Capitolo 5

Serie Numeriche

Ultimo aggiornamento: 28 ottobre 2024

Esercizio 5.1 - Si scrivano come un numero razionale i numeri $1,\bar{7}$; $1,\overline{32}$; $1,\overline{123}$; $0,12\bar{3}$.

Esercizio 5.2 - Si calcoli la somma della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$$

Esercizio 5.3 - Si calcoli la somma della seguente serie ($k \in \mathbf{N}$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{n^2+kn}$$

Esercizio 5.4 - Si calcoli la somma della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,a-1}{n!\,a^n}\,, \qquad a \text{ parametro reale, } a \neq 0\,.$$

Esercizio 5.5 - Si calcoli la somma della seguente serie ($k \in \mathbf{N}$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Esercizio 5.6 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos n}{n^2}$$

Esercizio 5.7 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.8 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} a^n, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.9 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 a}{n+a^2}}, \qquad a \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.10 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 5.11 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{n+\sqrt{n}}{n^3-n+2}\right)$$

Esercizio 5.12 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Esercizio 5.13 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$$

Esercizio 5.14 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$$

Esercizio 5.15 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Esercizio 5.16 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esercizio 5.17 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{arcsen}\frac{1}{n}$$

Esercizio 5.18 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{arcsen}\left((-1)^n\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 5.19 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n}{3^n-\sqrt{n}}$$

Esercizio 5.20 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{n+\log n-\operatorname{sen} n}{7n^3-\cos^2\frac{n}{2}+5n}$$

Esercizio 5.21 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{n^5+\log n-\operatorname{sen}\frac{1}{n}+\cos n}{5n^7-3n^2+5n}$$

Esercizio 5.22 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

Esercizio 5.23 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Esercizio 5.24 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Esercizio 5.25 - Si studi il carattere della serie al variare di $a, b \in (0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$$

Esercizio 5.26 - Si studi il carattere della serie al variare di $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{n^\alpha} - \frac{\beta}{n^\beta} \right)$$

Esercizio 5.27 - $(*)$ Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 3n + 5} \right)^{n^2}$$

Esercizio 5.28 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

Esercizio 5.29 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log(n!)}$$

Esercizio 5.30 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

Esercizio 5.31 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(n!)}{n^\alpha} \qquad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.32 - Si dimostri che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}\right)} = +\infty.$$

Esercizio 5.33 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n} \frac{1}{n(\log n)\log(\log n)}$$

Esercizio 5.34 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}, \qquad p \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.35 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log(\log n))^p}, \qquad p > 0.$$

Esercizio 5.36 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\, 2^{n+1}}{3^n}$$

Esercizio 5.37 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{\log n}\right)$$

Esercizio 5.38 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+\operatorname{sen} n}$$

Esercizio 5.39 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - n \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 5.40 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Esercizio 5.41 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n} \frac{\log n}{n^{3/2}}$$

Esercizio 5.42 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1+\log n}{\sqrt{n^3+1}} \right)$$

Esercizio 5.43 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n} \operatorname{arcsen} \frac{1+\log n}{\sqrt{n^3+1}}$$

Esercizio 5.44 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n^{1/n^2} - 1)$$

Esercizio 5.45 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

Esercizio 5.46 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \log n}{1+n^2}$$

Esercizio 5.47 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos n}{3} \right)^n$$

Esercizio 5.48 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \pi n}{n+2}$$

Esercizio 5.49 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n+1}$$

Esercizio 5.50 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(n-3)^n}{n^{n+1}}$$

Esercizio 5.51 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$$

Esercizio 5.52 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right)$$

Esercizio 5.53 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right)$$

Esercizio 5.54 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n - \operatorname{sen} n) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right)$$

Esercizio 5.55 - Si studi il carattere della serie, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \operatorname{sen} \frac{1}{n} \right) n^{\alpha}$$

Esercizio 5.56 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$$

Esercizio 5.57 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n}$$

Esercizio 5.58 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{a/2+na^2}$$

Esercizio 5.59 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log\log n}$$

Esercizio 5.60 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{sen}\frac{1}{n^\alpha}\,, \qquad \alpha > 0.$$

Esercizio 5.61 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^\alpha, \qquad \alpha > 0.$$

Esercizio 5.62 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen}(\log n)}{\sqrt{7n^5+n}}\, n$$

Esercizio 5.63 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sqrt{7n^5+n}}\, n^2$$

Esercizio 5.64 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n a^{n^2}\,, \qquad a > 0.$$

Esercizio 5.65 - (*) Si studi il carattere della serie

$$\sum_n a^{\log n}\,, \qquad a > 0.$$

Esercizio 5.66 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n a^{\log n^\alpha}, \qquad a, \alpha > 0$$

Esercizio 5.67 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^3}$$

Esercizio 5.68 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3}$$

Esercizio 5.69 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n\log n}$$

Esercizio 5.70 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n e^{1/n} \frac{n^6+1}{n^\pi} (b^2+b+1)^{2n}$$

Esercizio 5.71 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen}^2 q}{n} |q+1|^{2n+n^2}, \qquad q \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.72 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.73 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha \qquad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Esercizio 5.74 - Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_n \left(\frac{\log\left(e-\frac{1}{n}\right)}{\alpha}\right)^n, \qquad \sum_n \left(\frac{\arccos\frac{1}{n}}{\alpha}\right)^n,$$

$$\sum_n \left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)}{\alpha}\right)^n, \qquad \sum_n \left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)}{\alpha}\right)^n,$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5.75 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_n \left(\sqrt[3]{8n^3+3n}-2n\right)^\alpha$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5.76 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{n^2}\right]^\alpha,$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5.77 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_n n^2\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}+\operatorname{sen}\frac{\sqrt[3]{2}}{n}-\frac{\alpha}{n}\right)$$

al variare di $\alpha \geqslant 0$.

Esercizio 5.78 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

Esercizio 5.79 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\operatorname{sen}\left(n\pi+\frac{1}{\log n}\right)\right]^n$$

Esercizio 5.80 - Si studi la convergenza della serie al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]\left[\sqrt{1+n^2}-n\right].$$

Esercizio 5.81 - Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sqrt{(\log 3)^n+n}-\sqrt{(\log 3)^n-n}\right]$$

Esercizio 5.82 - Si studi la convergenza della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\alpha}{n} - \log\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2\right] n^{\alpha^2/4}.$$

Esercizio 5.83 - (∗) Si studi il carattere delle serie al variare di $p > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)^p, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n^p\right)$$

Esercizio 5.84 - (∗) Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{n}{n+1}\right)$$

Esercizio 5.85 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.86 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \arccos \sqrt{1 + \log\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)}, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.87 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \cos(2\pi n) \frac{1}{n}$$

Esercizio 5.88 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{1}{(n + \operatorname{sen} n) n}$$

Esercizio 5.89 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{e^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

Esercizio 5.90 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\cos \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^2}, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.91 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\cos\left(\frac{1}{n^2+n}\right)^\alpha - 1\right] n^2$$

Si osservi che questa serie è a termini negativi. Cosa cambia?

Esercizio 5.92 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\frac{e^{3n}+e^n+1}{2e^{3n}+2}\right)^n$$

Esercizio 5.93 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt[4]{1-\frac{1}{n}}\right)\right]^n$$

Esercizio 5.94 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\sqrt{1+\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right], \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.95 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^\beta - 1\right], \qquad \alpha, \beta > 0$$

Esercizio 5.96 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[e^{1/n^4} - 1\right] n^\alpha, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.97 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n a^{\sqrt{n}}, \qquad a > 0$$

Esercizio 5.98 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n 2^n \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{n}\right)^n$$

Esercizio 5.99 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n [\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{sen}\, n)]^n$$

Esercizio 5.100 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right]^n$$

Esercizio 5.101 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\log(n+1)-\log n}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.102 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right], \qquad \alpha \geqslant 0$$

Esercizio 5.103 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}\,\log n}$$

Esercizio 5.104 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{sen}\left(n\pi+\frac{1}{\log n}\right)$$

Esercizio 5.105 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e^{1/n}+e^{-1/n}-2\right)^\alpha, \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.106 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n 2^n\left(\frac{1}{3}-\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^n$$

Esercizio 5.107 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)n$$

Esercizio 5.108 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)n$$

Esercizio 5.109 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(1+\frac{\alpha}{n}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right), \qquad \alpha > 0$$

Esercizio 5.110 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e^{\frac{\log n}{n}} - e^{\frac{\log n}{n^2}}\right)$$

Esercizio 5.111 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e^{1/n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 5.112 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(\sqrt{n^{4/3}\cos\frac{1}{n}} - \sqrt[3]{1+n^2}\right)$$

Esercizio 5.113 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n (-1)^n n \left(\sqrt{\cos\frac{1}{n}} - \sqrt[3]{\frac{1+n^2}{n^2}}\right)$$

Esercizio 5.114 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - \left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}\right)^{\beta}\right], \qquad \alpha, \beta > 0$$

Esercizio 5.115 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left[\cos\frac{1}{n^{\alpha}} - \left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n^{\beta}}\right)\right], \qquad \alpha, \beta > 0$$

Esercizio 5.116 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{n}\right)$$

Esercizio 5.117 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \left(e^{(-1)^n/n} - 1\right)$$

ESERCIZIO 5.118 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \operatorname{senh}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \qquad \alpha > 0$$

ESERCIZIO 5.119 - Si studi il carattere della serie

$$\sum_n \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

ESERCIZIO 5.120 - Si studi il carattere della serie (Suggerimento: si usi la formula di Stirling)

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt[n]{e\sqrt[n]{n}!}}.$$

ESERCIZIO 5.121 - Si supponga di lasciar cadere una pallina da un'altezza iniziale h_0 e si supponga che la pallina, dopo ogni rimbalzo, risalga ad un'altezza che è proporzionale all'altezza raggiunta prima del rimbalzo (si supponga cioè di aver definito la successione di altezze $h_{n+1} = qh_n$ con $q \in (0,1)$ e $h_0 > 0$ fissato). Stabilire se la pallina smette di rimbalzare in un tempo finito o meno.

Soluzioni

Soluzione 5.1 - $1,\overline{7} = \frac{16}{9}$; $1,\overline{32} = \frac{3299}{99}$; $1,\overline{123} = \frac{123999}{999}$; $0,12\overline{3} = \frac{111}{900}$.

Soluzione 5.6 - Si noti che si ha la seguente stima

$$0 \leq \frac{1 - \cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2};$$

possiamo quindi applicare il criterio del confronto per concludere che la serie data è convergente.

Soluzione 5.7 - Studiamo la convergenza assoluta. Applicando il criterio del rapporto con $a_n = a^n/n!$, si ottiene che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a|}{n+1}$$

e quindi, siccome per ogni $a > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0,$$

la serie data converge assolutamente per ogni fissato $a \in \mathbf{R}$, e quindi converge anche semplicemente.
Per esercizio, si usi il criterio di Leibniz per valori negativi di a.
Di tale serie si può anche calcolare la somma, data da

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Soluzione 5.8 - Studiamo dapprima la convergenza assoluta. Applicando il criterio del rapporto con $a_n = \frac{n! a^n}{n^n}$, si ottiene

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a|}{(1 + 1/n)^n}.$$

Siccome si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{(1 + 1/n)^n} = \frac{|a|}{e}$$

si avrà convergenza assoluta per $|a| < e$, mentre non si avrà convergenza per $|a| > e$. Il caso $|a| = e$ va trattato a parte, sempre con il criterio del rapporto. Poiché in tal caso

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{e}{(1+1/n)^n} > 1$$

si deduce che per $a = e$ la serie diverge positivamente, per $a = -e$ la serie data è indeterminata.

Soluzione 5.9 - Utilizzando il criterio della radice, si ha che, ponendo $a_n = e^{-\frac{n^2 a}{n+a^2}}$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} = e^{-\frac{na}{n+a^2}}.$$

Quindi, siccome

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{na}{n+a^2}} = e^{-a},$$

se ne deduce che la serie converge per $a > 0$, mentre diverge per $a < 0$. Il caso $a = 0$ può essere tratta a parte, e in tal caso il termine generale è sempre pari a 1 e la serie diverge.

Soluzione 5.10 - Usando il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n} = \frac{1}{2},$$

con (a_n) successione infinitesima, se ne deduce che la successione $1-\cos 1/n$ è a termini positivi e asintoticamente equivalente alla successione $(1/(2n^2))$, e quindi, dato che quest'ultima ha una serie convergente, la serie data è convergente.

Soluzione 5.11 - Siccome la successione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n+\sqrt{n}}{n^3-n+2}}{\dfrac{1}{n^2}} = 1,$$

utilizzando il limite notevole (5.1) se ne deduce che la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum 1/n^2$ ed è quindi convergente.

Soluzione 5.12 - La serie data è una serie a termini alterni; si nota subito che la serie non è assultamente convergente, e quindi dobbiamo studiare la convergenza semplice. Utilizziamo quindi il criterio di Leibniz; la successione $1/n$ è chiaramente infinitesima, positiva e monotona decrescente in quanto per $n < n+1$ si ha $1/n > 1/(n+1)$. Quindi per il criterio di Leibniz si ha la convergenza semplice.

Soluzione 5.13 - Il termine generale è infinitesimo solo per $p > 0$ e quindi per $p \leq 0$ non si può avere convergenza. Inoltre per $p > 0$, la successione $(1/n^p)$ è monotona decrescente. Quindi grazie al criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente per $p > 0$. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, si ricade nel caso della serie armonica generalizzata, che covnerge per $p > 1$.

Soluzione 5.14 - La serie non converge assolutamente in quanto per $n \geqslant 3$

$$\frac{\log n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

e per il criterio del confronto si ha $\sum \frac{\log n}{n} = +\infty$. Per quanto riguarda la convergenza semplice, trattandosi di una serie a segni alterni, proviamo ad applicare Leibniz. La successione $a_n = \frac{\log n}{n}$ è monotona se verifichiamo che

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\log n}{n}.$$

Questa condizione equivale a richiedere che

$$\log \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \leqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \leqslant 1.$$

Si osservi ora che

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n} \leqslant 1 \quad \text{per } n \geqslant 3,$$

e quindi per $n \geqslant 3$ la monotonia di a_n è garantita. Inoltre (a_n) è infinitesima. Possiamo allora applicare il criteri di Leibniz e concludere che

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n} \qquad \text{converge.}$$

Soluzione 5.15 - Si osservi innanzitutto che la serie data è a termini negativi in quanto $1 - 1/n^2 < 1$. Si possono usare, con accortezza, i criteri per serie a termini positivi o, se si preferisce, cambiare segno, ricordandosene alla fine. Senza effettuare il cambio di segno si noti che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)}{-\dfrac{1}{n^2}} = 1,$$

per cui la serie converge (ad un numero negativo!).

Soluzione 5.19 - Posto

$$a_n = \frac{2^n + n}{3^n - \sqrt{n}} \geq 0,$$

è facile notare che a_n è asintotica a $(2/3)^n$ e quindi la serie converge.

Soluzione 5.22 - Si ha che

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\,\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

che è asintotico a $1/n^{3/2}$, per cui la serie risulta convergente.

Soluzione 5.23 - Applicando il criterio del rapporto si ottiene che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \to \frac{1}{e}$$

da cui la convergenza della serie.

Soluzione 5.24 - Dal criterio del rapporto si ha che

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$$

e quindi la serie data converge.

Soluzione 5.26 - Se $\alpha > 1$ e $\beta > 1$ la serie converge perché somma di due serie convergenti.
Negli altri casi: se $\alpha < \beta$ si ha che

$$\frac{\alpha}{n^\alpha} - \frac{\beta}{n^\beta} = \frac{\alpha}{n^\alpha}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\right)$$

per cui il termine generale della serie è asintotico a $\frac{1}{n^\alpha}$ e quindi, essendo $\alpha \leqslant 1$, la serie diverge positivamente.
Se invece $\alpha > \beta$ il termine generale della serie è asintotico a $-\frac{1}{n^\beta}$, per cui la serie diverge negativamente.

Soluzione 5.27 - Scrivendo

$$a_n := \left(\frac{n^2+n-1}{n^2+3n+5}\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{2n+6}{n^2+3n+5}\right)^{\frac{n^2+3n+5}{2n+6} \cdot n^2 \cdot \frac{2n+6}{n^2+3n+5}}$$

e tenendo presente che

$$\left(1 - \frac{2n+6}{n^2+3n+5}\right)^{\frac{n^2+3n+5}{2n+6}} < \frac{1}{e}$$

e

$$\frac{2n+6}{n^2+3n+5} \quad \text{è asinototica a} \quad \frac{2}{n},$$

ne segue che

$$a_n \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^{n^2 \cdot \frac{2n+6}{n^2+3n+5}} \quad \text{che è asinototica a} \quad \frac{1}{(e^2)^n},$$

e quindi si ha convergenza.

Soluzione 5.28 - Applicando il criterio di condensazione, si ha

$$2^n a_{2^n} = \frac{1}{n \log 2},$$

e quindi la serie data non converge.

Soluzione 5.29 - Poiché $n! < n^n$, la serie diverge (si veda l'esercizio 5.28).

Soluzione 5.32 - Si usi la stima (6) delle dispense di teoria.

Soluzione 5.36 - Applichiamo il criterio del rapporto per ottenere che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2}{3}\frac{(n+1)^2}{n^2} \to \frac{2}{3} < 1,$$

e quindi la serie converge.

Soluzione 5.37 - La serie non converge assolutamente in quanto

$$\log\left(1+\frac{1}{\log n}\right) \qquad \text{è asinotottica a} \qquad \frac{1}{\log n} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Per la convergenza semplice è sufficiente applicare il criterio di Leibniz per avere la convergenza.

Soluzione 5.38 - La serie non converge assolutamente in quanto il termine generale è asintotico a $1/2n$. La successione

$$a_n = \frac{1}{2n + \sin n}$$

è infinitesima e $a_{n+1} \leqslant a_n$ in quanto $\operatorname{sen} n - \operatorname{sen}(n+1) \leqslant 2$; quindi applicando il criterio di Leibniz, la serie converge.
Si noti come lo studio della convergenza della serie

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n + \sin n}$$

risulti più complicato, o perlomeno meno immediato.

Soluzione 5.39 - Dallo sviluppo di Taylor per la funzione arcotangente

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

si ottiene che la successione

$$1 - n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

è asintotica alla successione $1/n^2$ e quindi si ha convergenza assoluta e a maggior ragione semplice.

Soluzione 5.40 - Se applichiamo il criterio del rapporto, si ottiene

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)^3}{n^3} \to 0$$

e quindi la serie converge.

Soluzione 5.41 - Proviamo ad usare il criterio del confronto e confrontare asintoticamente i termini della serie con $1/n^p$. Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} n^p \left(\frac{\log n}{n^{3/2}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{3/2-p}} = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 3/2, \\ +\infty & \text{se } p \geqslant 3/2. \end{cases}$$

Allora si può concludere che la serie converge. Infatti scegliamo un valore di p maggiore di 1 in modo tale che la serie $\sum 1/n^p$ converga, ma minore di 3/2 in modo da poter applicare il criterio del confronto asintotico.
E' possibile anche usare il criterio di condensazione.

Soluzione 5.44 - Scrivendo

$$n^{1/n^2} - 1 = \frac{\log n}{n^2} + o\left(\frac{\log n}{n^2}\right)$$

si ottiene che la serie converge.

Soluzione 5.45 - Usando la formula di Taylor, si può scrivere

$$\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{\log n}{n}} - 1 = \frac{\log n}{n} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

da cui si ottiene che la serie diverge per confronto con la serie $\sum \frac{\log n}{n}$ che diverge per confronto con $\sum \frac{1}{n}$.

Soluzione 5.46 - Poiché si ha che

$$\frac{n \log n}{n^2+1} > \frac{n}{n^2+1} \qquad \text{definitivamente } (n \geqslant 3)$$

non si ha convergenza assoluta. Per la convergenza semplice si applica Leibniz. Derivando la funzione

$$f(x) = \frac{x \log x}{1+x^2}$$

si ottiene che $f'(x) < 0$ se e solo se

$$(1-x^2)\log x - (1+x^2) < 0,$$

condizione verificata sicuramente per $x \geqslant 1$. Per cui i termini della serie data soddisfano le ipotesi del criterio di Leibniz.

Soluzione 5.47 - Si noti che
$$0 \leq \frac{1+\cos n}{3} \leq \frac{2}{3}$$
e quindi la serie è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $2/3 < 1$ e quindi converge.

Soluzione 5.48 - Si noti che $\cos \pi n = (-1)^n$ e quindi la serie diventa
$$\sum \frac{(-1)^n}{n+2}$$
che è convergente grazie al criterio di Leibniz, ma non assolutamente convergente.

Soluzione 5.49 - È convergente.

Soluzione 5.50 - Dal criterio della radice non ricaviamo alcun aiuto. Vediamo che
$$\frac{(n-3)^n}{n^{n+1}} = \frac{(n-3)^n}{n^n}\frac{n^n}{n^{n+1}} = \left(1-\frac{3}{n}\right)^n \frac{1}{n}.$$
Poiché $\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$ converge a e^{-3} si ha che $\frac{(n-3)^n}{n^{n+1}}$ è asinotica a $1/n$, per cui la serie è divergente.

Soluzione 5.51 - Dal criterio della radice si ha
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n+1}{2n-1} \to \frac{1}{2} < 1,$$
e quindi la serie converge.

Soluzione 5.53 - Dallo sviluppo di Taylor della funzione seno, si ricava che la successione
$$\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$$
è asintotica a $1/n^3$, quindi la serie data converge.

Soluzione 5.54 - Si veda la soluzione dell'esercizio 5.53.

Soluzione 5.52 - Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione logaritmo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

si ottiene che la successione

$$\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

è asintotica a $1/(2n^2)$. Quindi la serie data è convergente.

Soluzione 5.55 - Dallo sviluppo di Taylor in 0 della funzione seno si ottiene che

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \operatorname{sen}\frac{1}{n} = -\frac{1}{5!}\frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^7}\right)$$

per cui la serie data (a termini negativi) converge per $\alpha < 4$ e diverge (negativamente) per $\alpha \geqslant 4$.

Soluzione 5.56 - Dal confronto asintotico con $1/n$ si deduce che la serie non converge.

Soluzione 5.57 - La serie converge.

Soluzione 5.58 - Poniamo $a_n = e^{a/2}e^{na^2}$. Dal criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{a/(2n)}e^{a^2} = e^{a^2}.$$

Dividiamo in due casi: se $a \neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ e la serie non converge; per $a = 0$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ma in ogni caso si ha che $a_n = 1$ e quindi anche in questo caso non si ha convergenza.

Soluzione 5.59 - La serie converge semplicemente, ma non assolutamente.

Soluzione 5.65 - La risoluzione si basa su un fatto semplice, senza il quale lo studio della serie sarebbe complicato: dati $a, b > 0$ si ha che

$$a^{\log b} = b^{\log a}.$$

Infatti se $a = e^{\log a}$ possiamo scrivere

$$a^{\log b} = (e^{\log a})^{\log b} = e^{(\log a)(\log b)} = e^{(\log b)(\log a)} = (e^{\log b})^{\log a} = b^{\log a}\,.$$

Da quest'osservazione si può riscrivere $a^{\log n}$ come $n^{\log a}$, per cui la serie data converge per

$$\log a < -1, \qquad \text{cioè per} \qquad a < \frac{1}{e}\,.$$

Soluzione 5.67 - Si osservi che

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^3} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^3} = \left[\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n^3}{n+2}}.$$

Poiché

$$\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} < \frac{1}{e}$$

si ha che la serie converge.

Soluzione 5.68 - Rispetto al precedente esempio si ha che

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3} = \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n^3}{n+1}} < e^{\frac{n^3}{n+1}}$$

da cui, a priori, non si conclude nulla. Ma dalla convergenza di $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ad e si ha che, definitivamente,

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^3} > \left(\frac{e}{2}\right)^{\frac{n^3}{n+1}}$$

e poiché $e/2 > 1$ si conclude che la serie diverge.

Soluzione 5.70 - Chiaramente, detto a_n il termine generale, si ha che a_n è asintotico a

$$b_n = n^{6-\pi}(b^2 + b + 1)^{2n},$$

per cui si può studiare il carattere di $\sum_n b_n$. Per fare ciò si osservi che

$$b^2 + b + 1 = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Per cui fintanto che $\left(b + \frac{1}{2}\right)^2 < 1/4$ la quantità $q = b^2 + b + 1$ sarà compresa tra 0 e 1 e la serie convergerà. Infatti si avrà

$$\sum_n b_n = \sum_n n^{6-\pi}(q^2)^n.$$

Applicando il criterio della radice si conclude. Se invece $q^2 \geqslant 1$ la serie diverge. Per trovare i valori di b per cui la serie converge risolviamo:

$$\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < b+\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < b < 0.$$

Se invece $\left(b+\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}$, cioè $b^2+b+1 \geqslant 1$, la serie diverge e questo è vero per

$$b \leqslant -1 \quad \vee \quad b \geqslant 0.$$

Soluzione 5.71 - Prima di tutto si osservi che se $\operatorname{sen} q = 0$ il termine generale è identicamente nullo per ogni $n \in \mathbf{N}^*$. Questo corrisponde a prendere

$$q = k\pi, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Per cui se $q = k\pi$ la serie converge. Per q diverso da uno di questi (infiniti) valori si ha che $\operatorname{sen}^2 q \in (0,1]$. Se

$$|q+1| \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad |q+1|^{2n+n^2} > |q+1|^{2n} = (|q+1|^2)^n,$$

per cui la serie data diverge per il confronto con

$$\sum_n \frac{\operatorname{sen}^2 q}{n} \, |q+1|^{2n},$$

che diverge (usando, ad esempio, il ceriterio della radice n-esima). Se

$$|q+1| < 1 \quad \Rightarrow \quad |q+1|^{2n+n^2} < |q+1|^{2n} = (|q+1|^2)^n,$$

per analoghi motivi la serie converge. Quindi infine si ha

$$\text{la serie diverge} \quad \Longleftrightarrow \quad |q+1| \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad q \leqslant -2 \;\vee\; q \geqslant 0,$$

$$\text{la serie converge} \quad \Longleftrightarrow \quad |q+1| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < q < 0.$$

Soluzione 5.72 - Fintanto che $\alpha > 1$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right|}{\frac{1}{n^\alpha}} = 0$$

per cui per confronto la serie $\sum_n o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge assolutamente, e quindi anche semplicemente.
Per $\alpha \leqslant 1$ non si può dire nulla. Esempi:

$$\sum \frac{1}{n^2} \qquad \text{converge,} \qquad \sum \frac{1}{n \log n} \qquad \text{diverge}$$

ma sia $1/n^2$ che $1/(n \log n)$ sono $o(1/n)$. Si trovino degli esempi per $0 < \alpha < 1$.

Soluzione 5.73 - Innanzitutto si osservi che la serie è a termini positivi e infinitesimi. Dopodiché, detto a_n il termine $e - (1 + 1/n)^n$, si ha che

$$a_n = e - e^{\log(1+1/n)^n} = e\left[1 - e^{n\log(1+1/n)-1}\right].$$

Sviluppando il logaritmo si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

per cui

$$n\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Da ciò si ricava che

$$1 - e^{n\log(1+1/n)-1} = 1 - e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

A questo punto si sviluppa ulteriormente, in questo caso la funzione esponenziale, e

$$e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui infine

$$a_n = e\left[1 - e^{n\log(1+1/n)-1}\right] = e\left[\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Si conclude che la serie data converge per $\alpha > 1$ e diverge altrimenti.

Soluzione 5.74 - La cosa è semplice fintanto che $\alpha \neq 1$. Infatti facendo la radice n-esima e mandando n a $+\infty$ si ottiene che il limite è α^{-1}, per cui per $\alpha > 1$ la serie converge, per $\alpha \in (0,1)$ la serie diverge. Rimane il problema per $\alpha = 1$. Sviluppando con Taylor si ha che

$$\begin{aligned}\log\left(e - \frac{1}{n}\right) &= \log\left(e\Big(1 - \frac{1}{e\,n}\Big)\right) = \log e + \log\left(1 - \frac{1}{e\,n}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{e\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\log\left(e - \frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}.$$

Essendo il termine n-esimo asitotico ad una quantità positiva la serie non può convergere (e di fatto diverge a $+\infty$).

Soluzione 5.83 - Si noti che

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)} = \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)} = \operatorname{tg}\operatorname{arctg} n = n,$$

se ne deduce che

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right) = \frac{1}{n}.$$

Utilizzando quindi il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} a_n}{a_n} = 1 \tag{5.1}$$

se (a_n) è una successione infinitesima, se ne deduce che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)^p$$

converge se $p > 1$ e non converge per $p \leqslant 1$.

Soluzione 5.84 - Proponiamo due soluzioni.

La prima è la seguente. Prima ricordiamo i seguenti fatti

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1 \qquad \text{se } a_n \text{ infinitesima}$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\,.$$

Usando il primo dei fatti appena ricordati e il criterio del confronto ci possiamo limitare a studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$$

che per il secondo fatto diventa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arcsen}\frac{n}{n+1}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$$

che diverge.

La seconda è meno elegante, ma può essere istruttiva.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,.$$

Ora, se si riuscisse a trovare una funzione g tale che

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \tag{5.2}$$

grazie alla regola di de l'Hôpital si concluderebbe che $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Scegliendo $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(1-x)}}$ si ha chiaramente che le condizioni (5.2) sono soddisfatte. Integrando si ottiene $g(x) = \sqrt{2}\sqrt{1-x}$. Conclusione:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e quindi, per il criterio del confronto, la serie seguente ha lo stesso carattere di quella di partenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{n}{n+1}} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Si conclude che la serie diverge (confrontare con quanto ottenuto precedentemente).

Soluzione 5.97 - Per $a \geqslant 1$ è facile vedere che la serie diverge a $+\infty$. Per $a \in (0,1)$ si ha che $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a^{\sqrt{n}} = 0$ per ogni $\alpha > 0$.

Soluzione 5.99 - $|\operatorname{sen} n| \leqslant 1$, per cui $|\operatorname{sen}(\operatorname{sen} n)|^n \leqslant (\operatorname{sen} 1)^n$ e poiché $\operatorname{sen} 1 < 1$ la serie converge assolutamente.

Soluzione 5.100 - Poiché $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge a $e/2$ si ha che, definitivamente, $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$. D'altra parte $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e/2 < \pi/2$ per cui

$$\operatorname{sen} 1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \leqslant \operatorname{sen}(e/2) < 1.$$

Per confronto la serie converge.

Soluzione 5.121 - Il tempo che impiega la pallina, una volta lasciata cadere, per raggiungere il suolo partendo da un'altezza h_0 è pari a

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Dopo il primo rimbalzo il tempo che impiega per giungere al rimbalzo successivo è dato da

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\,t_0\,\sqrt{q},$$

dove $q \in (0,1)$ rappresenta la percentuale dell'altezza raggiunta, e il numero 2 deriva dal fatto che la pallina deve prima salire fino all'altezza h_1 e poi ridiscendere. In generale per l'ennesimo rimbalzo si ha

$$t_n = 2\,t_0\,q^{n/2}$$

e quindi il tempo che impiegherà per smettere di rimbalzare sarà

$$T = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = t_0 + 2\,t_0 \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n/2} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\ .$$