# Capitolo 2

# Esercizi con l'induzione

Ultimo aggiornamento: 23 ottobre 2023



Esercizio 2.1 - Si dica se i seguenti predicati sono induttivi o definitivamente induttivi:

1. $n^3 \leqslant n!$
2. $\cos n \leqslant 1/2$
3. $n \geqslant n + 5$
4. $2^n \leqslant n!$
5. $5^n \leqslant n!$
6. $2^n \geqslant 2^{n+1}$

Si provino i seguenti esercizi usando il principio di induzione.

Esercizio 2.2 - Si provi che $n^2 + n$ è pari per ogni $n \in \mathbf{N}$.
Si provi, qualunque sia $k \in \mathbf{Z}$ numero dispari, che $n^2 + kn$ è pari per ogni $n \in \mathbf{N}$.
Per quali valori di $h \in \mathbf{Z}$ la quantità $hn^2 + kn$ è pari per ogni $n \in \mathbf{N}$?

Esercizio 2.3 - Si provi che $n^3+n$ è pari per ogni $n \in \mathbf{N}$.
(Suggerimento: si usi il risultato dell'esercizio precedente).

Esercizio 2.4 - Si provi che $n^k+n$ è pari per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $k \in \mathbf{N}^*$.

Esercizio 2.5 - Si provi che $2^{n-1} \leqslant n!$ per $n \geqslant 1$.

Esercizio 2.6 - Si provi che $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ .

Esercizio 2.7 - Dato $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$, si provi che

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Se $x = 1$?

Esercizio 2.8 - Si mostri che $2^n \geqslant n^2+1$ è vera definitivamente e si dica da quale $n$ in poi è vera.

Esercizio 2.9 - Supponendo che la somma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ sia un polinomio di terzo grado in $n$ si trovi tale polinomio e si mostri l'uguaglianza per induzione.

Esercizio 2.10 - Supponendo che la somma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ sia un polinomio di quarto grado in $n$ si trovi tale polinomio e si mostri l'uguaglianza per induzione.
Il polinomio è

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}.$$

Si osservi che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ .

Esercizio 2.11 - (**Divisibilità**) Si mostri che
$10^n-1$ è divisibile per 9
$n^3+5n$ è divisibile per 6
$n^3+2n$ è divisibile per 3
$n^3+3n^2+5n$ è divisibile per 3
$3^{2n+1}+2^{n+2}$ è divisibile per 7

Esercizio 2.12 - Supponendo che la somma $\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$ sia un polinomio di grado $m$ in $n$ si mostri che il coefficiente del termine di grado massimo è $1/m$.

Esercizio 2.13 - Siano $x_1, \ldots x_n$ numeri positivi. Si dimostri che

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + \ldots + x_n \geqslant n$$

e l'uguaglianza vale se e solo se i numeri $x_i$ sono tutti uguali tra loro (tutti uguali ad 1).

Esercizio 2.14 - Si congetturi quale sia il prodotto $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ e poi si dimostri la formula.
(Suggerimento: si proceda scrivendo prima tale prodotto per $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e poi congetturando la scrittura di tale prodotto per un generico $n$).

Esercizio 2.15 - Si congetturi quale sia il prodotto $\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ e poi si dimostri la formula.

Esercizio 2.16 - Si congetturi quale sia il prodotto $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ e poi si dimostri la formula.

Esercizio 2.17 - Si mostri che $1 + \sum_{k=1}^{n} k\, k! = (n+1)!$

Esercizio 2.18 - Si mostri che il numero $11^k - 6$ è divisibile per 5.

Esercizio 2.19 - Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione tale che

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$ (una tale funzione è detta *convessa*). Si dimostri che, comunque presi $n$ numeri $\lambda_j$ tali che

$$\lambda_j \geqslant 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$$

vale

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \qquad \text{per ogni scelta di } x_1, \ldots x_n \in \mathbf{R}.$$

## Soluzioni

**Soluzione 2.1 -**

1. Questa affermazione è vera (definitivamente) e anche induttiva, per $n \geqslant 6$. Infatti, supposta vera $n^3 \leqslant n!$ si ha che (scartando il valore $n = 0$)
$$\frac{(n+1)^3}{n^3}\, n^3 = (n+1)^3 \leqslant (n+1)! = (n+1)\, n!$$
Questa è verificata, usando l'ipotesi induttiva, sicuramente se
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{(n+1)^3}{n^3} \leqslant n + 1.$$
Quest'ultima disuguaglianza è verificata per ogni $n \geqslant 4$.
Nonostante ciò la disuguaglianza è vera per $n \geqslant 6$. Volendo quindi mostrarle per induzione si troverebbe che per $n = 0$ (o per $n = 1$) la disuguaglianza è vera, ma non si. riuscirebbe a mostrare il passo induttivo che è falso per $n = 1, 2, 3$. Bisognerebbe quindi verificarla per $n = 6$ e poi mostrare l'induzione a partire da $n = 6$.

2. non è induttivo (è sufficiente trovare un naturale $n$ per il quale $\cos n \leqslant 1/2$, ma $\cos(n+1) > 1/2$; ad esempio $n = 5$)

3. è induttivo

4. è induttivo per ogni $n \geqslant 1$ (anche se per $n = 1$ è falso)

5. è induttivo per ogni $n \geqslant 4$, è vero solo per $n \geqslant 10$

6. è induttivo anche se è falso

**Soluzione 2.2 -** Il primo punto è facilmente verificabile per induzione. Si osservi però che l'affermazione può essere verificata semplicemente anche senza l'induzione. Infatti se $n$ è pari si ha $n = 2k$ per un qualche $k \in \mathbf{N}$, per cui $n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$. Se invece $n$ è dispari anche $n^2$ è dispari ($n$ ammette una fattorizzazione unica in numeri primi $p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, $p_j$ primi tutti diversi da 2, e quindi $n^2 = p_1^2 \cdot \ldots \cdot p_k^2$ è dispari) e quindi la somma di due numeri dispari è pari.
Si provi analogamente che $n^3 + n^2 + n$ è pari per $n$ pari, dispari per $n$ dispari.

La risposta all'ultimo quesito è: per $h$ dispari.

**Soluzione 2.4** - Si possono seguire due strade: la prima è fissare $k \in \mathbf{N}^*$ (si osservi che per $k = 0$ la cosa non è vera) e verificare per induzione che $n^k + n$ sia pari usando lo sviluppo del binomio di Newton per scrivere $(n+1)^k$ quando si vuole mostrare il passo induttivo.
La seconda, più semplice, è quella di procedere con una doppia induzione, sia su $n$ che su $k$. Si fissi $k = 1$: l'affermazione da mostrare è "$n + n$ è pari per ogni $n \in \mathbf{N}$". La cosa è ovvia, visto che $n + n = 2n$. Quindi per $k = 1$ l'affermazione è vera. Oppure partiamo da $k = 2$ e, dopo averlo svolto, si usa l'Esercizio 2.2.
Procediamo ora con l'induzione su $k$: supposto vero che $n^k + n$ sia pari per ogni $n \in \mathbf{N}$ per un certo $k \geqslant 1$ fissato cerchiamo di mostrare che $n^{k+1} + n$ è pari per ogni $n \in \mathbf{N}$. Scriviamo

$$n^{k+1} + n = n(n^k + 1) = n(n^k + n + (n - 1)).$$

Si osservi ora che la quantità $n^{k+1} + n$ è scritta come prodotto di due fattori: se uno dei due è pari il prodotto è pari. Quindi se $n$ è pari $n^{k+1} + n$ è pari; se $n$ è dispari si ha, usando l'ipotesi induttiva, che $n^k + n$ è pari per ogni $n \in \mathbf{N}$ e che, essendo $n$ dispari, $n - 1$ è pari. Di conseguenza $n^k + n + (n - 1)$ risulta pari e tale risulta anche il prodotto $n(n^k + n + (n - 1)) = n^{k+1} + n$.

**Soluzione 2.6** - Per $n = 1$ l'uguaglianza è vera. Si supponga ora l'uguaglianza vera per un certo $n$ e la si mostri per $n + 1$. Calcoliamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

**Soluzione 2.7** - Per $n = 0$ è vera perché a sinistra abbiamo

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1$$

e a destra

$$\frac{1 - x^1}{1 - x} = 1.$$

Supponiamo ora la disuguaglianza vera per un certo $n \in \mathbf{N}$ e mostriamola per $n+1$. Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{(1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.\end{aligned}$$

**Soluzione 2.8** - Per $n=5$ è vera e per i naturali precedenti a 5 no. Supponiamo $2^n \geqslant n^2+1$ per un qualche $n \geqslant 5$ e vediamo se è vera $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2+1$. Calcoliamo

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2(n^2+1) = 2n^2+2.$$

Ora la domanda è: è vero che $2n^2+2 \geqslant (n+1)^2+1$? Questo è equivalente a

$$2n^2+2 \geqslant n^2+2n+2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 \geqslant 2n.$$

Avremo concluso se mostriamo che $n^2 \geqslant 2n$ per ogni $n \geqslant 5$. Mostriamo anche questa ultima disuguaglianza per induzione. Per $n=5$ è vera, supponiamo sia vera per $n$ e valutiamo $(n+1)^2$:

$$(n+1)^2 = n^2 + (2n+1) \geqslant 2n + (2n+1) \geqslant 2n+2$$

perché $2n+1 \geqslant 2$ (sicuramente per $n \geqslant 5$). Di conseguenza

$$(n+1)^2 \geqslant 2n+2 = 2(n+1).$$

**Soluzione 2.9** - Vediamo prima un modo di procedere che ci fornirà direttamente la somma dei quadrati dei primi $n$ interi positivi.
Si può procedere, come visto nelle dispense di teoria, scrivendo dapprima

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = \\ &\quad = ((n+1)^3 - \cancel{n^3}) + (\cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3}) + \ldots + \\ &\qquad + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{2^3} - 1) = (n+1)^3 - 1,\end{aligned}$$

poi

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n} [3k^2+3k+1] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

A questo punto, supponendo di conoscere già che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, si conclude.

Un polinomio di grado 3 in $n$ è $an^3 + bn^2 + cn + d$. Se deve valere

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = an^3 + bn^2 + cn + d \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N} \tag{2.1}$$

si deve avere che da una parte

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = an^3 + bn^2 + cn + d + (n+1)^2,$$

dall'altra

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d.$$

Uguagliando questi due termini si ottiene

$$an^3 + (b+1)n^2 + (c+2)n + d + 1 = an^3 + (3a+b)n^2 + (3a+2b+c)n + a + b + c + d$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} b + 1 = 3a + b \\ c + 2 = 3a + 2b + c \\ d + 1 = a + b + c + d \end{cases}$$

al quale possiamo aggiungere l'equazione ricavata da (2.1) prendendo $n = 1$

$$1 = a + b + c + d.$$

Risolvendo quindi

$$\begin{cases} b + 1 = 3a + b \\ c + 2 = 3a + 2b + c \\ d + 1 = a + b + c + d \\ a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

si ottengono

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6}, \quad d = 0.$$

Allora l'affermazione che si vuole mostrare è

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Per $n = 1$ l'affermazione è vera. Proviamo a mostrare che è vera per $n + 1$ ammesso che lo sia per un certo $n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\Big[n(2n+1) + 6(n+1)\Big]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)\Big[(n+2)(2n+3)\Big]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)\Big(2(n+1)+1\Big)}{6}\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione.

**Soluzione 2.10** - Procedendo in maniera simile all'esercizio precedente si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

**Soluzione 2.11** - Vediamo l'ultimo, a titolo di esempio. Per $n = 0$ l'uguaglianza è chiaramente vera, infatti $3 + 2^2 = 7$. Si supponga ora che l'uguaglianza sia vera per tutti i naturali fino ad un certo $n$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = \\ = 7 \cdot 3^{2n+1} + 2\,(3^{2n+1} + 2^{n+2})\end{aligned}$$

da cui si conclude usando l'ipotesi induttiva poiché $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ è un multiplo di 7.

**Soluzione 2.12** - Questo esercizio non riguarda l'induzione, ma si osservi come la tesi dell'esercizio è vera per $m = 2, 3, 4$ come già visto negli esercizi 2.6, 2.9, 2.10.

Si supponga che

$$\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_1 n + a_0.$$

Utilizzando l'idea degli esercizi precedenti si avrà

$$a_m(n+1)^m + a_{m-1}(n+1)^{m-1} + \ldots + a_1(n+1) + a_0 = \sum_{j=0}^{m} a_j n^j + (n+1)^{m-1} \tag{2.2}$$

Utilizzando lo sviluppo del binomio di Newton a sinistra di (2.2) si ha che i termini che coinvolgono $n^{m-1}$ sono solo i primi due, che sono

$$a_m \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} n^h + a_{m-1} \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} n^h$$

e fra questi addendi il termine di grado $m-1$ è

$$a_m\, m\, n^{m-1} + a_{m-1} n^{m-1}.$$

A destra di (2.2) il termine di grado $m-1$ è

$$a_{m-1} n^{m-1} + n^{m-1}.$$

Uguagliando i due termini si ottiene la tesi.

**Soluzione 2.13** - Si mostri prima che se $x_1 x_2 = 1$ allora $x_1 + x_2 \geqslant 2$. Per far ciò si usi il seguente fatto:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \qquad \text{e} \quad a^2 + b^2 = 2ab \quad \text{se e solo se } a = b.$$

Dimostrazione: $(a-b)^2 \geqslant 0$.

**Soluzione 2.14** - Calcolando i primi prodotti

$$\begin{gathered} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ \vdots \end{gathered}$$

si può congetturare che il prodotto sarà dato da

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}\,.$$

Proviamo a verificarlo per induzione: per $n = 2$ è vero (l'abbiamo già verificato). Supponendo sia vero per ogni intero compreso fra 2 ed $n$ mostriamolo per $n+1$:

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n}=\ \frac{1}{n+1}\,.$$

**Soluzione 2.16 -** Si osservi che

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k\qquad k}$$

per cui

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{3}{2\ 2}\,\frac{2\ 4}{3\ 3}\,\frac{3\ 5}{4\ 4}\cdots\frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)(n-2)}\ \frac{(n-2)\ n}{(n-1)(n-1)}\ \frac{(n-1)(n+1)}{n\qquad n}$$

e semplificando si ottiene

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{3}{2\ 2} & \frac{2\ 4}{3\ 3} & \frac{3\ 5}{4\ 4} & \cdots & \frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)(n-2)} & \frac{(n-2)\ \cancel{n}}{(n-1)\cancel{(n-1)}} & \frac{\cancel{(n-1)}(n+1)}{\cancel{n}\qquad n} \\
\frac{3}{2\ 2} & \frac{2\ 4}{3\ 3} & \frac{3\ 5}{4\ 4} & \cdots & \frac{(n-3)\cancel{(n-1)}}{(n-2)\cancel{(n-2)}} & \frac{\cancel{(n-2)}}{\cancel{(n-1)}} & \frac{(n+1)}{n} \\
\frac{3}{2\ 2} & \frac{2\ 4}{3\ 3} & \frac{3\ 5}{4\ 4} & \cdots & \frac{\cancel{(n-3)}}{\cancel{(n-2)}} & 1 & \frac{(n+1)}{n} \\
 & & & & \vdots & & \\
\frac{\cancel{3}}{2\ \cancel{2}} & \frac{\cancel{2}\ \cancel{4}}{\cancel{3}\ \cancel{3}} & \frac{\cancel{3}\ \cancel{5}}{\cancel{4}\ \cancel{4}} & \cdots & 1 & 1 & \frac{(n+1)}{n}
\end{array}$$

da cui

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2\,n}.$$

La verifica per induzione è immediata.

**Soluzione 2.18 -** Per $k=1$ la cosa è vera. Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo $k$ (o che sia vera per tutti gli interi da 1 a $k$) e mostriamola per $k+1$. Che la tesi sia vera per $k$ significa che esiste $m\in\mathbf{N}$ tale che

$$11^k-6=5m\qquad(\iff\ 11^k=5m+6).$$

Allora possiamo scrivere

$$11^{k+1} - 6 = 11 \cdot 11^k - 6 = 11(5m + 6) - 6 = 60 + 55m.$$

Poiché sia 60 che $55m$ sono divisibile per 5 si conclude.

**Soluzione 2.19 -** Usiamo anche qui l'induzione. Partiamo da $n = 2$: la tesi è vera per ipotesi in quanto scelto $\lambda_1 \in [0, 1]$ necessariamente $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Si supponga ora la cosa vera per un certo $n \in \mathbf{N}$ e proviamo a verificarla per $n + 1$. Si ha (fissati $\lambda_j$ e $x_j$ opportuni)

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right) = f\left(\lambda_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j x_j\right) = f\left(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j\right). \tag{2.3}$$

Ora, poiché $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$, si osservi che

$$\sum_{j=2}^{n+1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} = \frac{1}{1 - \lambda_1} \sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j = \frac{1}{1 - \lambda_1}(1 - \lambda_1) = 1.$$

Ora applichiamo due volte l'ipotesi induttiva a (2.3): con la prima applicata a due addendi otteniamo

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) f\left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j\right),$$

con la seconda applicata ad $n$ addendi otteniamo

$$(1 - \lambda_1) f\left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} x_j\right) \leqslant (1 - \lambda_1) \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_1} f(x_j) = \sum_{j=2}^{n+1} \lambda_j f(x_j).$$

Mettendo assieme le due ultime disuguaglianze si conclude.