Capitolo 5

Serie Numeriche
Parte prima

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 28 OTTOBRE 2024

ESERCIZIO 5.1 - Si scrivano come un numero razionale i numeri $1,\bar{7}$; $1,\overline{32}$; $1,\overline{123}$; $0,12\bar{4}$; $0,12\overline{34}$.

ESERCIZIO 5.2 - Si calcoli la somma della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$$

ESERCIZIO 5.3 - Si calcoli la somma della seguente serie ($k \in \mathbf{N}$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{n^2+kn}$$

ESERCIZIO 5.4 - Si calcoli la somma della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,a-1}{n!\,a^n}\,, \qquad a \text{ parametro reale, } a \neq 0\,.$$

ESERCIZIO 5.5 - Si calcoli la somma della seguente serie ($k \in \mathbf{N}$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Esercizio 5.6 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos n}{n^2}$$

Esercizio 5.7 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.8 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} a^n, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.9 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 a}{n+a^2}}, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.10 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 5.11 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n^3-n+2}\right)$$

Esercizio 5.12 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Esercizio 5.13 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

dopodiché si trovi $k \in \mathbf{N}$ tale che $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{1}{n^p}$ si discosta dalla somma della serie per meno di $1/100$.

Esercizio 5.14 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$$

dopodiché si trovi $k \in \mathbf{N}$ tale che $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{\log n}{n}$ si discosta dalla somma della serie per meno di $1/100$.

Esercizio 5.15 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Esercizio 5.16 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n}{3^n - \sqrt{n}}$$

Esercizio 5.17 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n} \frac{n + \log n - \operatorname{sen} n}{7n^3 - \cos^2 \frac{n}{2} + 5n}$$

Esercizio 5.18 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n} \frac{n^5 + \log n - \operatorname{sen} \frac{1}{n} + \cos n}{5n^7 - 3n^2 + 5n}$$

Esercizio 5.19 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

Esercizio 5.20 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Esercizio 5.21 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Esercizio 5.22 - Si studi il carattere della serie al variare di $a, b \in (0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a^{n^2} + b^{n^2}}$$

Esercizio 5.23 - Si studi il carattere della serie al variare di $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{n^{\alpha}} - \frac{\beta}{n^{\beta}} \right)$$

Esercizio 5.24 - $(*)$ Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 3n + 5} \right)^{n^2}$$

Esercizio 5.25 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

Esercizio 5.26 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n!)}$$

Esercizio 5.27 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

Esercizio 5.28 - Si dimostri che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} \right)} = +\infty.$$

Esercizio 5.29 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n} \frac{1}{n (\log n) \log(\log n)}$$

Esercizio 5.30 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}, \qquad p > 0.$$

Esercizio 5.31 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log(\log n))^p}, \qquad p > 0.$$

Esercizio 5.32 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\, 2^{n+1}}{3^n}$$

Esercizio 5.33 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{\log n}\right)$$

Esercizio 5.34 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + \operatorname{sen} n}$$

Esercizio 5.35 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Esercizio 5.36 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n} \frac{\log n}{n^{3/2}}$$

Esercizio 5.37 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(n!)}{n^\alpha} \qquad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.38 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1 + \log n}{\sqrt{n^3 + 1}}\right)$$

Esercizio 5.39 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{sen} \frac{1+\log n}{\sqrt{n^3+1}}$$

Esercizio 5.40 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{1+n^2}$$

Esercizio 5.41 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos n}{3}\right)^n$$

Esercizio 5.42 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \pi n}{n+2}$$

Esercizio 5.43 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n+1}$$

Esercizio 5.44 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(n-3)^n}{n^{n+1}}$$

Esercizio 5.45 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$$

Esercizio 5.46 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$$

Esercizio 5.47 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

Esercizio 5.48 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{a/2+na^2}$$

Esercizio 5.49 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log\log n}$$

Esercizio 5.50 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha}\,, \qquad \alpha > 0.$$

Esercizio 5.51 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)^\alpha, \qquad \alpha > 0.$$

Esercizio 5.52 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen}(\log n)}{\sqrt{7n^5+n}}\, n$$

Esercizio 5.53 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sqrt{7n^5+n}}\, n^2$$

Esercizio 5.54 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n a^{n^2}\,, \qquad a > 0.$$

Esercizio 5.55 - (*) Si studi il carattere della serie

$$\sum_n a^{\log n}\,, \qquad a > 0.$$

Esercizio 5.56 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n a^{\log n^\alpha}\,, \qquad a, \alpha > 0$$

Esercizio 5.57 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{a^n}{n^a} \qquad \text{al variare del parametro } a \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.58 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^3}$$

Esercizio 5.59 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3}$$

Esercizio 5.60 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n e^{1/n}\frac{n^6+1}{n^\pi}(b^2+b+1)^{2n}$$

Esercizio 5.61 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen}^2 q}{n}\,|q+1|^{2n+n^2}, \qquad q \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.62 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(1+\cos\frac{1}{n}\right)(b^2+3b+2)^n$$

Soluzioni

Soluzione 5.1 - $1,\bar{7}=\frac{16}{9}$; $1,\overline{32}=\frac{131}{99}$; $1,\overline{123}=\frac{374}{333}$; $0,12\bar{4}=\frac{28}{225}$.
Per quanto riguarda l'ultimo numero si può procedere così: detto α il numero $0,12\bar{4}$ si moltiplica per 100, cioè per 10^2 dove 2 è il numero di cifre dopo la virgola e prima che inizi la parte periodica. In questo modo si ottiene

$$10^2\alpha = 12,\bar{4} = 12 + 0,\bar{4}.$$

Ora, detto β il numero $0,\bar{4}$ si procede come al solito:

$$10\beta = 4+\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{4}{9}$$

oppure

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4\left(\frac{1}{10}\right)^n = 4\,\frac{1/10}{1-1/10} = \frac{4}{9}.$$

Infine

$$100\alpha = 12+\frac{4}{9} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{112}{900} = \frac{28}{225}$$

Soluzione 5.6 - Si noti che si ha la seguente stima

$$0 \le \frac{1-\cos n}{n^2} \le \frac{2}{n^2};$$

possiamo quindi applicare il criterio del confronto per concludere che la serie data è convergente.

Soluzione 5.7 - Studiamo la convergenza assoluta. Applicando il criterio del rapporto con $a_n = a^n/n!$, si ottiene che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a|}{n+1}$$

e quindi, siccome per ogni $a>0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0,$$

la serie data converge assolutamente per ogni fissato $a \in \mathbf{R}$, e quindi converge anche semplicemente.

Per esercizio, si usi il criterio di Leibniz per valori negativi di a.
Di tale serie si può anche calcolare la somma, data da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n .$$

Soluzione 5.8 - Studiamo dapprima la convergenza assoluta. Applicando il criterio del rapporto con $a_n = \frac{n! a^n}{n^n}$, si ottiene

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a|}{(1+1/n)^n}.$$

Siccome si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{(1+1/n)^n} = \frac{|a|}{e}$$

si avrà convergenza assoluta per $|a| < e$, mentre non si avrà convergenza per $|a| > e$. Il caso $|a| = e$ va trattato a parte, sempre con il criterio del rapporto. Poiché in tal caso

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e}{(1+1/n)^n} > 1$$

si deduce che per $a = e$ la serie diverge positivamente, per $a = -e$ la serie data è indeterminata.

Soluzione 5.9 - Utilizzando il criterio della radice, si ha che, ponendo $a_n = e^{-\frac{n^2 a}{n+a^2}}$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{-\frac{na}{n+a^2}}.$$

Quindi, siccome

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{na}{n+a^2}} = e^{-a},$$

se ne deduce che la serie converge per $a > 0$, mentre diverge per $a < 0$. Il caso $a = 0$ può essere trattato a parte, e in tal caso il termine generale è sempre pari a 1 e la serie diverge.

Soluzione 5.10 - Usando il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2},$$

con (a_n) successione infinitesima, se ne deduce che la successione $1-\cos 1/n$ è a termini positivi e asintoticamente equivalente alla successione $(1/(2n^2))$, e quindi, dato che quest'ultima ha una serie convergente, la serie data è convergente.

Soluzione 5.11 - Siccome la successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n+\sqrt{n}}{n^3-n+2}}{\dfrac{1}{n^2}} = 1,$$

utilizzando il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = 1 \qquad \text{se } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

se ne deduce che la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum 1/n^2$ ed è quindi convergente.

Soluzione 5.12 - La serie data è una serie a termini alterni; si nota subito che la serie non è assultamente convergente, e quindi dobbiamo studiare la convergenza semplice. Utilizziamo quindi il criterio di Leibniz; la successione $1/n$ è chiaramente infinitesima, positiva e monotona decrescente in quanto per $n < n+1$ si ha $1/n > 1/(n+1)$. Quindi per il criterio di Leibniz si ha la convergenza semplice.

Soluzione 5.13 - Il termine generale è infinitesimo solo per $p > 0$ e quindi per $p \le 0$ non si può avere convergenza. Inoltre per $p > 0$, la successione $(1/n^p)$ è monotona decrescente. Quindi grazie al criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente per $p > 0$. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, si ricade nel caso della serie armonica generalizzata, che converge solo per $p > 1$.
Per quanto riguarda la stima dell'errore dal criterio di Leibniz si ha che

$$\left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} \right| < \frac{1}{(k+1)^p}$$

per cui se scegliamo k in modo tale che $\frac{1}{(k+1)^p} < \frac{1}{100}$ se e solo se $100 < (k+1)^p$, cioè $100^{1/p} < k+1$. È quindi sufficiente scegliere k in modo tale che $k \geqslant 100^{1/p}$ per avere che

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p} - \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \frac{1}{n^p} \right| < \frac{1}{(k+1)^p} < \frac{1}{100}.$$

Si osservi che maggiore è il valore di p meno termini si debbono sommare. Infine si osservi che sapere che l'errore commesso è minore di $1/100$ significa che il valore trovato sommando i primi k terimini è esatto fino alle prime due cifre decimali.

Soluzione 5.14 - La serie non converge assolutamente in quanto per $n \geqslant 3$

$$\frac{\log n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

e per il criterio del confronto si ha $\sum \frac{\log n}{n} = +\infty$. Per quanto riguarda la convergenza semplice, trattandosi di una serie a segni alterni, proviamo ad applicare Leibniz. La successione $a_n = \frac{\log n}{n}$ è monotona se verifichiamo che

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\log n}{n}.$$

Questa condizione equivale a richiedere che

$$\log \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \leqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \leqslant 1.$$

Si osservi ora che

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n} \leqslant 1 \quad \text{per } n \geqslant 3,$$

e quindi per $n \geqslant 3$ la monotonia di a_n è garantita. Inoltre (a_n) è infinitesima. Possiamo allora applicare il criteri di Leibniz e concludere che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n} \qquad \text{converge.}$$

Per quanto riguarda la stima dell'errore dal criterio di Leibniz si ha che

$$\left| \sum_{n=k+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n} \right| < \frac{\log(k+1)}{k+1}$$

per cui se scegliamo k in modo tale che $\frac{\log(k+1)}{k+1} < \frac{1}{100}$ se e solo se $(k+1)^{\frac{1}{k+1}} < e^{\frac{1}{100}}$ o, equivalentemente, $k+1 < e^{\frac{k+1}{100}}$. È chiaro che prendendo, ad esempio, $k = 100$ il numero $e^{\frac{101}{100}}$ non può essere maggiore di 101. Per curiostà: si osservi che un valore di k tra 600 e 700 può andar bene. Infatti scegliendo

$k = 599$ si ha che e^6 è circa 400, mentre (scegliendo $k = 699$) e^7 è circa 2000, per cui $600 > e^6$ e $700 < 6^7$.

Soluzione 5.15 - Si osservi innanzitutto che la serie data è a termini negativi in quanto $1 - 1/n^2 < 1$. Si possono usare, con accortezza, i criteri per serie a termini positivi o, se si preferisce, cambiare segno, ricordandosene alla fine. Senza effettuare il cambio di segno si noti che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)}{-\dfrac{1}{n^2}} = 1,$$

per cui la serie converge (ad un numero negativo!).

Soluzione 5.16 - Posto

$$a_n = \frac{2^n + n}{3^n - \sqrt{n}} \geq 0,$$

è facile notare che a_n è asintotica a $(2/3)^n$ e quindi la serie converge.

Soluzione 5.19 - Si ha che

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \, \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

che è asintotico a $1/n^{3/2}$, per cui la serie risulta convergente.

Soluzione 5.20 - Applicando il criterio del rapporto si ottiene che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \to \frac{1}{e}$$

da cui la convergenza della serie.

Soluzione 5.21 - Dal criterio del rapporto si ha che

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$$

e quindi la serie data converge.

Soluzione 5.23 - Se $\alpha > 1$ e $\beta > 1$ la serie converge perché somma di due serie convergenti.
Negli altri casi: se $\alpha < \beta$ si ha che

$$\frac{\alpha}{n^\alpha} - \frac{\beta}{n^\beta} = \frac{\alpha}{n^\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\right)$$

per cui il termine generale della serie è asintotico a $\frac{1}{n^\alpha}$ e quindi, essendo $\alpha \leqslant 1$, la serie diverge positivamente.
Se invece $\alpha > \beta$ il termine generale della serie è asintotico a $-\frac{1}{n^\beta}$, per cui la serie diverge negativamente.

Soluzione 5.24 - Scrivendo

$$a_n := \left(\frac{n^2+n-1}{n^2+3n+5}\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{2n+6}{n^2+3n+5}\right)^{\frac{n^2+3n+5}{2n+6}\cdot n^2 \cdot \frac{2n+6}{n^2+3n+5}}$$

e tenendo presente che

$$\left(1 - \frac{2n+6}{n^2+3n+5}\right)^{\frac{n^2+3n+5}{2n+6}} < \frac{1}{e}$$

e

$$\frac{2n+6}{n^2+3n+5} \quad \text{è asinototica a} \quad \frac{2}{n},$$

ne segue che

$$a_n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n\cdot\frac{2n^2+6n}{n^2+3n+5}}.$$

Applicando il criterio della radice n-esima alla serie $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^{n\cdot\frac{2n^2+6n}{n^2+3n+5}}$ si ottiene che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{1}{e}\right)^{n\cdot\frac{2n^2+6n}{n^2+3n+5}}} = \frac{1}{e}$$

e quindi, per il confronto, si ha convergenza anche per la serie di partenza.

Soluzione 5.25 - Applicando il criterio di condensazione, si ha

$$2^n a_{2^n} = \frac{1}{n\log 2},$$

e quindi la serie data non converge.

Soluzione 5.26 - Poiché $n! < n^n$, la serie diverge (si veda l'esercizio 5.25).

Soluzione 5.28 - Si usi la stima (7) delle dispense di teoria.

Soluzione 5.32 - Applichiamo il criterio del rapporto per ottenere che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2}{3}\frac{(n+1)^2}{n^2} \to \frac{2}{3} < 1,$$

e quindi la serie converge.

Soluzione 5.33 - La serie non converge assolutamente in quanto

$$\log\left(1 + \frac{1}{\log n}\right) \qquad \text{è asinototica a} \qquad \frac{1}{\log n} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Per la convergenza semplice è sufficiente applicare il criterio di Leibniz per avere la convergenza.

Soluzione 5.34 - La serie non converge assolutamente in quanto il termine generale è asintotico a $1/2n$. La successione

$$a_n = \frac{1}{2n + \sin n}$$

è infinitesima e $a_{n+1} \leqslant a_n$ in quanto $\operatorname{sen} n - \operatorname{sen}(n+1) \leqslant 2$; quindi applicando il criterio di Leibniz, la serie converge.
Si noti come lo studio della convergenza della serie

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n + \sin n}$$

risulti più complicato, o perlomeno meno immediato.

Soluzione 5.35 - Se applichiamo il criterio del rapporto, si ottiene

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0$$

e quindi la serie converge.

Soluzione 5.36 - Proviamo ad usare il criterio del confronto e confrontare asintoticamente i termini della serie con $1/n^p$. Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} n^p \left(\frac{\log n}{n^{3/2}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{3/2-p}} = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 3/2, \\ +\infty & \text{se } p \geqslant 3/2. \end{cases}$$

Allora si può concludere che la serie converge. Infatti scegliamo un valore di p maggiore di 1 in modo tale che la serie $\sum 1/n^p$ converga, ma minore di $3/2$ in modo da poter applicare il criterio del confronto asintotico.
È possibile anche usare il criterio di condensazione.

Soluzione 5.37 - Si usi la soluzione dell'esercizio 5.36 e la formula di Stirling.

Soluzione 5.40 - Poiché si ha che

$$\frac{n \log n}{n^2+1} > \frac{n}{n^2+1} \qquad \text{definitivamente } (n \geqslant 3)$$

non si ha convergenza assoluta. Per la convergenza semplice si applica Leibniz. Che la successione

$$a_n = \frac{n \log n}{n^2+1}$$

sia positiva e infinitesima è facile da vedere. Mostriamo che $\{a_n\}_n$ è decrescente. Si ha che $a_{n+1} < a_n$ se e solo se

$$\frac{(n+1)\log(n+1)}{1+(n+1)^2} < \frac{n \log n}{1+n^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$(1+n^2)(n+1)\log(n+1) < (1+(n+1)^2)n \log n$$

$$\Updownarrow$$

$$\log(n+1)^{(1+n^2)(n+1)} < \log n^{(1+(n+1)^2)n}$$

$$\Updownarrow$$

$$(n+1)^{(1+n^2)(n+1)} < n^{(1+(n+1)^2)n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(n+1)^{(1+n^2)(n+1)}}{n^{(1+n^2)(n+1)}} < \frac{n^{(1+(n+1)^2)n}}{n^{(1+n^2)(n+1)}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n} < n^{\frac{n^2+n-1}{1+n^2}}.$$

L'ultima disuguaglianza è definitivamente vera dal momento che il termine di sinistra converge ad e mentre il termine di destra diverge a $+\infty$, per cui è definitivamente vero che $a_{n+1} < a_n$.

Soluzione 5.41 - Si noti che

$$0 \leq \frac{1 + \cos n}{3} \leq \frac{2}{3}$$

e quindi la serie è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $2/3 < 1$ e quindi converge.

Soluzione 5.42 - Si noti che $\cos \pi n = (-1)^n$ e quindi la serie diventa

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+2}$$

che è convergente grazie al criterio di Leibniz, ma non assolutamente convergente.

Soluzione 5.43 - È convergente.

Soluzione 5.44 - Dal criterio della radice non ricaviamo alcun aiuto. Vediamo che

$$\frac{(n-3)^n}{n^{n+1}} = \frac{(n-3)^n}{n^n} \frac{n^n}{n^{n+1}} = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n \frac{1}{n}.$$

Poiché $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$ converge a e^{-3} si ha che $\frac{(n-3)^n}{n^{n+1}}$ è asinotica a $1/n$, per cui la serie è divergente.

Soluzione 5.45 - Dal criterio della radice si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n+1}{2n-1} \to \frac{1}{2} < 1,$$

e quindi la serie converge.

Soluzione 5.46 - Dal confronto asintotico con $1/n$ si deduce che la serie non converge.

Soluzione 5.47 - La serie converge.

Soluzione 5.48 - Poniamo $a_n = e^{a/2}e^{na^2}$. Dal criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{a/(2n)}e^{a^2} = e^{a^2}.$$

Dividiamo in due casi: se $a \neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ e la serie non converge; per $a = 0$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ma in ogni caso si ha che $a_n = 1$ e quindi anche in questo caso non si ha convergenza.

Soluzione 5.49 - La serie converge semplicemente, ma non assolutamente.

Soluzione 5.55 - La risoluzione si basa su un fatto semplice, senza il quale lo studio della serie sarebbe complicato: dati $a, b > 0$ si ha che

$$a^{\log b} = b^{\log a}.$$

Infatti se $a = e^{\log a}$ possiamo scrivere

$$a^{\log b} = (e^{\log a})^{\log b} = e^{(\log a)(\log b)} = e^{(\log b)(\log a)} = (e^{\log b})^{\log a} = b^{\log a}.$$

Da quest'osservazione si può riscrivere $a^{\log n}$ come $n^{\log a}$, per cui la serie data converge per

$$\log a < -1, \qquad \text{cioè per} \qquad a < \frac{1}{e}.$$

Soluzione 5.58 - Si osservi che

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^3} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^3} = \left[\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n^3}{n+2}}.$$

Poiché

$$\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} < \frac{1}{e}$$

si ha che la serie converge.

Soluzione 5.59 - Rispetto al precedente esempio si ha che

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3} = \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n^3}{n+1}} < e^{\frac{n^3}{n+1}}$$

da cui, a priori, non si conclude nulla. Ma dalla convergenza di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ad e si ha che, definitivamente,

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3} > \left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{n^3}{n+1}}$$

e poiché $e/2 > 1$ si conclude che la serie diverge.

Soluzione 5.60 - Chiaramente, detto a_n il termine generale, si ha che a_n è asintotico a

$$b_n = n^{6-\pi}(b^2+b+1)^{2n},$$

per cui si può studiare il carattere di $\sum_n b_n$. Per fare ciò si osservi che

$$b^2+b+1 = \left(b+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Per cui fintanto che $\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 < 1/4$ la quantità $q = b^2+b+1$ sarà compresa tra 0 e 1 e la serie convergerà. Infatti si avrà

$$\sum_n b_n = \sum_n n^{6-\pi}(q^2)^n.$$

Applicando il criterio della radice si conclude. Se invece $q^2 \geqslant 1$ la serie diverge. Per trovare i valori di b per cui la serie converge risolviamo:

$$\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \iff -\frac{1}{2} < b+\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \iff -1 < b < 0.$$

Se invece $\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}$, cioè $b^2+b+1 \geqslant 1$, la serie diverge e questo è vero per

$$b \leqslant -1 \quad \vee \quad b \geqslant 0.$$

Soluzione 5.61 - Prima di tutto si osservi che se $\operatorname{sen} q = 0$ il termine generale è identicamente nullo per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. Questo corrisponde a prendere

$$q = k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Per cui se $q = k\pi$ la serie converge. Per q diverso da uno di questi (infiniti) valori si ha che $\text{sen}^2 q \in (0,1]$. Se

$$|q+1| \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad |q+1|^{2n+n^2} > |q+1|^{2n} = (|q+1|^2)^n,$$

per cui la serie data diverge per il confronto con

$$\sum_n \frac{\text{sen}^2 q}{n} \, |q+1|^{2n},$$

che diverge (usando, ad esempio, il criterio della radice n-esima). Se

$$|q+1| < 1 \quad \Rightarrow \quad |q+1|^{2n+n^2} < |q+1|^{2n} = (|q+1|^2)^n,$$

per analoghi motivi la serie converge. Quindi infine si ha

$$\text{la serie converge} \quad \Longleftrightarrow \quad |q+1| < 1 \text{ oppure } q = k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

$$\Longleftrightarrow \quad q \in (-2,0) \text{ oppure } q = k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

mentre diverge per tutti gli altri valori.