

Capitolo 6

Preliminari sulle funzioni

Parte seconda

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 12 NOVEMBRE 2023

ESERCIZIO 6.1 - Si disegni il grafico delle seguenti funzioni:

1. $x \mapsto \frac{1}{x}$

2. $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

3. $x \mapsto x + \frac{1}{x}$

4. $x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$

5. $x \mapsto \frac{x+4}{x+3}$

Suggerimento: $x + 4 = (x + 3) + 1$

6. $x \mapsto \frac{x+4}{x+5}$

7. $x \mapsto \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$

$$8. x \mapsto \frac{x^2 + 4x + 6}{x^2 + 4x + 4}$$

$$9. x \mapsto \frac{x^2 + 2x}{(x + 2)^2}$$

$$10. x \mapsto \frac{x}{(x + 2)^2}$$

$$11. x \mapsto x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \text{ con } x \in [-1, 1]$$

$$12. x \mapsto x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \text{ con } x \in [-1, 1]$$

ESERCIZIO 6.2 - Partendo dal grafico di una funzione nota f si disegnino i seguenti grafici della funzione g in maniera qualitativa (senza eseguire alcun calcolo): ad esempio, si disegni anche qualche grafico arbitrario senza che questo sia necessariamente il grafico di un'espressione analitica nota; oppure si considerino, ad esempio, $f(x) = x^2$, $f(x) = x(x - 1)$, $f(x) = x^3 - x$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = \operatorname{sen} x$:

$$1. g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$2. g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ESERCIZIO 6.3 - Si disegnino (senza fare alcun calcolo) i grafici delle seguenti funzioni:

$$1. g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$$

$$2. g(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - 3}$$

$$3. g(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 9}$$

$$4. g(x) = \frac{1}{-x^2 - 10x - 4}$$

$$5. x \mapsto \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$$

$$6. x \mapsto \frac{4x + 2}{(x + 2)^2}$$

7. $x \mapsto \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$

8. $x \mapsto \frac{x-1}{x^2-2x+3}$

9. $x \mapsto \frac{x}{x^2-2x+3}$

10. $x \mapsto \frac{(x-1)^2}{x^2-2x+3}$

11. $x \mapsto \frac{x^2}{x^2-2x+3}$

12. $x \mapsto \frac{(x-1)^3}{x^2-2x+3}$

13. $x \mapsto \frac{x^3}{x^2-2x+3}$

ESERCIZIO 6.4 - Si disegnino (senza fare alcun calcolo) i grafici delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{|x^2+x|} - x$

2. $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$

3. $h(x) = e^{f(x)}$

4. $l(x) = \log(f(x))$

ESERCIZIO 6.5 - Si disegnino (senza fare alcun calcolo) i grafici delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \frac{|\cos(2x)|}{\operatorname{sen} x}, x \in (0, \pi)$

2. $g(x) = \operatorname{arctg} f(x)$

3. $h(x) = e^{f(x)}$

4. $l(x) = \log(f(x))$

ESERCIZIO 6.6 - Si disegnino (senza fare alcun calcolo) i grafici delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^2 - 2x$

2. $g(x) = e^{f(x)}$

3. $h(x) = \operatorname{arctg}(g(x))$

4. $l(x) = \log(h(x))$

Le funzioni f, g, h, l hanno minimo?

Soluzioni

Soluzione 6.3 -

1. - 4. Si ricorda che, dato un polinomio $ax^2 + bx + c$ esistono sempre $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ tali che

$$ax^2 + bx + c = \alpha(x - \beta)^2 + \gamma. \quad (6.1)$$

Per cui per tracciare il grafico di $x \mapsto ax^2 + bx + c$ è sufficiente tracciare il grafico di $x \mapsto x^2$ traslato orizzontalmente di β , modificato opportunamente dal fattore α , e poi traslarlo verticalmente di γ .

Per verificare (6.1) è sufficiente risolvere il sistema $(\alpha(x - \beta)^2 + \gamma = ax^2 - 2\alpha\beta x + \alpha\beta^2 + \gamma)$

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = -2\alpha\beta \\ c = \alpha\beta^2 + \gamma \end{cases}$$

e trovare

$$\alpha = a, \quad \beta = -\frac{b}{2a}, \quad \gamma = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

5. - 8. Si disegnano i grafici delle seguenti funzioni

$$\frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^2 - 1}, \quad \frac{1}{x^2 + 1}$$

e poi li si adattino traslando orizzontalmente e verticalmente come per i punti 1. - 4.