Capitolo 4

Limiti di successioni reali

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 29 AGOSTO 2023

ESERCIZIO 4.1 - Si verifichi, usando la definizione, che

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+7n}{n^2-2n} = 1$
3. $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+n}{2n^2-n} = \frac{5}{2}$
4. $\lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty$
5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}} = 1$
6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 1$

ESERCIZIO 4.2 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3+7n-2}{2n^3} = \frac{5}{2}$$

Esercizio 4.3 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3+7n-2}{2(n+4)^3} = \frac{5}{2}$$

Esercizio 4.4 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \operatorname{sen} n}{n^2+1} = 0$$

Esercizio 4.5 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+3n+2}{n^2}} = 1$$

Esercizio 4.6 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2n-1} - \sqrt{n^2+2}\right) = 1$$

Esercizio 4.7 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = 1$$

Esercizio 4.8 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = 3$$

Esercizio 4.9 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n^2+2}\right) = 0$$

Esercizio 4.10 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n+7^n} = 7$$

Esercizio 4.11 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}\right) = 0.$$

Esercizio 4.12 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+7}\right) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 4.13 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=+\infty$$

Esercizio 4.14 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0.$$

Esercizio 4.15 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

Esercizio 4.16 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1$$

Esercizio 4.17 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}=+\infty$$

Esercizio 4.18 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}=1$$

Esercizio 4.19 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Esercizio 4.20 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}}=e$$

Esercizio 4.21 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log n^4\ \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{n}\right)}=-\infty$$

Esercizio 4.22 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}(n^4+1)\left(1-\cos\frac{3}{n^2}\right)=\frac{9}{2}$$

Esercizio 4.23 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{1-\cos\frac{1}{n}}=1$$

Esercizio 4.24 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/6}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{6}$$

Esercizio 4.25 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)=\frac{1}{3}$$

Esercizio 4.26 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$$

Esercizio 4.27 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{n}}{\frac{1}{n}}=a,\qquad a\in\mathbf{R}$$

Esercizio 4.28 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}}=1$$

Esercizio 4.29 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{2}$$

Esercizio 4.30 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Esercizio 4.31 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+\cos\frac{1}{n}}{n}\right)^n = e$$

Esercizio 4.32 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^4 n\right)\right)^{\frac{n}{4}} = 0$$

Esercizio 4.33 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(1+\frac{\cos n}{2}\right)\right)^n = 0$$

Esercizio 4.34 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{3}+\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\frac{5}{n} = \frac{5}{3}$$

Esercizio 4.35 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^n-2^{n\log n}}{n^n} = 0$$

Esercizio 4.36 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2^{\log n}} = +\infty$$

Esercizio 4.37 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3^{\log n}} = 0$$

Esercizio 4.38 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\pi+5n^2-7\log n}{\pi^{\log n}+n^3} = +\infty$$

Esercizio 4.39 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\pi+5n^2-7\log n}{\pi^{\log n}+n^4} = 0$$

Esercizio 4.40 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[7]{\cos\frac{1}{n}}-1\right)n^2 = -\frac{1}{14}$$

Esercizio 4.41 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{1-\cos\frac{1}{n}} = -2$$

Esercizio 4.42 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left((-1)^n\frac{1}{n}\right)}{(-1)^n\frac{1}{n}} = 1$$

Esercizio 4.43 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

$*$ Esercizio 4.44 Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right] n$$

Esercizio 4.45 - Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\beta} - 1\right] n^\gamma$$

al variare di $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Esercizio 4.46 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\pi^{\log n}} = +\infty$$

Esercizio 4.47 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi^{\log n}} = 0$$

Esercizio 4.48 - Si mostri che ($\alpha \in \mathbf{R}$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha n}}{n!} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geqslant 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.49 - Si mostri che ($\alpha, \beta > 0$)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1}{\log\left(1+\frac{1}{n^\beta}\right)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta > \alpha \\ 1/3 & \text{se } \beta = \alpha \\ 0 & \text{se } \beta < \alpha \end{cases}$$

Esercizio 4.50 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = e$$

Esercizio 4.51 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \sqrt{e}$$

Esercizio 4.52 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(1+e^n)}{\sqrt{1+n^2}} = 1$$

Esercizio 4.53 - Si calcoli, al variare di $\alpha, \beta > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n^\alpha}}{1-\cos\frac{1}{n^\beta}}$$

Esercizio 4.54 - Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+\cos\frac{1}{n}}{n}\right)^n$$

Esercizio 4.55 - Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-2)!\,n^{n+2}-(n+1)!\,n^{n-1}}{n^n[(n-2)!+3^n]}$$

Esercizio 4.56 - Si mostri che $(\alpha > 0)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}+3(n+1)^{n+1}}{n^n+n!}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ 3e+1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.57 - Si mostri che $(\alpha > 0)$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+5)!-\log(n!+5)}{\log(2n^\alpha)} = \frac{5}{\alpha}.$$

Esercizio 4.58 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!-n\cos n}{n^{2n}-(3n)!\,(\operatorname{sen} n+2)} = 0$$

Esercizio 4.59 - Si mostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, e^n \sqrt{n+1}}{(n+1)^{1/n}(n^{n+1}+\operatorname{sen} n)} = \sqrt{2\pi}.$$

Esercizio 4.60 - Data una successione $(x_n)_n$ di numeri reali si supponga che valga

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0.$$

È possibile concludere che $(x_n)_n$ converge?

$*$ Esercizio 4.61 Data una successione $(x_n)_n$ di numeri reali si supponga che valga

$$\text{(B)} \qquad \lim_{n\to+\infty}(ax_n^2+bx_n+c) = \ell \in \mathbf{R}$$

È possibile concludere che $(x_n)_n$ converge?

$*$ Esercizio 4.62 Data una successione $(x_n)_n$ di numeri reali si supponga che valgano sia (A) che (B) degli esercizi precedenti. È possibile concludere che $(x_n)_n$ converge?

$*$ Esercizio 4.63 Si dimostri che la successione

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

è strettamente decrescente.

Ancora esercizi sull'induzione

Esercizio 4.64 - Si dimostrino per induzione le due disuguaglianze, la prima vera per $n \geqslant 6$, la seconda per ogni $n \in \mathbf{N}^*$.

$$2^n\, n! \leqslant n^n\,, \qquad\qquad n^n \leqslant 3^n\, n!$$

Successioni per ricorrenza

Esercizio 4.65 - Si studi la successione

$$\begin{cases} a_0 := \alpha \\ a_{n+1} := \sqrt{a_n + 1} \qquad \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

con $\alpha = 1$.
Si studino poi anche le successioni definite allo stesso modo, ma con $\alpha = 2$ e con $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 4.66 - Si studi la successione

$$\begin{cases} a_0 := \alpha \\ a_{n+1} := a_n^2 \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 4.67 - Si studi la successione

$$\begin{cases} a_0 := \alpha \\ a_{n+1} := 2a_n + 1 \end{cases}$$

con $\alpha = 1$. Si studi poi la stessa successione al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 4.68 - Si studi la successione

$$\begin{cases} a_0 := 12 \\ a_{n+1} := \sqrt{3a_n - 2} \qquad \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Esercizio 4.69 - Si studino prima le successioni

$$\begin{cases} a_0 := 5 \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right) \qquad \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_0 := 1 \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right) \qquad \text{per } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Dopo la successione

$$\begin{cases} a_0 := 5 \\ a_{n+1} := a_n + \dfrac{3}{a_n} \qquad \text{per } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Dati $A, B > 0$, si studi la successione

$$\begin{cases} a_0 := A \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{B}{a_n}\right) & \text{per } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Dati $\alpha, \beta > 0$, si studi la successione

$$\begin{cases} a_0 := \beta \\ a_{n+1} := \alpha\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right) & \text{per } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.70 - Si studino le due successioni

$$\begin{cases} a_0 := 12 \\ a_{n+1} := \log(1 + a_n) & \text{per } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.71 - Si studino le due successioni

$$\begin{cases} a_0 := \alpha \\ a_{n+1} := \frac{2}{3 - a_n} & \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

Esercizio 4.72 - Si studino le successioni

$$\begin{cases} a_0 := \alpha \\ a_{n+1} := \frac{1}{a_n} & \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

per $\alpha = 1/2$, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$.

Esercizio 4.73 - Si studi la successione

$$\begin{cases} a_0 := \alpha \\ a_{n+1} := a_n(a_n - 1) & \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

SPOSTARE IN UN ALTRO CAPITOLO

Esercizio 4.74 - Dato $q \in (0, 1)$ si calcoli la somma $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ (si ringrazia Alessio).

Suggerimento - Si fissi $b > 1$ e si definisca la successione

$$\begin{aligned} a_0 &:= 1, \\ a_1 &:= b^q, \\ a_2 &:= b^q b^{q^2} = b^{q+q^2}, \\ a_3 &:= b^q b^{q^2} b^{q^3} = b^{q+q^2+q^3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

e si cerchi di scrivere $(a_n)_n$ in maniera ricorrente.

Soluzioni

Soluzione 4.1 -

1. Si deve verificare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che
$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$
Questo è equivalente a verificare che esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che
$$\frac{1}{\varepsilon} < n \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$
È sufficiente considerare
$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$
per concludere.

2. Fissato $\varepsilon > 0$ si deve trovare $N \in \mathbf{N}$ tale che
$$-\varepsilon < \frac{n^2+7n}{n^2-2n} - 1 < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant N.$$
Le due disuguaglianze, poiché
$$\frac{n^2+7n}{n^2-2n} - 1 = \frac{9n}{n^2-2n},$$
sono equivalenti a
$$-\,\varepsilon < \frac{9n}{n^2-2n} < \varepsilon$$
Risolvendo le disuguaglianze si ottiene
$$\frac{9n}{n^2-2n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{9+2\varepsilon}{\varepsilon}$$
$$\frac{9n}{n^2-2n} > -\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{2\varepsilon-9}{\varepsilon}$$
per cui, scegliendo
$$N \geqslant \max\left\{\frac{2\varepsilon-9}{\varepsilon}, \frac{9+2\varepsilon}{\varepsilon}\right\} = \frac{9+2\varepsilon}{\varepsilon}$$
si conclude.

Soluzione 4.11 - È sufficiente moltiplicare e dividere (tipico di queste situazioni) per la quantità $\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}$ per ottenere

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}{2n+4} \leqslant \frac{2\sqrt{n+5}}{2n+4} = \frac{\sqrt{n+5}}{n+2} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

Soluzione 4.13 - Si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Soluzione 4.44 - Si può procedere come segue: scrivendo

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

e osservando che

$$\lim_{n\to+\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \frac{1}{n} = 0$$

si ottiene che

$$\begin{aligned}
\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right] n &= \left[e^{n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - 1\right] n = \\
&= \frac{e^{n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - 1}{n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\, n^2 \log\left(1+\tfrac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{e^{n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - 1}{n\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\, \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}
\end{aligned}$$

a passando al limite, usando i limiti notevoli, si ottiene 1.

Soluzione 4.60 - La successione, ad esempio, $x_n = \sqrt{n}$ soddisfa (A), ma non converge.

Soluzione 4.61 - Considerando, ad esempio, $a = 1, b = 2, c = 1$ si ha che

$$ax_n^2 + bx_n + c = (x_n + 1)^2$$

per cui la condizione (B) non assicura la convergenza. Infatti, ad esempio, la successione

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{\ell} - 1 & n \text{ pari}\,, \\ -\sqrt{\ell} - 1 & n \text{ dispari}\,. \end{cases}$$

soddisfa la condizione (B), ma non converge.
In generale si può concludere che la condizione (B) assicura la convergenza solo se $a = 0$ e $b \neq 0$. Diversamente, supponendo ora $a \neq 0$, si ha che

$$ax_n^2 + bx_n + c = a\Big(x_n + \frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \to_n \ell$$

da cui

$$\Big|x_n + \frac{b}{2a}\Big| \to \sqrt{\frac{1}{a}\Big[\ell + \frac{b^2}{4a} - c\Big]}\,.$$

Cioè potrebbero esistere due sottosuccessioni di $\{x_n\}_n$, una che converge al valore

$$\sqrt{\frac{1}{a}\Big[\ell + \frac{b^2}{4a} - c\Big]} - \frac{b}{2a},$$

l'altra al valore

$$-\sqrt{\frac{1}{a}\Big[\ell + \frac{b^2}{4a} - c\Big]} - \frac{b}{2a}.$$

Si osservi che in realtà $\{x_n\}_n$ è l'unione di due successioni, entrambe sottosuccessioni di $\{x_n\}_n$, una che converge al primo valore, l'altra che converge al secondo.

Soluzione 4.62 - Come visto nella soluzione dell'esercizio precedente (si vedano le ultime righe) da (B) si deduce che

$$\Big|x_n + \frac{b}{2a}\Big| \to \sqrt{\frac{1}{a}\Big[l + \frac{b^2}{4a} - c\Big]}$$

e quindi che esiste una sottosuccessione di $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, sia essa $(x_{n_j})_{j\in\mathbf{N}}$, tale che

$$\lim_{j\to+\infty} x_{n_j} = \sqrt{\frac{1}{a}\left[\ell + \frac{b^2}{4a} - c\right]} - \frac{b}{2a},$$

e un'altra sottosuccessione, data da tutti i termini di $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ privati dei termini della sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbf{N}}$, cioè

$$(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \setminus (x_{n_j})_{j\in\mathbf{N}},$$

che converge a

$$-\sqrt{\frac{1}{a}\left[\ell + \frac{b^2}{4a} - c\right]} - \frac{b}{2a}.$$

Poiché vale la condizione (A) si conclude che una di tali sottosuccessioni è tutta la successione $(x_n)_n$ e l'altra non esiste.
Non solo! Si deduce che se vale (A) necessariamante si deve avere

$$\sqrt{\frac{1}{a}\left[\ell + \frac{b^2}{4a} - c\right]} = 0$$

cioè

$$\ell = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

e $(x_n)_n$ converge a $\frac{b}{2a}$. Ricordando che

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

si deduce che se $(x_n)_n$ soddisfa sia (A) che (B) converge e converge al punto di minimo se $a > 0$ o al punto di massimo se $a < 0$ della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Soluzione 4.63 - Ricordo: come visto a lezione la successione

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è strettamente crescente e converge ad e. A lezione si è visto anche che la successione

$$c_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

è strettamente decrescente e converge ad e. Ricordiamo qui il motivo: è sufficiente scrivere

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} =$$

e poiché si ha che la successione

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{è strettamente crescente per ogni } x \in \mathbf{R}$$

almeno definitivamente (per $n > -x$) la successione

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

è crescente (scegliendo $x = -1$) e quindi $\{c_n\}_n$ decrescente.

Detto ciò si osservi che

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n-1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n-1} = c_{n+1}$$

per cui anche $\{a_n\}_n$ è decrescente.

Si osservi come

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$$

e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Soluzione 4.64 - Si osservi che, sapendo

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad \text{per ogni } \in \mathbf{N}^*$$

si ricavano i passi induttivi. Infatti, prendendo ad esempio in considerazione la prima delle due, si ha che è vera per $n = 6$. Supponendo vera $2^n\, n! \leqslant n^n$,

$$2^{n+1}\,(n+1)! \leqslant (n+1)^{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\,2^n\, n! \leqslant (n+1)^n = n^n \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

e

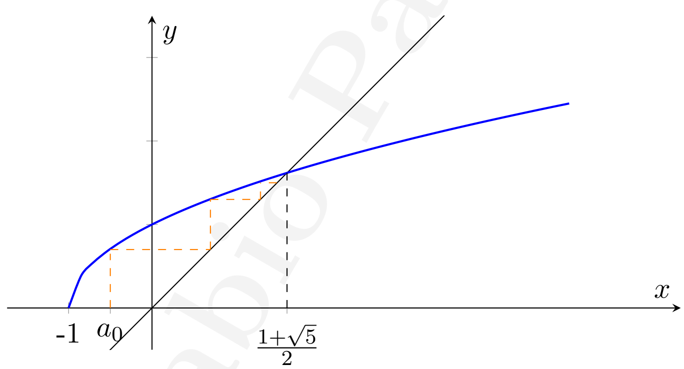
$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2.$$

Usando l'ipotesi induttiva si conclude.
Per quanto riguarda l'altra si procede in maniera analoga usando $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Soluzione 4.65 - Imponendo

$$x = \sqrt{x+1}$$

si ottiene il valore $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, per cui i tre possibili limiti sono $-\infty$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $+\infty$. Guardando il grafico di $f(x) = \sqrt{x+1}$ possiamo congetturare che, partendo da $a_0 = 1$ (ma, come si vede, da qualunque $a_0 \in [-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$), la successione sia crescente.



Vediamo che la successione è monotona crescente. Si ha che

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = \sqrt{2}$$

per cui $a_1 > a_0$. Si supponga ora che $a_n > a_{n-1}$ e cerchiamo di mostrare che $a_{n+1} > a_n$. Si ha

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} > \sqrt{a_{n-1} + 1} = a_n.$$

Per cui $\{a_n\}_n$ è strettamente crescente. Questo assicura l'esistenza del limite. Ora per trovare tale limite, considerando $f(x) = \sqrt{x+1}$, si devono considerare le soluzioni dell'equazione

$$\ell = f(\ell) = \sqrt{\ell + 1} \tag{4.1}$$

alle quali vanno sempre aggiunte le due possibilità $-\infty$ e $+\infty$. Risolvendo l'equazione di sopra e tenendo conto che $\ell + 1 \geqslant 0$ (visto che $\{a_n\}_n$ è strettamente crescente e $a_0 = 1$ si avrà $\ell > 1$) si ottiene

$$\ell^2 = \ell + 1$$

che risolta fornisce le due soluzioni

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Il valore $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ va scartato perché negativo e non può risolvere l'equazione (4.1). Anche $-\infty$ va escluso perché negativo e $\{a_n\}_n$ è strettamente crescente e $a_0 = 1$. Rimangono le altre due possibilità. Proviamo a vedere se $\{a_n\}_n$ è limitata oppure a mostrare che è illimitata.
Siccome è crescente e $a_0 < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, nel caso in cui $\{a_n\}_n$ è limitata necessariamente converge al valore $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Per vedere se è limitata scegliamo un valore M maggiore o uguale a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ e mostriamo che $a_n \leqslant M$.
Ad esempio si scelga $M = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{9}}{2} = 2$. Il valore a_0 è minore di 2. Ora si supponga che $a_n < 2$ e verifichiamolo per a_{n+1}.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2,$$

quindi è vero che $\{a_n\}_n$ è limitata. Si deduce che il limite di $\{a_n\}_n$ è $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Si consideri ora $a_0 = \alpha > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$. Verifichiamo che in questo caso $\{a_n\}_n$ è decrescente.

Soluzione 4.66 - EX - Si determini la formula esplicita.
La successione diverge a $+\infty$ per ogni $\alpha \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
La successione ha limite 1 se $\alpha = -1$ oppure $\alpha = 1$.
La successione ha limite 0 per ogni $\alpha \in (-1, 1)$.

Soluzione 4.67 - È abbastanza evidente che la successione sia strettamente crescente. Infatti

$$a_1 = 2a_0 + 1 = 3 > 1 = a_0$$

quindi a_1 è positivo e maggiore di a_0. Supponendo tutti gli a_k positivi e crescenti per k tra 1 e n si ha

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 > 2a_n > a_n.$$

Di conseguenza la successione $\{a_n\}_n$ ammette limite. Per trovare tale limite scriviamo
$$\ell = 2\ell + 1$$
che ha come soluzione solo $\ell = -1$. Per cui vanno considerate le tre possibilità $-1, -\infty, +\infty$. Chiaramente le prime due vanno scarte essendo la successione positiva. Si conclude che il limite è $+\infty$.

Vediamo al variare del dato iniziale α che succede. È facile vedere che qualunque sia α positivo il limite è $+\infty$ come nel caso precedente.
Se $\alpha = 0$ si ha che $a_1 = 1$ e si ricade nel caso precedente.
Nel caso in cui $\alpha < -1$ la successione è decrescente: infatti
$$a_1 = 2a_0 + 1 = a_0 + (a_0 + 1) < a_0 < -1.$$
Ora si suppongano tutti gli a_k minori di -1 e decrescenti per k tra 1 e n. Si ha
$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = a_n + (a_n + 1) < a_n.$$
Per cui la successione è strettamente decrescente e, per quanto visto sopra, il limite è $-\infty$.
Se $\alpha = -1$ si ha che $a_n = -1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e il limite è ovviamente -1.
Rimangono da trattare i casi nei quali $\alpha \in (-1, 0)$. Cominciamo a considerare
$$\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right).$$
Allora $a_1 = 2a_0 + 1 > 0$ e quindi da questo punto in poi la successione è positiva e crescente: il limite sarà $+\infty$.
Se
$$\alpha \in \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_1 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right).$$
per cui $a_2 > 0$ e si ricade nel primo caso. Ancora se
$$\alpha \in \left[-\frac{7}{8}, -\frac{3}{4}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_2 \in \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$
da cui $a_3 > 0$ e ancora il limite sarà $= \infty$. Quindi se
$$\alpha \in \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_1 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right).$$
Quindi se
$$\alpha \in \left[-\frac{2^k - 1}{2^k}, -\frac{2^k - 2}{2^k}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_k > 0$$

e quindi, per il primo passo, il limite sarà $+\infty$. Riassumendo: il limite è $+\infty$ per ogni $\alpha \neq -1$, se $\alpha = -1$ la successione assume il valore costante -1.

Soluzione 4.68 - Si mostri che

- $a_n \geqslant 2$
- $a_{n+1} < a_n$
- $\lim_n a_n = 2$

Risolvendo $\ell = \sqrt{3\ell - 2}$ si trovano le soluzioni $\ell = 1, \ell = 2$. Mimando l'esercizio 4.65 si può cominciare a verificare che $\{a_n\}_n$ è inferiormente limitata da 2 e decrescente. A questo punto il limite esisterà e sarà finito, e in particolare 2.

Soluzione 4.69 - Prima di tutto si osservi che, usando la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, si ha

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \geqslant \sqrt{a_n}\sqrt{\frac{3}{a_n}} = \sqrt{3}$$

per cui la successione è inferiormente limitata. Ci chiediamo ora se la successione è decrescente:

$$a_{n+1} \leqslant a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \leqslant a_n \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \leqslant a_n^2$$

per cui, essendo a_n positivi e maggiori o uguali a $\sqrt{3}$, effettivamente $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ risulta decrescente. Di conseguenza la successione ammette limite e tale limite, essendo $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ inferiormente limitata, sarà finito.
Passando al limite nell'espressione

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$$

si ottiene

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{3}{\ell}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 = 3.$$

Essendo $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ positiva il limite sarà $\sqrt{3}$.

Nel secondo esempio si può osservare, come prima, che la successione è inferiormente limitata. Infatti, usando la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, si ha

$$a_{n+1} = \left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \geqslant 2\sqrt{a_n}\sqrt{\frac{3}{a_n}} = 2\sqrt{3}.$$

In questo caso però la successione non può essere decrescente, ma sarà crescente. Infatti, essendo il primo termine a_0 positivo si ha

$$a_{n+1} = a_n + \frac{3}{a_n} > a_n$$

e quindi $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è positiva e crescente. Si ha che il limite, se finito, soddisfa

$$\ell = \ell + \frac{3}{\ell},$$

equazione che non ha soluzione. Vanno considerati però anche $-\infty$ e $+\infty$. Il limite è quindi $+\infty$.

Analizziamo il caso

$$\begin{cases} a_0 := 1 \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right) \qquad \text{per } n \geqslant 1. \end{cases}$$

In questo caso non è vero che $\{a_n\}_n$ è decrescente. Si verifica infatti che

$$a_1 = 2 > 1.$$

Ma come prima si ottiene che

$$a_{n+1} \leqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n \geqslant \sqrt{3}.$$

Poiché $a_1 > \sqrt{3}$ la successione sarà decrescente a partire da $n = 1$. Dopodiché si conclude come nel caso precedente.

Analizziamo il caso più generale

$$\begin{cases} a_0 := A \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{B}{a_n}\right) \qquad \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

al variare di $A, B > 0$. Essendo $A > 0$ si verifica per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$:

$$a_0 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 > 0.$$

Supponendo $a_n > 0$ si ha

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{B}{a_n}\right) > 0.$$

A questo punto si ha, in maniera simile al caso precedente,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{B}{a_n}\right) \geqslant \sqrt{a_n}\sqrt{\frac{B}{a_n}} = \sqrt{B}, \tag{4.2}$$

per cui $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ inferiormente limitata, e inoltre

$$a_{n+1} \leqslant a_n \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{B}{a_n}\right) \leqslant a_n \quad\Longleftrightarrow\quad B \leqslant a_n^2$$

dove l'ultima disuguaglianza è equivalente a $a_n \geqslant \sqrt{B}$ visto che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, cosa vera da (4.2). Di conseguenza per ogni $A, B > 0$ la successione data ha come limite $\sqrt{B}$ che si ottiene risolvendo

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{B}{\ell}\right) \quad\Longrightarrow\quad \ell^2 = B$$

e utilizzando le informazioni precedenti.
Infine studiamo il problema

$$\begin{cases} a_0 := \beta \\ a_{n+1} := \alpha\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right) \qquad \text{per } n \geqslant 1. \end{cases}$$

al variare di α e β in $(0, +\infty)$. Se $\alpha \geqslant 1$ è facile verificare che la successione è positiva e strettamente crescente. Come nel primo caso analizzato il limite esiste ed è $+\infty$.
Vediamo il caso $\alpha \in (0, 1)$: prima di tutto si verifica per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Dopodiché utilizzando nuovamente la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ con $a = \sqrt{\alpha a_n}$ e $b = \sqrt{3\alpha/a_n}$ si ha

$$a_{n+1} = \alpha\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \geqslant 2\alpha\sqrt{3},$$

cioè la successione è inferiormente limitata. Inoltre si osservi che

$$a_{n+1} \leqslant a_n \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) \leqslant a_n \quad\Longleftrightarrow\quad a_n^2 \geqslant \frac{3\,\alpha}{1-\alpha}$$

e
$$a_{n+1} \geqslant a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n^2 \leqslant \frac{3\,\alpha}{1-\alpha}.$$
A questo punto si deduce che la successione è monotona, e, poiché $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ è positiva, decrescente se
$$a_n \geqslant \sqrt{\frac{3\,\alpha}{1-\alpha}},$$
crescente se
$$a_n \leqslant \sqrt{\frac{3\,\alpha}{1-\alpha}}.$$
Poiché, come è facile verificare, si ha
$$\sqrt{\frac{3\alpha}{1-\alpha}} \geqslant 2\alpha\sqrt{3} \qquad \text{per ogni valore di } \alpha,$$
si deduce che se β è maggiore di $\sqrt{\frac{3\alpha}{1-\alpha}}$ la successione è decrescente, se il valore di β è minore di $\sqrt{\frac{3\alpha}{1-\alpha}}$ la successione è crescente.
Ci chiediamo se, nel caso
$$a_0 = \sqrt{\frac{3\alpha}{1-\alpha}},$$
la successione rimane costante. Ciò accade se
$$\alpha\left(\sqrt{\frac{3\alpha}{1-\alpha}} + 3\sqrt{\frac{1-\alpha}{3\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{3\alpha}{1-\alpha}}$$
$$\Updownarrow$$
$$3\alpha\sqrt{\frac{1-\alpha}{3\alpha}} = (1-\alpha)\sqrt{\frac{3\alpha}{1-\alpha}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{\frac{1-\alpha}{3\alpha}} = \frac{1-\alpha}{3\alpha}\sqrt{\frac{3\alpha}{1-\alpha}}$$
il che è vero. Concludiamo osservando che il limite ℓ deve soddisfare
$$\ell = \alpha\left(\ell + \frac{3}{\ell}\right) \quad \Longrightarrow \quad \ell^2 = \frac{3\,\alpha}{1-\alpha}$$
per cui si conclude che
$$\ell = \sqrt{\frac{3\,\alpha}{1-\alpha}}.$$

Soluzione 4.70 - Prima mostriamo che vale la disuguaglianza

$$\log x \leqslant x - 1 \qquad \text{per } x > 1$$

o equivalentemente

$$\log(1 + y) \leqslant y \qquad \text{per } y > 0.$$

In realtà questa disuguaglianza (lo vedremo più avanti) vale per $x > 0$ e per $y > -1$.
L'uguaglianza è sempre stretta tranne che per $x = 1$ e $y = 0$.
Per dimostrarla è sufficiente ricordare che per $x > 0$ la successione

$$a_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \geqslant 1,$$

è strettamente crescente e converge a e^x, per cui

$$a_1 = 1 + x < e^x$$

mentre per $x = 0$ chiaramente si ottiene un'uguaglianza. Applicando il logaritmo in base e (che è crescente) si ottiene

$$\log(1 + x) < x \qquad \text{per ogni } x > 0.$$

Si verifica che la successione è positiva e, dalla disuguaglianza di sopra, si deduce che

$$a_{n+1} = \log(1 + a_n) \leqslant a_n$$

per cui si ha la monotonia della successione. Poiché il limite esiste questo deve soddisfare

$$\ell = \log(1 + \ell)$$

che è soddisfatta solo nel caso $\ell = 0$. Al solito vanno considerate anche le due possibilità $-\infty$ e $+\infty$, ma chiaramente il limite della successione è 0 perché la successione è positiva e decrescente.

Soluzione 4.71 - Prima di tutto vediamo di capire quali sono i possibili valori limite. Risolvendo

$$x = f(x) \qquad \text{dove } f : \mathbf{R} \setminus \{3\} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{2}{3 - x},$$

si ottengono i valori $x = 1$ e $x = 2$. Per cui l'insieme dei possibili limiti è

$$-\infty, 1, 2, +\infty.$$

Studiamola per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$. Innanzitutto si osservi cha va scartato il valore 3, perché f non è definita in 3.
Cominciamo a vedere cosa succede se $\alpha < 1$ (il primo dei due valori finiti candidati ad essere il limite). Ragionando sul grafico di f si può congetturare che, se $a_0 = \alpha \leqslant 1$, $\{a_n\}_n$ sia crescente. Proviamo a mostrarlo per induzione. Vediamo il primo passo. Si ha

$$a_1 \geqslant a_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3-\alpha} \geqslant \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \leqslant 1 \text{ oppure } \alpha \geqslant 2.$$

Poiché $\alpha \leqslant 1$ il primo passo è vero. Si supponga ora che $a_n \geqslant a_{n-1}$ e mostriamo che $a_{n+1} \geqslant a_n$. In maniera simile a prima si ha

$$a_{n+1} \geqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3-a_n} \geqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n \leqslant 1 \text{ oppure } a_n \geqslant 2.$$

Proviamo allora a vedere (sempre per induzione) se $a_n \leqslant 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Se ciò sarà vero $\{a_n\}_n$ risulterà crescente. Ovviamente $a_0 \leqslant 1$. Supponiamo ora che $a_n \leqslant 1$ e ci chiediamo se anche $a_{n+1} \leqslant 1$.

$$a_{n+1} \leqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3-a_n} \leqslant 1.$$

Poiché $a_n \leqslant 1$ la quantità $3 - a_n > 0$ per cui

$$\frac{2}{3-a_n} \leqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n \leqslant 1$$

da cui $\{a_n\}_n$ crescente. A questo punto si conclude che, se $\alpha \leqslant 1$, la successione ammette limite e, poiché $a_n \leqslant 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, si conclude anche che tale limite è 1. Si osservi che nel caso $\alpha = 1$ la successione è costantemente 1. Vediamo ora che succede se $\alpha \in [1, 2]$. In questo caso congetturiamo che la successione assuma valori tra 1 e 2 e sia decrescente. Proviamo prima che a_n assume valori in $[1, 2]$: $a_0 = \alpha \in [1, 2]$. Supponendo $a_n \in [1, 2]$ si ha

$$1 \leqslant a_{n+1} \leqslant 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leqslant \frac{2}{3-a_n} \leqslant 2$$

e poiché $a_n \in [1, 2]$, e quindi $3 - a_n > 0$,

$$1 \leqslant \frac{2}{3-a_n} \leqslant 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leqslant a_n \leqslant 2.$$

Vediamo ora che $\{a_n\}_n$ è decrescente. Si ha

$$a_1 \leqslant a_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3-\alpha} \leqslant \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leqslant \alpha \leqslant 2.$$

Supponendo ora che $a_{n-1} \leqslant a_n$ verifichiamo che $a_n \leqslant a_{n+1}$: in maniera simile a prima si ha

$$a_{n+1} \leqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3-a_n} \leqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leqslant a_n \leqslant 2.$$

Anche in questo caso la successione avrà limite 1 (anche per $\alpha = 2$).
Analizziamo ora il caso $\alpha > 3$: si osservi che in tal caso

$$a_1 = \frac{2}{3-\alpha} < 0.$$

In particolare $a_1 \leqslant 1$ e ricadiamo nel primo caso, per cui il limite anche per $\alpha > 3$ è 1.
Vediamo cosa succede per $\alpha \in (2,3)$. Proviamo a chiederci se $\{a_n\}_n$ sia crescente. Si ha

$$a_1 \geqslant a_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3-\alpha} \geqslant \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \leqslant 1 \text{ oppure } \alpha \geqslant 2,$$

condizione che è soddisfatta. Supponendo ora $a_n \geqslant a_{n-1}$ si ha, come prima, che

$$a_{n+1} \geqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{3-a_n} \geqslant a_n.$$

A questo punto, se $3 - a_n > 0$, cioè $a_n < 3$, si ha che

$$a_{n+1} \geqslant a_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n \leqslant 1 \text{ oppure } a_n \geqslant 2.$$

La condizione $a_n \geqslant 2$ è soddisfatta in quanto stiamo supponendo $\alpha > 2$, $a_j \geqslant a_{j-1}$ per $j = 1, ...n$ e $a_n < 3$.
Se invece $a_n = 3$ la successione non è più definita dall'indice $n+1$ in poi.
Diversamente, cioè se $a_j < 3$ per tutti gli indici $j = 0, 1, ...n-1$ e $a_n > 3$, si ha che a_{n+1} risulta negativo, infatti

$$a_{n+1} = \frac{2}{3-a_n} < 0.$$

Per cui non appena a_n diventa più grande di 3 si ha $a_{n+1} < 0$, ed in particolare $a_{n+1} < 1$ per cui ricadiamo nel primo caso analizzato. Dall'indice $n+1$ in poi la successione sarà crescente e avrà quindi limite 1.

Il caso $\alpha \in (2,3)$ - Volendo calcolare tutti i dati iniziali, oltre ad $\alpha = 3$, per i quali la successione non è definita si osservi che se si considera α tale che

$$\frac{2}{3-\alpha} = 3$$

la successione si blocca dopo un passo. La soluzione dell'equazione scritta sopra è $7/3$. Per cui oltre a 3 va escluso anche $7/3$. Se poi α fosse un numero tra 2 e 3 tale che $f(f(\alpha)) = 3$, cioè $a_2 = 3$, saremmo al punto di partenza. Tale valore è dato dal valore α che risolve

$$\frac{2}{3-\alpha} = \frac{7}{3}$$

cioè $\alpha = \frac{15}{7}$. Ci sono infiniti valori, tutti valori del tipo seguente e che risolvono l'uguaglianza

$$\frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{\ddots - \frac{2}{3-\alpha}}}}} = 3\,.$$

Si osservi che ciò equivale a dire: dato $\alpha \in (2,3)$ esiste $n \in \mathbf{N}$ tale che

$$\underbrace{f \circ f \cdots f \circ f}_{n \text{ volte}}(\alpha) = 3$$

cioè partendo da $\alpha \in (2,3)$ e componendo f n volte si arriva a 3. Si osservi che ciò equivale a comporre n volte f^{-1} e scrivere che α non deve soddisfare

$$\alpha = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \cdots f^{-1} \circ f^{-1}}_{n \text{ volte}}(3)$$

per un qualche $n \in \mathbf{N}$. Troviamo l'espressione esplicita di f^{-1}:

$$y = \frac{2}{3-x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 3 - \frac{2}{y}$$

da cui

$$f^{-1}(y) = 3 - \frac{2}{y}.$$

Allora tutti i valori di α che vanno esclusi sono a loro volta i termini di una successione per ricorrenza (che, studiata, avrà limite 2) definita da

$$\begin{cases} b_0 := 3 \\ b_{n+1} := 3 - \dfrac{2}{a_n} \qquad \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

In effetti si ritrovano i termini già esclusi in precedenza:

$$b_0 = 3, \quad b_1 = \frac{5}{7}, \quad b_2 = \frac{15}{7}, \quad b_3 = \frac{31}{15}, \quad \dots$$

Soluzione 4.72 - Si verifica facilmente che la successione, in tutti i casi, è positiva. Inoltre

$$a_{n+1} \leqslant a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n^2 \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n \geqslant 1,$$

quindi non può esservi monotonia: se $a_n \geqslant 1$ allora $a_{n+1} \leqslant 1$ e se $a_n \leqslant 1$ allora $a_{n+1} \geqslant 1$.
Si può osservare che se $a_n \geqslant 1$ allora $a_{n+2} \geqslant 1$ e se $a_n \leqslant 1$ allora $a_{n+2} \leqslant 1$.
A questo punto si verifica facilmente che

$$a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a_n$$

per ogni $n \in \mathbf{N}$. Per cui se $\alpha = 1$ la successione ha limite 1 (è costante), altrimenti non ha limite.

Soluzione 4.74 - Da come si è scritta la soluzione si ha che la successione $(a_n)_n$ è crescente e quindi ammette limite $\ell \in (1, +\infty]$.
Ora si osservi che la successione può essere riscritta come segue:

$$\begin{cases} a_0 := 1, \\ a_{n+1} := (b\, a_n)^q. \end{cases}$$

A questo punto, sapendo già che tale successione ammette limite e sfruttando l'espressione ricorsiva, si ha

$$\ell = (b\,\ell)^q \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = b^{\frac{q}{1-q}}.$$

Poiché

$$a_n = b^{q+q^2+q^3+\cdots q^n} = b^{\sum_{k=1}^n q^k}$$

si ottiene anche che

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} b^{\sum_{k=1}^n q^k} = b^{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n q^k} = b^{\sum_{k=1}^{+\infty} q^k}.$$