Capitolo 12

Serie Numeriche Seconda parte

Ultimo aggiornamento: 22 agosto 2022

Esercizio 12.1 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{1}{n!}$$

Esercizio 12.2 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esercizio 12.3 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{arcsen} \frac{1}{n}$$

Esercizio 12.4 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{arcsen} \left((-1)^n \frac{1}{n} \right)$$

Esercizio 12.5 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right)$$

Esercizio 12.6 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{arcsen} \frac{1+\log n}{\sqrt{n^3+1}}$$

Esercizio 12.7 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n^{1/n^2}-1)$$

Esercizio 12.8 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$$

Esercizio 12.9 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$$

Esercizio 12.10 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 12.11 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n - \operatorname{sen} n)\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 12.12 - Si studi il carattere della serie, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) n^\alpha$$

Esercizio 12.13 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha \qquad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

$*$ Esercizio 12.14 - Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_n \left(\frac{\log\left(e-\frac{1}{n}\right)}{\alpha}\right)^n, \qquad \sum_n \left(\frac{\arccos\frac{1}{n}}{\alpha}\right)^n,$$

$$\sum_n \left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)}{\alpha}\right)^n, \qquad \sum_n \left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)}{\alpha}\right)^n,$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 12.15 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_n \left(\sqrt[3]{8n^3+3n}-2n\right)^\alpha$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 12.16 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{n\log n}{1+n^2}$$

Esercizio 12.17 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{n^2}\right]^\alpha,$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 12.18 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.19 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_n n^2\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}+\operatorname{sen}\frac{\sqrt[3]{2}}{n}-\frac{\alpha}{n}\right)$$

al variare di $\alpha \geqslant 0$.

Esercizio 12.20 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

Esercizio 12.21 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\operatorname{sen}\left(n\pi+\frac{1}{\log n}\right)\right]^n$$

Esercizio 12.22 - Si studi la convergenza della serie al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]\left[\sqrt{1+n^2}-n\right].$$

Esercizio 12.23 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sqrt{(\log 3)^n+n}-\sqrt{(\log 3)^n-n}\right]$$

Esercizio 12.24 - Si studi la convergenza della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\alpha}{n}-\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\right]n^{\alpha^2/20}.$$

Esercizio 12.25 - (∗) Si studi il carattere delle serie al variare di $p > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)^p, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n^p\right)$$

Esercizio 12.26 - (∗) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right)$$

Esercizio 12.27 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.28 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n}\arccos\sqrt{1+\log\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.29 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n}{\log\left(\cos\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}$$

Esercizio 12.30 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \cos(2\pi n)\frac{1}{n}$$

Esercizio 12.31 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{1}{(n + \operatorname{sen} n)n}$$

Esercizio 12.32 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{e^n}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$$

Esercizio 12.33 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^2} \quad , \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.34 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\cos\left(\frac{1}{n^2+n}\right)^\alpha - 1\right] n^2$$

Si osservi che questa serie è a termini negativi. Cosa cambia?

Esercizio 12.35 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{e^{3n} + e^n + 1}{2e^{3n} + 2}\right)^n$$

Esercizio 12.36 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)\right]^n$$

Esercizio 12.37 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1\right], \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.38 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^\beta - 1\right], \qquad \alpha, \beta > 0$$

Esercizio 12.39 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[e^{1/n^4}-1\right] n^\alpha, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.40 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n a^{\sqrt{n}}, \qquad a > 0$$

Esercizio 12.41 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n 2^n \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{n}\right)^n$$

Esercizio 12.42 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n [\operatorname{sen}(\operatorname{sen} n)]^n$$

Esercizio 12.43 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right]^n$$

Esercizio 12.44 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\log(n+1)-\log n}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.45 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[\frac{1}{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right], \qquad \alpha \geqslant 0$$

Esercizio 12.46 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[\frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right], \qquad \alpha \geqslant 0$$

Esercizio 12.47 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}\,\log n}$$

Esercizio 12.48 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{sen}\left(n\pi + \frac{1}{\log n}\right)$$

Esercizio 12.49 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e^{1/n} + e^{-1/n} - 2\right)^\alpha, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.50 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n 2^n \left(\frac{1}{3} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^n$$

Esercizio 12.51 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\operatorname{tg}\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right) n$$

Esercizio 12.52 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right) n$$

Esercizio 12.53 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(1 + \frac{\alpha}{n} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right), \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 12.54 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e^{\frac{\log n}{n}} - e^{\frac{\log n}{n^2}}\right)$$

Esercizio 12.55 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e^{1/n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 12.56 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\sqrt{n^{4/3}\cos\frac{1}{n}} - \sqrt[3]{1+n^2}\right)$$

Esercizio 12.57 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n (-1)^n n \left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}} - \sqrt[3]{\frac{1+n^2}{n^2}}\right)$$

Esercizio 12.58 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - \left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\right)^{\beta}\right], \qquad \alpha,\beta>0$$

Esercizio 12.59 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\cos\frac{1}{n^{\alpha}} - \left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n^{\beta}}\right)\right], \qquad \alpha,\beta>0$$

Esercizio 12.60 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 12.61 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e^{(-1)^n/n} - 1\right)$$

Esercizio 12.62 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{senh}\left(\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}\right), \qquad \alpha>0$$

Esercizio 12.63 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

Esercizio 12.64 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n n^2 \log^\alpha n \int_{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 12.65 - Si studi il carattere della serie (Suggerimento: si usi la formula di Stirling)

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{e\sqrt[n]{n}!}}.$$

$*$ Esercizio 12.66 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n\log n}$$

Esercizio 12.67 - Si supponga di lasciar cadere una pallina da un'altezza iniziale h_0 e si supponga che la pallina, dopo ogni rimbalzo, risalga ad un'altezza che è proporzionale all'altezza raggiunta prima del rimbalzo (si supponga cioè di aver definito la successione di altezze $h_{n+1} = qh_n$ con $q \in (0,1)$ e $h_0 > 0$ fissato). Stabilire se la pallina smette di rimbalzare in un tempo finito o meno.

Soluzioni

Soluzione 12.5 - Dallo sviluppo di Taylor per la funzione arcotangente

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

si ottiene che la successione

$$1 - n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

è asintotica alla successione $1/n^2$ e quindi si ha convergenza assoluta e a maggior ragione semplice.

Soluzione 12.7 - Scrivendo

$$n^{1/n^2} - 1 = \frac{\log n}{n^2} + o\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$$

si ottiene che la serie converge.

Soluzione 12.8 - Usando la formula di Taylor, si può scrivere

$$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 = \frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

La serie dei primi dei due termini diverge a $+\infty$ per confronto con la serie $\sum \frac{\log n}{n}$ che diverge per confronto con $\sum \frac{1}{n}$. Sulla serie dei termini $o\left(\frac{\log n}{n}\right)$ non si può dire nulla. Poiché il termine $o\left(\frac{\log n}{n}\right)$ potrebbe, a priori, essere negativo e compensare il primo $\frac{\log n}{n}$ bisogna sviluppare al secondo ordine e scrivere

$$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 = \frac{\log n}{n} - \frac{1}{2}\frac{(\log n)^2}{n^2} + o\left(\frac{(\log n)^2}{n^2}\right).$$

La serie dei secondi termini.converge come pure la serie dei terzi addendi. La prima diverge a $+\infty$ per cui la serie diverge a $+\infty$.

Senza usare lo sviluppo di Taylor si può usare il confronto asintotico e scrivere

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}} = 1$$

da cui si deduce immediatamente la divergenza.

Soluzione 12.9 - Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione logaritmo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

si ottiene che la successione

$$\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

è asintotica a $1/(2n^2)$. Quindi la serie data è convergente.

Soluzione 12.10 - Dallo sviluppo di Taylor della funzione seno, si ricava che la successione

$$\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$$

è asintotica a $1/n^3$, quindi la serie data converge.

Soluzione 12.11 - Si veda la soluzione dell'esercizio 12.10.

Soluzione 12.12 - Dallo sviluppo di Taylor in 0 della funzione seno si ottiene che

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \operatorname{sen}\frac{1}{n} = -\frac{1}{5!}\frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^7}\right)$$

per cui la serie data (a termini negativi) converge per $\alpha < 4$ e diverge (negativamente) per $\alpha \geqslant 4$.

Soluzione 12.13 - Innanzitutto si osservi che la serie è a termini positivi e infinitesimi. Dopodiché, detto a_n il termine $e - (1 + 1/n)^n$, si ha che

$$a_n = e - e^{\log(1+1/n)^n} = e\left[1 - e^{n\log(1+1/n)-1}\right].$$

Sviluppando il logaritmo si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per cui

$$n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Da ciò si ricava che

$$1 - e^{n\log(1+1/n)-1} = 1 - e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

A questo punto si sviluppa ulteriormente, in questo caso la funzione esponenziale, e

$$e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui infine

$$a_n = e\left[1 - e^{n\log(1+1/n)-1}\right] = e\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Si conclude che la serie data converge per $\alpha > 1$ e diverge altrimenti.

Soluzione 12.14 - La cosa è semplice fintanto che $\alpha \neq 1$. Infatti facendo la radice n-esima e mandando n a $+\infty$ si ottiene che il limite è α^{-1}, per cui per $\alpha > 1$ la serie converge, per $\alpha \in (0,1)$ la serie diverge. Rimane il problema per $\alpha = 1$. Sviluppando con Taylor si ha che

$$\begin{aligned}\log\left(e - \frac{1}{n}\right) &= \log\left(e\Big(1 - \frac{1}{e\,n}\Big)\right) = \log e + \log\left(1 - \frac{1}{e\,n}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{e\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}.$$

Essendo il termine n-esimo asitotico ad una quantità positiva la serie non può convergere (e di fatto diverge a $+\infty$).
Vediamo ora la serie

$$\sum_n \Big(\frac{\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n})}{\alpha}\Big)^n.$$

I casi $\alpha \neq 1$ si trattano come nell'altro esempio. Il caso $\alpha = 1$ è più delicato. Un modo di procedere è sviluppare la tangente nel punto $\pi/4$. Ci fermiamo al primo ordine. Ricordando che

$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

si ottiene

$$\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}\right) = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

per cui

$$\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)\right)^n=\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\left[\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}\right]^{2+o(1)}$$

che, al tendere di n a $+\infty$, tende a $e^{-2}\neq 0$. Non essendo infinitesimo il termine generico la serie non può convergere, ed anzi diverge positivamente.

Soluzione 12.16 - Questo esercizio è già stato proposto nel primo capitolo di esercizi sulle serie (dovrebbe essere l'Esercizio 5.34). Lo riproponiamo qui con un'altra soluzione.
Osserviamo innanzitutto che la serie non converge assolutamente. Vediamo la convergenza semplice. Poiché

$$a_n=\frac{n\log n}{n^2+1}$$

è sia positiva che infinitesima rimane da mostrare che $\{a_n\}_n$ è decrescente. Per fare ciò si può considerare la funzione

$$f(x)=\frac{x\log x}{1+x^2}$$

che ha la propritá che $f(n)=a_n$, derivarla e vedere se per caso questa è negativa o definitivamente negativa. Se lo è significa che f è strettamente decrescente e, in particolare, che $f(n+1)<f(n)$, cioè $a_{n+1}<a_n$.
Si ottiene che $f'(x)<0$ se e solo se

$$(1-x^2)\log x-(1+x^2)<0,$$

condizione verificata sicuramente per $x\geqslant 1$. Per cui i termini della serie data soddisfano le ipotesi del criterio di Leibniz e la serie converge.

Soluzione 12.18 - Fintanto che $\alpha>1$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right|}{\frac{1}{n^\alpha}}=0$$

per cui per confronto la serie $\sum_n o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.
Per $\alpha\leqslant 1$ non si può dire nulla. Esempi:

$$\sum\frac{1}{n^2}\qquad\text{converge,}\qquad\qquad\sum\frac{1}{n\log n}\qquad\text{diverge}$$

ma sia $1/n^2$ che $1/(n \log n)$ sono $o(1/n)$. Si trovino degli esempi per $0 < \alpha < 1$.

Soluzione 12.25 - Si noti che

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)} = \operatorname{tg} \operatorname{arctg} n = n,$$

se ne deduce che

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right) = \frac{1}{n}.$$

Oppure, utilizzando il fatto che $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, si ha direttamente che

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

da cui l'uguaglianza di sopra. Utilizzando nel primo caso il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = 1 \tag{12.1}$$

se (a_n) è una successione infinitesima, nel secondo caso utilizzando il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} a_n}{a_n} = 1, \tag{12.2}$$

si può fare un confronto con $1/n^p$ e se ne deduce che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)^p$$

converge se $p > 1$ e non converge per $p \leqslant 1$.

Soluzione 12.26 - Proponiamo due soluzioni.

La prima è la seguente. Prima ricordiamo i seguenti fatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1 \qquad \text{se } a_n \text{ infinitesima}$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta\,.$$

Usando il primo dei fatti appena ricordati e il criterio del confronto ci possiamo limitare a studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$$

che per il secondo fatto diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$$

che diverge.

La seconda è meno elegante, ma può essere istruttiva.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,.$$

Ora, se si riuscisse a trovare una funzione g tale che

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \tag{12.3}$$

grazie alla regola di de l'Hôpital si concluderebbe che $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Scegliendo $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(1-x)}}$ si ha chiaramente che le condizioni (12.3) sono soddisfatte. Integrando si ottiene $g(x) = \sqrt{2}\sqrt{1-x}$. Conclusione:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e quindi, per il criterio del confronto, la serie seguente ha lo stesso carattere di quella di partenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{n}{n+1}} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Si conclude che la serie diverge (confrontare con quanto ottenuto precedentemente).

Soluzione 12.40 - Per $a \geqslant 1$ è facile vedere che la serie diverge a $+\infty$. Per $a \in (0,1)$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a^{\sqrt{n}} = 0$ per ogni $\alpha > 0$.

Soluzione 12.42 - $|\operatorname{sen} n| \leqslant 1$, per cui $|\operatorname{sen}(\operatorname{sen} n)|^n \leqslant (\operatorname{sen} 1)^n$ e poiché $\operatorname{sen} 1 < 1$ la serie converge assolutamente.

Soluzione 12.43 - Poiché $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge a $e/2$ si ha che, definitivamente, $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$. D'altra parte $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e/2 < \pi/2$ per cui

$$\operatorname{sen} 1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \leqslant \operatorname{sen}(e/2) < 1.$$

Per confronto la serie converge.

Soluzione 12.64 - Diverge per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$. Non serve saper risolvere gli integrali, ma osservare che

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2).$$

Di conseguenza

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 + o(x)$$

da cui

$$\int_{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right).$$

Il termine principale a sua volta è

$$\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

per cui

$$\int_{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \qquad \text{è asintotica a} \qquad \frac{1}{n^3}.$$

Si conclude che il termine generico della serie data è asintotico a

$$\frac{\log^\alpha n}{n}.$$

Lo studio della serie $\sum_n \frac{\log^\alpha n}{n}$ è già stato visto (si vedano gli esercizi sulle serie, prima parte).

Soluzione 12.66 - Dati $a, b, c > 0$ si ha che

$$a^{b \log c} = c^{b \log a}.$$

Infatti

$$a^{b \log c} = \left(e^{\log a}\right)^{b \log c} = e^{\log a \, b \log c} = \left(e^{\log c}\right)^{b \log a} = c^{b \log a}.$$

Quindi

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n \log n} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n \log n} = n^{n \log\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)}.$$

Sviluppando con Taylor si ha

$$\log\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = -\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2(n+2)^2} + o\left(\frac{1}{(n+2)^2}\right)$$

per cui

$$n^{n \log\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)} = \frac{1}{n^{\frac{n}{n+2}}} \frac{1}{n^{\frac{n}{2(n+2)^2}}} \frac{1}{n^{o\left(\frac{1}{n}\right)}}.$$

Si osservi che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{2(n+2)^2}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{o\left(\frac{1}{n}\right)}} = 1$$

quindi definitivamente si ha

$$\frac{1}{n^{\frac{n}{2(n+2)^2}}} > \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{n^{o\left(\frac{1}{n}\right)}} > \frac{1}{2}.$$

Rimane da analizzare il termine $n^{-\frac{n}{n+2}}$: poiché

$$\frac{1}{n^{\frac{n}{n+2}}} > \frac{1}{n}$$

definitivamente si ha che

$$n^{n \log\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)} > \frac{1}{4} \frac{1}{n}$$

per cui la serie diverge.

Soluzione 12.67 - Il tempo che impiega la pallina, una volta lasciata cadere, per raggiungere il suolo partendo da un'altezza h_0 è pari a

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Dopo il primo rimbalzo il tempo che impiega per giungere al rimbalzo successivo è dato da

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\,t_0\,\sqrt{q},$$

dove $q \in (0,1)$ rappresenta la percentuale dell'altezza raggiunta, e il numero 2 deriva dal fatto che la pallina deve prima salire fino all'altezza h_1 e poi ridiscendere. In generale per l'ennesimo rimbalzo si ha

$$t_n = 2\,t_0\,q^{n/2}$$

e quindi il tempo che impiegherà per smettere di rimbalzare sarà

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = t_0 + 2\,t_0 \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n/2} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\;\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\;.$$