Capitolo 1

Esercizi sui numeri razionali e reali

Ultimo aggiornamento: 20 ottobre 2024

L'insieme dei numeri razionali **Q** e l'insieme dei numeri reali **R** soddisfano i seguenti assiomi. Questi assiomi non caratterizzano completamente **R** che, per distinguersi da **Q**, ha bisogno di un altro assioma, detto *di completezza* o di Dedekind.
Se non diversamente detto gli assiomi A1, A2, M1, M2, DM, O1, O2, O3, OA, OM valgono per ogni scelta di $x, y, z \in \mathbf{R}$:

A1 $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa dell'addizione)

A2 $x + y = y + x$ (proprietà commutativa dell'addizione)

A3 esiste un unico elemento, neutro rispetto all'addizione, che denotiamo con 0, tale che $x + 0 = 0 + x = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$
(esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione)

A4 per ogni $x \in \mathbf{R}$ esiste un unico opposto rispetto all'addizione $y \in \mathbf{R}$ tale che $x + y = 0$ ($y = -x$)

M1 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa della moltiplicazione)

M2 $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa della moltiplicazione)

M3 esiste un unico elemento, neutro rispetto alla moltiplicazione, che denotiamo con 1, tale che $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbf{R}$
(esistenza dell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione)

M4 per ogni $x \in \mathbf{R}^*$ esiste un unico opposto rispetto alla moltiplicazione (inverso) $y \in \mathbf{R}$ tale che $x \cdot y = 1$ ($y = x^{-1}$)

DM $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
(proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione)

Assiomi che riguardano una relazione d'ordine: (struttura di ordinamento totale)

O1 per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha $x \leqslant y$ oppure $y \leqslant x$ (dicotomia)

O2 se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ allora $x \leqslant z$ (proprietà transitiva)

O3 se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica)

O4 per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta $x \leqslant x$ (proprietà riflessiva)

OA se $x \leqslant y$ allora $x + z \leqslant y + z$

OM se $z \geqslant 0$ e $x \leqslant y$ allora $x \cdot z \leqslant y \cdot z$

Per definire i numeri reali manca l'assioma di Dedekind, o di completezza.

Esercizio 1.1 - Dato $k \in \mathbf{N}$ si dimostri che $\sqrt{k}$ è un numero naturale oppure non è razionale.
Si dimostri che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ non è razionale.
Si dimostri che che $\sqrt{k} + \sqrt{m}$ è un numero naturale oppure non è razionale $(k, m \in \mathbf{N})$.

Esercizio 1.2 - Dato $k \in \mathbf{N}$, $k \geqslant 2$, il numero $\sqrt[k]{2}$ è o non è razionale?

Esercizio 1.3 - Dato $x \in \mathbf{R}$ e supposto che $x^7, x^{12} \in \mathbf{Q}$, si dimostri che $x \in \mathbf{Q}$.

Esercizio 1.4 - Si dimostrino le seguenti affermazioni seguendo l'ordine proposto a partire dagli assiomi enunciati sopra e anche utilizzando eventualmente anche i precedenti per mostrare i successivi.
Se non diversamente specificato le affermazioni valgono per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}$.

(a) se per un qualche $x \in \mathbf{R}$ si ha $x + y = x + z$ allora $y = z$

(b) se per un qualche $x \in \mathbf{R}^*$ si ha $x \cdot y = x \cdot z$ allora $y = z$

(c) per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $x \cdot 0 = 0$

(d) se $x \cdot y = 0$ allora $x = 0$ o $y = 0$

(e) se $x \geqslant 0$ allora $-x \leqslant 0$

(f) se $x \leqslant y$ e $z < 0$ allora $x \cdot z \geqslant y \cdot z$

(g) $x \leqslant y$ è equivalente a $y - x \geqslant 0$

(h) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

(i) $-(-x) = x$

(j) $x \cdot y = (-x) \cdot (-y)$

(k) se $x > 0$ allora $x^{-1} > 0$

(l) per ogni $x \in \mathbf{R}$ $x^2 \geqslant 0$

(m) per ogni $x, y > 0$ si ha $x < y$ se e solo se $x^2 < y^2$

Esercizio 1.5 - Si trovino estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo dei seguenti insiemi:

1. $A = \mathbf{N}$

2. $A = (a, b]$

3. $A = (1, 2] \cup \{3\}$

4. $A = [1, 2) \cup \{3\}$

5. $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,|\, x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$

6. $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = \dfrac{12\,n}{n^2+1},\ n \in \mathbf{N} \right\}$

7. $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = \dfrac{64\,n}{n^2+16},\ n \in \mathbf{N} \right\}$

8. $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = \dfrac{2}{k} - \dfrac{1}{n},\ k, n \in \mathbf{N}^* \right\}$

9. $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,|\, x = \dfrac{n-3}{n^2},\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$

10. $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,|\, x = \dfrac{3n-1}{n},\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$

11. $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,|\, x = (-1)^n \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}^* \right\}$

12. $A = \left\{ x \in \mathbf{R} \,|\, x = \dfrac{|5-n|}{3+n},\ n \in \mathbf{N} \right\}$

13. $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$

14. $A = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right]$

15. $A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$, $B = [0, \sqrt{2}) \cap \mathbf{Q}$

Esercizio 1.6 - Si mostri che $\sup(a, b) \cap \mathbf{Q} = \sup(a, b)$ per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$.
È vero che $\sup A \cap \mathbf{Q} = \sup A$ qualunque sia $A \subseteq \mathbf{R}$?

Esercizio 1.7 - Si trovino estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo dei seguenti insiemi:

1. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = |t|, t^2 + t < 2\}$
2. $A = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = \dfrac{t+1}{t-2}, t > 2\right\}$
3. $A = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = \dfrac{1}{t^2 + bt + c}, t \in \mathbf{R}, t^2 + bt + c \neq 0\right\}$ al variare dei parametri $b, c \in \mathbf{R}$

Esercizio 1.8 - Si trovino i punti di accumulazione per gli insiemi dell'Esercizio 1.5.

Soluzioni

Soluzione 1.1 - Primo quesito: se $k = n^2$ per qualche $n \in \mathbf{N}$ abbiamo finito. Diversamente si supponga che non esista alcun n per il quale $k = n^2$. Sia

$$k = r_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot r_h^{\alpha_h}$$

la fattorizzazione in primi di k. Poiché k non è un quadrato perfetto almeno uno degli esponenti $\alpha_1, \ldots \alpha_h$ dovrà essere dispari: sia per semplicità α_1. Si supponga ora, per assurdo, che $\sqrt{k}$ sia razionale. Allora esistono $p, q \in \mathbf{N}^*$, coprimi far loro, tali che

$$\sqrt{k} = \frac{p}{q} \qquad \Longrightarrow \qquad k\, q^2 = p^2.$$

Considerando le fattorizzazioni di p e q si ha

$$p = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{\beta_l}, \qquad q = q_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot q_m^{\gamma_m} \qquad \text{con } p_i \neq q_j \quad \text{per ogni } i, j.$$

da cui

$$p_1^{2\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{2\beta_l} = r_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot r_h^{\alpha_h} \cdot q_1^{2\gamma_1} \cdot \ldots \cdot q_m^{2\gamma_m}.$$

Affinché queste due espressioni siano uguali è necessario che i fattori primi a destra e sinistra e i corrispettivi esponenti siano gli stessi, e in particolare tutti i fattori r_i devono essere presenti nella fattorizzazione a sinistra. Ma a sinistra tutti i fattori primi hanno esponenti pari, mentre a destra almeno r_1 è elevato ad una potenza dispari. E questo non può essere e, se lo fosse, si dedurrebbe che r_1 sta nella fattorizzazione di p, ma anche in quella di q, e anche questo è impossibile.

Vedere che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ non è razionale è più semplice, utilizzando il punto appena visto.
Se $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ fosse razionale si avrebbero, al solito, due interi positivi p, q tali che

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q} \qquad \overset{\text{elevando al quadrato}}{\Longrightarrow} \qquad \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2\, q^2},$$

ma ciò non è possibile in quanto $\sqrt{6}$ non è razionale per quanto visto prima.

Terzo quesito: se sia k che m sono quadrati allora $\sqrt{k} + \sqrt{m}$ è un intero, altrimenti si procede come per la soluzione del secondo quesito arrivando a dire che se $\sqrt{k} + \sqrt{m}$ è razionale si deve necessariamente avere che, per opportuni $p, q \in \mathbf{N}^*$, vale

$$\sqrt{k} + \sqrt{m} = \frac{p}{q} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{k\, m} = \frac{p^2 - (k+m)q^2}{2\, q^2}.$$

Allora se $k \neq m$ si conclude utilizzando il primo punto. Nel caso in cui $k = m$ da questa implicazione non si deduce nulla!
In questo caso però la cosa si semplifica perché

$$\sqrt{k} + \sqrt{m} = 2\sqrt{k} \qquad \text{che non è razionale.}$$

Soluzione 1.3 - Suggerimento: si provi prima a mostrare che se $x^2, x^3 \in \mathbf{Q}$ allora $x \in \mathbf{Q}$.

Soluzione 1.4 - Ne mostriamo qualcuno a titolo di esempio.

(a) si supponga che per un certo $x \in \mathbf{R}$ si abbia $x + y = x + z$. Allora

$$\begin{aligned} y &\overset{A3}{=} y + 0 \overset{A4}{=} y + (x + (-x)) \overset{A1}{=} (y + x) + (-x) = \\ &\overset{A2}{=} (x + y) + (-x) \overset{ipotesi}{=} (x + z) + (-x) \overset{A2}{=} (z + x) + (-x) = \\ &\overset{A1}{=} z + (x + (-x)) \overset{A4}{=} z \end{aligned}$$

(b) simile ad (a)

(c) $x + x \cdot 0 \overset{M3}{=} x \cdot 1 + x \cdot 0 \overset{DM}{=} x \cdot (1 + 0) \overset{A3}{=} x \cdot 1 \overset{M3}{=} x \overset{A3}{=} x + 0$
cioè

$$x + x \cdot 0 = x \cdot 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}.$$

Utilizzando ora il punto (a) si conclude che $x = 0$

(d) se $x = 0$ abbiamo finito; diversamente mostriamo che $y = 0$. Si osservi che in questo caso esiste x^{-1}.

$$y \overset{M3}{=} y \cdot 1 \overset{M4}{=} y \cdot (x \cdot x^{-1}) \overset{M1}{=} (y \cdot x) \cdot x^{-1} \overset{ipotesi}{=} 0 \cdot x^{-1} \overset{(c)}{=} 0$$

(e) basta sommare $-x$ ad entrambi

(i) Per ogni $y \in \mathbf{R}$ si ha che $-y$ è l'opposto di y. Di conseguenza scegliendo $y = x$ si ha che $-x$ è l'opposto di x e

$$x - x = 0,$$

scegliendo $y = -x$ si ha che $-(-x)$ è l'opposto di $-x$ e

$$-x - (-x) = 0.$$

Di conseguenza dalla prima uguaglianza e da $A2$ si ha che l'opposto di $-x$ è x, dalla seconda che l'opposto di $-x$ è $-(-x)$. Per l'unicità dell'opposto si conclude.

(j) $(-x)\cdot(-y) \overset{(h)}{=} -\,(x\cdot(-y)) \overset{M2}{=} -\,((-y)\cdot x) \overset{(h)}{=} -\,(\,-\,(y\cdot x)) \overset{(i)}{=} y\cdot x$

(k) segue da (f) e OM

Soluzione 1.5 -

1. $\mathbf{N}$ non ammette maggioranti, ha minimo 0.
3. $\inf A = 1$ (non è minimo), $\sup A = 3$ ed è anche il massimo
5. $\inf A = 0$ (non è minimo), $\sup A = 1$ (è massimo)
8. $\inf A = -1$ (non è minimo), $\sup A = 2$ (non è massimo)
13. si ha che $A = (0,1)$
14. si ha che $A = [0,1]$
15. si ha che $A = B$ e $\inf A = 0$ (è anche minimo), $\sup A = \sqrt{2}$ (non è massimo)

Soluzione 1.6 - In generale è falso: per esempio se A è l'insieme degli irrazionali $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Soluzione 1.7 -

1. Dapprima si consideri la disequazione $t^2 + t < 2$, che è soddisfatta per $t \in (-2,1)$. Poi si considerano i valori in questo intervallo presi in valore assoluto. Si ottiene l'intervallo $[0,2)$. Si conclude facilmente che l'insieme ha come minimo 0 e come estremo superiore (ma non massimo) 2.

2. Considerando
$$\frac{t+1}{t-2} = \frac{t-2+3}{t-2} = 1 + \frac{3}{t-2}$$
si ha, poiché $t > 2$, che
$$\frac{t+1}{t-2} > 1$$
per cui l'insieme A è limitato inferiormente. Verifichiamo che 1 è l'estremo inferiore. Preso $\epsilon > 0$ va trovato $\bar{t} \in \mathbf{R}$, $\bar{t} > 2$, tale che
$$\frac{\bar{t}+1}{\bar{t}-2} < 1 + \epsilon.$$
Risolvendo tale disuguaglianza ci si rende conto che è sufficiente scegliere
$$\bar{t} > \frac{3+2\epsilon}{\epsilon}.$$
Vediamo ora che A non è superiormente limitato, il che ci farà concludere che $\sup A = +\infty$.
Si fissi $M > 0$ e vediamo se esiste $\bar{t} \in \mathbf{R}$, $\bar{t} > 2$, tale che
$$\frac{\bar{t}+1}{\bar{t}-2} > M.$$
Anche qui, risolvendo la disuguaglianza, ci si rende conto che è sufficiente scegliere
$$\bar{t} < \frac{2M+1}{M-1} = \frac{2(M-1)+3}{M-1} = 2 + \frac{3}{M-1}$$
e ciò è sempre possibile scegliendo $\bar{t} > 2$.

3. Vanno distinti diversi casi, di cui scriviamo solo le soluzioni, lasciando i dettagli per esercizio. Definiamo per comodità $p(t) = t^2 + bt + c$: nel caso in cui il polinomio p non abbia radici reali si ha che $p(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$ e
$$B = \left\{ x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = t^2 + bt + c, t \in \mathbf{R} \right\}$$
è illimitato superiormente, per cui $\inf A = 0$. Invece B è limitato inferiormente e, anzi, ha minimo, per cui A ha massimo. Per trovare il minimo di B si osservi che si può scrivere
$$p(t) = \left(t + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} \geqslant c - \frac{b^2}{4}$$

e $c-\frac{b^2}{4}$ è proprio il minimo assunto per il valore $t=-b/2$. Allora

$$\frac{1}{c-\frac{b^2}{4}}=\frac{4}{4c-b^2}$$

è il massimo di A.

Nel caso in cui p avesse una sola radice reale si ha che $\inf A=0$ e $\sup A=+\infty$.

Se p ha due radici reali si ha che $\inf A=-\infty$ e $\sup A=+\infty$.

Soluzione 1.8 -

1. $\emptyset$
2. $[a,b]$
5. $\{0\}$
8. $\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x=\frac{2}{k},\ k\in\mathbf{N}^*\right\}\cup\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x=-\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}^*\right\}\cup\{0\}$
12. $\{1\}$

13. e 14. $[0,1]$

15. $[0,\sqrt{2}]$ sia per A che per B