricavando c da $y_0^2=2\,f(x_0)+c$ si ottiene che la soluzione è

$$y(x)=\begin{cases} \sqrt{2f(x)+y_0^2-2f(x_0)} & \text{se } y_0>0 \\ -\sqrt{2f(x)+y_0^2-2f(x_0)} & \text{se } y_0<0 \end{cases}$$

Si osservi che la funzione $h(y) = y^2$ non è invertibile nel punto $y = 0$ (e g non è definita in $y = 0$). Questo fa sì che non si possa ricavare $y(x)$ se il dato iniziale è $y(x_0) = 0$, perlomeno in maniera unica.
A titolo di esempio, vediamo un problema con il dato iniziale $y_0 = 0$ il quale potrebbe comunque avere soluzione anche se $g(y)$ non è continua in 0, ma si perde l'unicità. Si consideri

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x^3}{y} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione ha come soluzioni x^2 e $-x^2$ definite in $(-\infty)$ e in $(0, +\infty)$. Poiché queste soluzioni in 0 valgono 0 e il limite in 0 delle loro derivate è zero si possono prolungare le soluzioni anche in zero scegliendo una soluzione nell'intervallo $(-\infty)$ raccordandola con un'altra soluzione definita nell'intervallo $(0, +\infty)$. Si avrebbe che le seguenti quattro funzioni soddisfano il precedente problema di Cauchy

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ x^2 & x < 0\,. \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geqslant 0 \\ x^2 & x < 0\,. \end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x < 0\,. \end{cases} \qquad y_4(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x < 0\,. \end{cases}$$

Soluzione 16.6 - Dividendo per $(y + 1)/y$ (cosa che si può fare solo se $y \neq -1$ visto che questa funzione si annulla per $y = -1$) e integrando si ha

$$\int \frac{y}{y+1} dy = \int x dx \qquad \text{se } y \neq -1$$

che fornisce l'espressione

$$y(x) - \log|1 + y(x)| = \frac{x^2}{2} + c\,.$$

Questo se $y \neq -1$. Se $y(x)$ fosse -1 per un qualche valore di x si ha che l'equazione $y' = x\,\frac{y+1}{y}$ in quel punto diventa

$$y' = 0\,.$$

Quindi $y(x) \equiv -1$ è soluzione dell'equazione (che non viene trovata con il metodo precedente poiché si è diviso $\frac{y+1}{y}$).
Si osservi inoltre che la funzione $g(t) = t - \log|1+t|$ non è invertibile in un intorno di $y = 0$.
Quindi se si avesse un problema di Cauchy con $y_0 \neq -1$, $y_0 \neq 0$

$$\begin{cases} y' = x\,\dfrac{y+1}{y} \\[2ex] y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

la soluzione sarebbe data, in forma implicita, da $y(x) - \log|1+y(x)| = \frac{x^2}{2} + c$ con la condizione

$$y_0 - \log|1+y_0| = \frac{x_0^2}{2} + c$$

dalla quale si ricava il valore di c. Formalmente (perché in questo caso non è semplice invertire $g(t) = t - \log|1+t|$) la soluzione sarebbe

$$y(x) = g^{-1}\Big(\frac{x^2}{2} + c\Big)\,,$$

dove g è invertibile, ma ci si accontenta della forma implicita. Se $y_0 = -1$ la soluzione è data da

$$y(x) = -1\,.$$

Soluzione 16.7 - Le soluzioni sono $y(t) = ce^{-3t}$.

Soluzione 16.8 - Le soluzioni sono $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t$.

Soluzione 16.9 - Il polinomio $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ ha come soluzione -2 (con molteplicità due). Le soluzioni sono $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$.

Soluzione 16.10 - Il polinomio $\lambda^2 + 6\lambda + 10$ ha soluzioni complesse per cui la soluzione generale ha la forma $y(t) = c_1e^{-3t}\cos 2t + c_2e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$.

Soluzione 16.14 - Il polinomio $\lambda^2 + 1$ ha soluzioni complesse i e $-i$, per cui due soluzioni linearmente indipendenti sono

$$y_1(t) = \cos t \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = \operatorname{sen} t.$$

Allora una soluzione generale dell'equazione andrà cercata tra le funzioni del tipo

$$u(t) = A\,t\,\mathrm{sen}\,t + B\,t\cos t$$

con A, B da determinarsi. Valutando le derivate si ha

$$u'(t) = A\,\mathrm{sen}\,t + A\,t\,\cos t + B\,\cos t - B\,t\,\mathrm{sen}\,t$$

$$u''(t) = A\,\cos t + A\,\cos t - A\,t\,\mathrm{sen}\,t - B\,\mathrm{sen}\,t - B\,\mathrm{sen}\,t - B\,t\,\cos t.$$

Inserendo u nell'equazione si ottiene

$$2\,A\,\cos t - A\,t\,\mathrm{sen}\,t - 2\,B\,\mathrm{sen}\,t - B\,t\,\cos t + A\,t\,\mathrm{sen}\,t + B\,t\cos t = \mathrm{sen}\,t,$$

cioè

$$2\,A\,\cos t - 2\,B\,\mathrm{sen}\,t = \mathrm{sen}\,t$$

da cui $A = 0$ e $B = -1/2$.

Soluzione 16.26 - L'equazione può essere vista come un'equazione di primo grado in y'. Chiamando infatti $u := y'$ si risolve

$$u' - \frac{1}{t}u = t + 1$$

trovando tutte le soluzioni, che sono

$$(0, +\infty) \ni t \mapsto t^2 + t\log t + a\,t, \qquad (-\infty, 0) \ni t \mapsto t^2 + t\log(-t) + b\,t,$$

al variare di $a, b \in \mathbf{R}$. Dopodiché le si integrano direttamente per trovare y. Si osservi che y dipenderà da **due** parametri: a e c oppure b e c, dove c è una costante che proviene dall'integrazione di u.