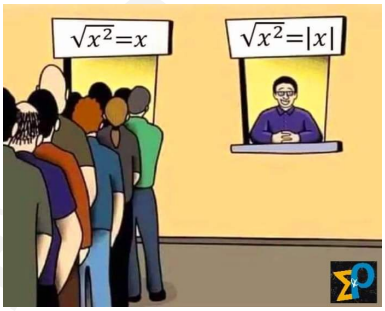
Capitolo 3

Preliminari sulle funzioni Parte prima

© Enrico Paronetto

Ultimo aggiornamento: 1° febbraio 2023



Esercizio 3.1 - Si dica quale delle seguenti espressioni hanno senso e quali non ce l'hanno:

a) 1^0	b) 0^1,	c) 0^0	d) 1^1	e) $2^{\sqrt{2}}$
f) $(-2)^{\sqrt{2}}$	g) $(\log_2 3)^\pi$,	h) $(\log_{\frac{1}{2}} 3)^\pi$	i) $(\operatorname{sen} 2)^\pi$	l) $(\operatorname{sen} 4)^\pi$

Esercizio 3.2 - Si risolvano le seguenti equazioni:

a) $e^x = \frac{1}{2}$	b) $\log x = -3$,	c) $e^{2x} - e^x - 2 = 0$,
d) $\log(x^2+2) = 1$	e) $\log^2 x + 2\log x - 3 = 0$,	f) $e^{2x^2-3x+1} = 0$.

ESERCIZIO 3.3 - Si calcolino (si scrivano in maniera più semplice) le seguenti espressioni

$$a)\ x^{\log_x 8} \qquad b)\ \log_2(x^{3\log_x 2}) \qquad c)\ \log_{x^2+1}(x^4+2x^2+1)$$

ESERCIZIO 3.4 - Si risolvano

$$a)\ \log_x(x+6)=2 \qquad b)\ \log_x(\tfrac{x^2}{2}+2)<2$$

ESERCIZIO 3.5 - Si dica se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive. Se il dominio non è indicato si trovi il dominio naturale. Se non sono biiettive si restringa opportunamente il codominio e si modifichi opportunamente il dominio in modo da renderle tali. Dopo aver fatto ciò, se possibile, si determini e si scriva esplicitamente la funzione inversa.

1. $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbf{R}$, $f(x)=1-\operatorname{tg}x$
2. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{se } x<0,\\ x^2 & \text{se } x\geqslant 0.\end{cases}$$
3. $f:\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{sen}x$
4. $f:\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\operatorname{sen}x$
5. $f(x)=7-\log_2(x+1)$
6. $f(x)=\log_2(-x)$
7. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{se } x<0,\\ 1+\operatorname{tg}x & \text{se } x\geqslant 0.\end{cases}$$
8. $f(x)=\operatorname{sen}x^2$ con $x\in[0,\sqrt{\pi/2}]$
9. $f(x)=\operatorname{sen}x^2$ con $x\in[-\sqrt{\pi/2},0]$
10. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+2}}$. Si dica anche qual è il dominio naturale di questa funzione.
11. $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}}$. Si dica anche qual è il dominio naturale di questa funzione.

© Fabio Paronuzzo

Esercizio 3.6 - Si dica, senza trovarle esplicitamente, se le seguenti funzioni sono invertibili (motivando la risposta):

1. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^{x^3+x}$
3. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x$
4. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^{x^2}$
5. $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log x + \sqrt{x}$

Esercizio 3.7 - Si risolvano le seguenti disequazioni, cioè si trovino gli insiemi soluzioni:

1. $\dfrac{x-1}{x-2} < \dfrac{x-1}{x}$
2. $x + \sqrt{x^2 - 10x + 9} \geqslant \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 10x + 9}}$
3. $\left|\dfrac{x-3}{x+2}\right| \leqslant 3$
4. $|x + 2| < 1 + |x - 1|$
5. $\sqrt{4x^2 + 3x - 1} > 2x - 3$
6. $x^2 + 3|x| - 2 \geqslant 0$
7. $2^{|x-1|} < 2^x$
8. $\log_a(x-1)^2 > \log_a(x-2)^2$ con $a > 0$
9. $8^{x+1} \geqslant 2^{x^2}$
10. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{(1-12x)x} < 3$
11. $\left|x + \frac{7}{5}\right| < -2$
12. $\left|2x^2 - 1\right| < 3x - 2x^2 - 5$
13. $\left|\operatorname{arctg}(\log x) + \cos x^{12} - \sqrt{|2^x - 3|}\right| < -2$
14. $x|x| - 6x + 5 \geqslant 0$

© Fabio Paronetto

Esercizio 3.8 - Si determini il massimo insieme (cioè il dominio massimale) nel quale è possibile definire le seguenti espressioni analitiche:

1. $f(x) = \log(\operatorname{sen} 2^x)$
2. $f(x) = \sqrt{\log(\operatorname{sen} 2^x)}$
3. $f(x) = \operatorname{arcsen}(2^x)$
4. $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^{-1})$
5. $f(x) = \sqrt{\operatorname{arcsen}(x^{-1})}$
6. $f(x) = \log\Big((x-1)\operatorname{arctg}(x-1)\Big)$

Esercizio 3.9 - Si determini il massimo insieme nel quale è possibile definire le seguenti espressioni analitiche e se ne disegni il grafico:

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$
2. $f(x) = \log_2(2^x)$
3. $f(x) = 2^{\log_2 x}$
4. $f(x) = \log_2(x^2)$
5. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)$
6. $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$
7. $f(x) = \cos(\arccos x)$
8. $f(x) = \arccos(\cos x)$
9. $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$
10. $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

Esercizio 3.10 - Si dica quali sono le funzioni che composte tra loro forniscono le seguenti funzioni.

1. $f(x) = \sqrt{x^6 - 1}$
2. $f(x) = \log \operatorname{arctg}(x^2 - 1)$
3. $f(x) = 7 + 2^{\operatorname{arctg}(x^5+3)}$

© Fabio Paronetto

Esercizio 3.11 - Si determini il massimo insieme nel quale è possibile definire le seguenti funzioni e se ne disegni il grafico in maniera qualitativa, semplicemente manipolando grafici di funzioni noti.

1. $x \mapsto x^2 - x$
2. $x \mapsto x^2 + x$
3. $x \mapsto x^3 - x$
4. $x \mapsto x + \sqrt{|x-1|}$
5. $x \mapsto x + \operatorname{arctg}(x+2)$
6. $x \mapsto x + 2^{-|x-1|}$
7. $x \mapsto x + \operatorname{sen} x$
8. $x \mapsto x \operatorname{arctg}(x+1)$
9. $x \mapsto x\, 2^{-|x-1|}$
10. $x \mapsto x \sqrt{|x-1|}$
11. $x \mapsto x \operatorname{sen} x$
12. $x \mapsto x^2 \operatorname{sen} x$

Esercizio 3.12 - Partendo dal grafico di una funzione nota f si disegnino i seguenti grafici della funzione g in maniera qualitativa (senza eseguire alcun calcolo): ad esempio, si disegni anche qualche grafico arbitrario senza che questo sia necessariamente il grafico di un'espressione analitica nota; oppure si considerino, ad esempio, $f(x) = x^2$, $f(x) = x(x-1)$, $f(x) = x^3 - x$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \operatorname{sen} x$:

1. $g(x) = f(x+c)$ per qualche valore di $c \in \mathbf{R}$ (ad esempio, $c = 1$ e $c = -1$)
2. $g(x) = f(x) + c$ per qualche valore di $c \in \mathbf{R}$ (ad esempio, $c = 1$, $c = 2$, $c = -1$, $c = -2$) per qualche valore di $c \in \mathbf{R}$ (ad esempio, $c = 1$, $c = 2$, $c = -1$, $c = -2$)
3. $g(x) = -f(x)$
4. $g(x) = f(-x)$

© Fabio Paronetto

5. $g(x) = |f(x)|$
6. $g(x) = f(|x|)$
7. $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
8. $g(x) = f(e^x)$
9. $g(x) = e^{f(x)}$
10. $g(x) = \log(f(x))$
11. $g(x) = \log|f(x)|$
12. $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$
13. $g(x) = \operatorname{sen} f(x)$
14. $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$
15. $g(x) = f(\operatorname{arctg} x)$
16. $g(x) = \log f(x)$
17. $g(x) = \log|f(x)|$
18. $g(x) = f(\log x)$

Esercizio 3.13 - Si disegnino (senza fare alcun calcolo) i grafici delle seguenti funzioni:

1. $g(x) = x^2 - 2x + 3$
2. $g(x) = x^2 + 4x - 3$
3. $g(x) = x^2 - 6x + 9$
4. $g(x) = -x^2 - 10x - 4$
5. $g(x) = \Big||x-1| - 2\Big|$
6. $g(x) = \Big|\Big||x-1| - 2\Big| - 3\Big|$
7. $g(x) = |(x-2)(x-3)|$

© Fabio Paronetto

8. $g(x) = |(x-1)(x-2)(x-3)|$

Esercizio 3.14 - Si risponda alle seguenti domande:

1. le due funzioni $x \mapsto (\sqrt{x})^2$ e $x \mapsto \sqrt{x^2}$ sono la stessa funzione? Hanno lo stesso dominio massimale?
2. le due funzioni $x \mapsto (\sqrt[3]{x})^3$ e $x \mapsto \sqrt[3]{x^3}$ sono la stessa funzione? Hanno lo stesso dominio massimale?
3. le due funzioni $x \mapsto \log x^2$ e $x \mapsto 2\log x$ sono la stessa funzione? Hanno lo stesso dominio massimale?
4. le due funzioni $x \mapsto \log_2 2^x$ e $x \mapsto 2^{\log_2 x}$ sono la stessa funzione? Hanno lo stesso dominio massimale?
5. le due funzioni $x \mapsto \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ e $x \mapsto |x-5|$ sono la stessa funzione? Hanno lo stesso dominio massimale?

Qualche giochino:

Esercizio 3.15 - Esiste una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbf{R}$ valga $f(x) - f(1-x) = x$?

Esercizio 3.16 - Esiste una funzione $f : A \to \mathbf{R}$, A un qualche sottoinsieme di $\mathbf{R}$, tale che per ogni $x \in A$ valga

$$(f(x) - 1)\frac{1}{x} = f(x)\,?$$

© Fabio Paronetto

Soluzioni

Soluzione 3.1 - Non hanno senso la f), la h), la l).
Per quanto riguarda l'espressione c), questa di per sè non ha senso. Può averlo in alcuni contesti e può assumere sia il valore 1 che il valore 0, ma sempre come opportuna estensione di una qualche funzione (ad esempio: le due funzioni $\mathbf{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^0$ e $(0, +\infty) \ni x \mapsto 0^x$ possono estese entrambe con continuità, la prima a $\mathbf{R}$, la seconda a $[0, +\infty)$, cioè può esser assegnato loro un valore in $\{0\}$ in modo che tale estensione risulti *continua* (concetto che vedremo più avanti). Nel primo caso l'estensione avrà valore 1, nel secondo 0.
Fuori da questi contesti l'espressione c) non ha significato.

Soluzione 3.2 - f) non ha soluzione.

Soluzione 3.3 - a) 8.

Soluzione 3.4 - a) ha come soluzioni $x = -2$ e $x = 3$ (l'insieme $\{-2, 3\}$).

Soluzione 3.5 -

1. Poiché la funzione $x \mapsto \operatorname{tg} x$ con $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è invertibile lo sono anche $x \mapsto -\operatorname{tg} x$ e $x \mapsto 1 - \operatorname{tg} x$. L'immagine di f è $\mathbf{R}$, per cui l'inversa sarà definita in $\mathbf{R}$ e a valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ponendo $y = 1 - \operatorname{tg} x$ si può cercare di esplicitare x in termini di y:

$$y = 1 - \operatorname{tg} x \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{arctg}(1 - y)$$

   per cui $f^{-1} : \mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg}(1 - y)$.

4. Vogliamo esprimere l'inversa di tale funzione (che esiste perché la funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x$ è iniettiva se ristretta all'intervallo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$) tramite la funzione arcsen che però assume valori nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e non nell'intervallo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Si osservi che

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\Big((x - \pi) + \pi\Big)$$

© Fabio Paronetto

e inoltre

$$x \in \Big[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big] \qquad \Longrightarrow \qquad (x-\pi) \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big].$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\Big((x-\pi)+\pi\Big) = \\ &= \operatorname{sen}(x-\pi)\cos\pi + \cos(x-\pi)\operatorname{sen}\pi = \\ &= -\operatorname{sen}(x-\pi). \end{aligned}$$

Allora per $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ (e quindi $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) si ha

$$\operatorname{arcsen}\Big(\operatorname{sen}(x-\pi)\Big) = x - \pi,$$

poiché la funzione $x \mapsto \operatorname{arcsen} x$ è dispari (per $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$)

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}\Big(-\operatorname{sen}(x-\pi)\Big) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \pi - x$$

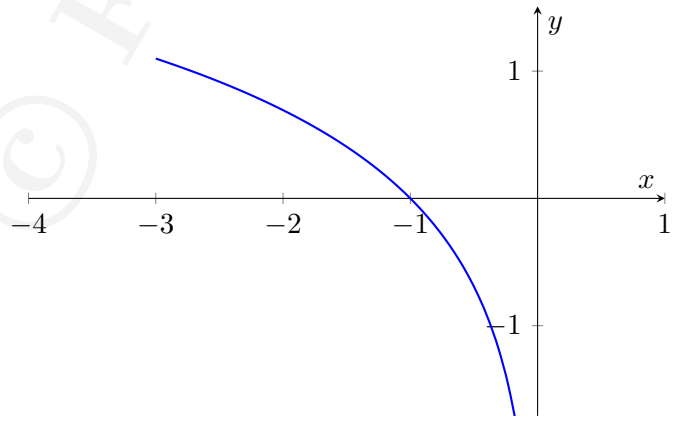
da cui infine

$$\pi - \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x$$

per cui la funzione inversa è

$$f^{-1} : \Big[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\Big] \to [-1, 1], \qquad f^{-1}(y) = \pi - \operatorname{arcsen} y.$$

6. La funzione è definita per x negativo e il suo grafico è disegnato nella figura che segue:



© Fabio Paronetto

Poiché $2^{\log_2(-x)} = -x$ si ricava che

$$-2^{\log_2(-x)} = x$$

da cui infine

$$f^{-1}(y) = -2^y.$$

Equivalentemente si può porre

$$y = \log_2(-x) \qquad \Longrightarrow \qquad 2^y = -x$$

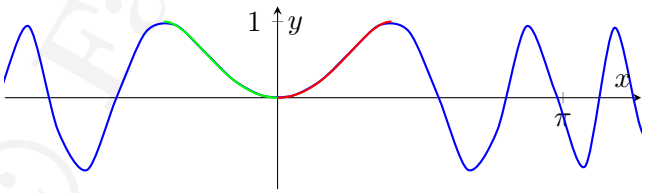
da cui si conclude come prima.

8. Utilizzeremo questa osservazione (**EX**) : se $f : J \to \mathbf{R}$ e $g : I \to J$ sono iniettive allora la funzione $f \circ g : I \to \mathbf{R}$ è iniettiva.
Se una delle due funzioni $f : J \to \mathbf{R}$ e $g : I \to J$ è iniettiva e l'altra non lo è allora la funzione $f \circ g : I \to \mathbf{R}$ non è iniettiva.
Di conseguenza la funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x^2$ è iniettiva, ad esempio, se

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad x \geqslant 0$$

e quindi nell'intervallo dato $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, evidenziato in rosso nel grafico (parziale) di $\mathbf{R} \ni x \mapsto \operatorname{sen} x^2$ che segue:

Figura 1



In tale intervallo la funzione data è iniettiva. La sua funzione inversa pertanto è

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [0,1] & \longrightarrow & \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \mapsto & \sqrt{\operatorname{arcsen} y} \end{array}$$

© Fabio Paronetto

9. In questo caso il ramo della curva in Figura 1 è quello evidenziato in verde. La funzione è iniettiva anche in questo caso, per cui (con giusti dominio e codominio) invertibile.
Poiché x^2 soddisfa

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad x \geqslant 0$$

possiamo invertire l'espressione

$$\operatorname{sen} x^2 = y$$

utilizzando la funzione arcoseno e scrivere

$$x^2 = \operatorname{arcsen} y.$$

Ora però, poiché $x \leqslant 0$, dovremo invertire prestando attenzione che la funzione $x \mapsto x^2$ è comunque invertibile nella semiretta $(-\infty, 0]$, ma la sua inversa è $[0, +\infty) \ni y \mapsto -\sqrt{y}$. Per cui volendo invertire l'espressione $x^2 = \operatorname{arcsen} y$ con $x \leqslant 0$ si ottiene

$$x = -\sqrt{\operatorname{arcsen} y}$$

e quindi l'inversa di f in questo caso è

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [0,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ & y & \mapsto & -\sqrt{\operatorname{arcsen} y} \end{array}$$

Volendo verificare: per $x \in [-\sqrt{\pi/2}, 0]$ si ha

$$f^{-1}\Big(f(x)\Big) = f^{-1}(\operatorname{sen} x^2) = -\sqrt{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x^2)} = -\sqrt{x^2} = -|x| = x.$$

10. La funzione

$$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{x^2+2-1}{x^2+2} = 1 - \frac{1}{x^2+2}$$

non è iniettiva. Se la restringiamo a $[0, +\infty)$ lo diventa. Poiché $x \mapsto x^2 + 2$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ $x \mapsto (x^2+2)^{-1}$ è strettamente decrescente in $[0, +\infty)$, quindi $x \mapsto -(x^2+2)^{-1}$ e $x \mapsto 1 - (x^2+2)^{-1}$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.
Si osservi che

$$[0, +\infty) \ni x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2+2} \qquad \text{prende valori in } \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

© Fabio Paronetto

e poiché la funzione radice quadrata è definita in $[0, +\infty)$ ed è strettamente crescente ha senso considerare

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x^2 + 2}} \quad \text{per } x \in [0, +\infty)$$

e tale funzione, che è composizione di funzioni strettamente crescenti, è strettamente crescente. Vediamo di invertirla: ponendo

$$y = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2 + 2}}$$

con $x \geqslant 0$ e $y \in [1/2, 1)$ si ottiene

$$x^2 = \frac{1}{1 - y^2} - 2.$$

Poiché $x \geqslant 0$ possiamo scrivere

$$x = \sqrt{\frac{1}{1 - y^2} - 2}$$

11. La funzione è invertibile se ristretta a $(-\infty, -1]$ oppure se ristretta a $[-1, +\infty)$ (oltre ad altri casi che non consideriamo). La sua inversa è

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{1 - y^4} - 2} - 1 \qquad \text{se restringiamo } f \text{ a } (-\infty, -1],$$

è

$$f^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{1}{1 - y^4} - 2} - 1 \qquad \text{se restringiamo } f \text{ a } [-1, +\infty).$$

Soluzione 3.6 -

1. Sì
2. Sì
3. No. Infatti si osservi che la funzione $f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$ risulta negativa per $x \in (0, 1)$. Poiché f si annulla in 0 e in 1 non può essere monotona nell'intervallo $[0, 1]$ e in particolare non è invertibile (in $\mathbf{R}$).

© Fabio Paronetto

4. No
5. Sì

Soluzione 3.7 -

1. $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$
3. $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$
11. $\emptyset$
12. $\emptyset$
13. $\emptyset$
14. $[-3 - \sqrt{14}, 1] \cup [5, +\infty)$
    Per trovare la soluzione vanno risulti i due sistemi

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geqslant 0 \end{cases}$$

    e poi vanno unite le soluzioni.

Soluzione 3.8 - 1. La funzione data, $f(x) = \log(\operatorname{sen} 2^x)$, ha senso se e solo se l'argomento della funzione logaritmo è positivo, quindi si dovrà avere

$$\operatorname{sen} 2^x > 0.$$

La disuguaglianza

$$\operatorname{sen} t > 0$$

è risolta per

$$t \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \qquad \text{al variare di } k \in \mathbf{Z}.$$

Di conseguenza si deve avere

$$2k\pi < 2^x < (2k+1)\pi \qquad \text{per un qualche } k \in \mathbf{Z}.$$

Poiché 2^x è sempre positivo si possono eliminare tutti i valori di k negativi e limitarci a $k \in \mathbf{N}$. Poiché la funzione logaritmo in base 2 (in questo caso)

© Fabio Paronetto

è strettamente crescente si ottiene che le due disuguaglianze di sopra sono equivalenti a

$$\log_2(2k\pi) < x < \log((2k+1)\pi) \qquad \text{per } k \in \mathbf{N}.$$

Per cui la funzione data ha come dominio massimale l'insieme (unione di infiniti intervalli disgiunti)

$$\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \Big(\log_2(2k\pi), \log((2k+1)\pi) \Big).$$

© Fabio Paronetto

Soluzione 3.9 -

4. Si osservi che, qualunque sia $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$\log_a x^2 = \log_a |x|^2 = 2 \log_a |x|.$$

D'altra parte $\log_a x^2$ ha senso per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, mentre $\log_a x$ ha senso solo per $x > 0$, quindi

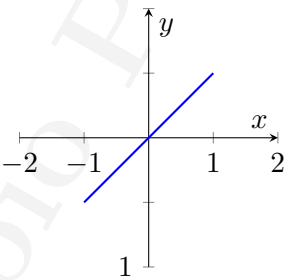
$$\log_a x^2 \qquad \text{non è} \qquad 2 \log_a x,$$

ma

$$\log_a x^2 = 2 \log_a |x|.$$

5. La funzione data è definita solo se $x \in [-1,1]$, poiché la funzione arcoseno è definita solo in $[-1,1]$. Il suo grafico è

Figura 2



6. In questo caso la cosa è diversa. Poiché la funzione seno è definita in tutto $\mathbf{R}$ anche la funzione data è definita in tutto $\mathbf{R}$, ma non coincide con la funzione $x \mapsto x$ su tutto $\mathbf{R}$.
Fintanto che x è compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ la funzione data coincide con x. Se $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ possiamo procedere come nel punto 4. dell'ESERCIZIO 3.5 e ottenere che (per il momento)

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - x & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]. \end{cases}$$

© Fabio Paronetto

Se ora consideriamo $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$ si ha che

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x - 2\pi) \qquad (\text{con } x - 2\pi \in [-\pi/2, \pi/2]).$$

Abbiamo quindi riscritto la quantità $\operatorname{sen} x$ riconducendoci a qualcosa $(x - 2\pi)$ che appartiene all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Allora otteniamo che per $x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$

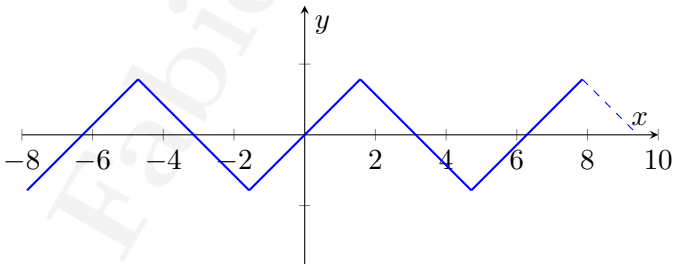
$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x - 2\pi)) = x - 2\pi$$

per cui

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - x & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \\ x - 2\pi & \text{se } x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]. \end{cases}$$

Continuando a ragionare in maniera simile in tutti gli intervalli del tipo $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$, si trova la funzione $x \mapsto \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$, che è definita per tutti gli $x \in \mathbf{R}$, assume valori in $[-1, 1]$ e il suo grafico è parzialmente riportato nella figuara che segue.

Figura 2



Soluzione 3.10 - 3. Per ottenere f bisogna comporre le cinque funzioni

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x^5 \\ g_2(x) &= x + 3 \\ g_3(x) &= \operatorname{arctg} x \\ g_4(x) &= 2^x \\ g_5(x) &= 7 + x \end{aligned}$$

© Fabio Paronetto

nel seguente ordine: $f(x) = g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1(x)$.

Soluzione 3.13 -

1. - 4. Si ricorda che, dato un polinomio ax^2+bx+c esistono sempre $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tali che
$$ax^2 + bx + c = \alpha(x - \beta)^2 + \gamma. \tag{3.1}$$
Per cui per tracciare il grafico di $x \mapsto ax^2+bx+c$ è sufficiente tracciare il grafico di $x \mapsto x^2$ traslato orizzontalmente di β, modificato opportunamente dal fattore α, e poi traslarlo verticalmente di γ.
Per verificare (3.1) è sufficiente risolvere il sistema $(\alpha(x - \beta)^2 + \gamma = \alpha x^2 - 2\alpha\beta x + \alpha\beta^2 + \gamma)$
$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = -2\alpha\beta \\ c = \alpha\beta^2 + \gamma \end{cases}$$
e trovare
$$\alpha = a, \quad \beta = -\frac{b}{2a}, \quad \gamma = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Soluzione 3.14 -

1. No. La prima è definita per $x \in [0, +\infty)$, la seconda per ogni x reale, il suo dominio massimale è quindi $\mathbf{R}$.
2. Sì.
3. No. La prima è definita per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, la seconda per $x \in (0, +\infty)$.
4. No. La prima è definita per $x \in \mathbf{R}$, la seconda per $x \in (0, +\infty)$.
5. Sì.

Soluzione 3.15 - No, non può esistere. Infatti se esistesse si avrebbe prima di tutto
$$(a) \qquad f(x) - f(1 - x) = x.$$

© Fabio Paronetto

Si osservi che sostituendo a x la quantità $1-y$ si avrebbe

$$(b) \qquad f(1-y)-f(y)=1-y \quad \Longrightarrow \quad f(y)-f(1-y)=y-1.$$

Non è possibile che valgano contemporaneamente (a) e (b).

Soluzione 3.16 - Sì, ed è facile verificarne l'esistenza. Innanzitutto si supponga $x \neq 0$, dopodiché si ha che, se tale f esiste, deve soddisfare

$$(f(x)-1)\frac{1}{x}=f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x)-1=x\,f(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x)-x\,f(x)=1$$

da cui $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

© Fabio Paronetto