

Capitolo 7

Limiti di funzioni

Parte prima

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 9 NOVEMBRE 2022

ESERCIZIO 7.1 - Si verifichi, usando la definizione, che

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 7x}{x^2 - 2x} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 7}{\sqrt{x^2 - 21}} = 1$

ESERCIZIO 7.2 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

ESERCIZIO 7.3 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

ESERCIZIO 7.4 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} = 1$$

ESERCIZIO 7.5 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sen x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sen \frac{1}{x} = 1$$

ESERCIZIO 7.6 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

ESERCIZIO 7.7 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

ESERCIZIO 7.8 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} (x - 4)^{x-4} = 1$$

ESERCIZIO 7.9 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} (x - 4)^{x^2-16} = 1$$

ESERCIZIO 7.10 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}{x+x^2} = \frac{3}{4}$$

ESERCIZIO 7.11 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + e^x + 1}{2e^{3x} + 2} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 7.12 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sen(x^2 + 4x)) + x}{\log(1+x)} = 5$$

ESERCIZIO 7.13 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x \frac{e^{\frac{(\log x)^2}{x}} - 1}{(\log x)^6} \sen((\log x)^4 e^{-x}) = 1$$

ESERCIZIO 7.14 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x = e$$

ESERCIZIO 7.15 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ESERCIZIO 7.16 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ESERCIZIO 7.17 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 7.18 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^7 - 3x^2 + 1}{x^5 + \sin \frac{1}{x} + \cos x} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^7 - 3x^2 + 1}{x^5 + \sin \frac{1}{x} + \cos x} = -\infty$$

ESERCIZIO 7.19 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{e}$$

ESERCIZIO 7.20 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 7.21 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

ESERCIZIO 7.22 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x + e^{2x}}{2^x + e^{x^2}} = 0$$

ESERCIZIO 7.23 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

ESERCIZIO 7.24 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x^2}{\arcsen^2 x} = 1$$

ESERCIZIO 7.25 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sen x - x}{x} = 0$$

ESERCIZIO 7.26 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsen x}{\arcsen x - \arctg x} = +\infty$$

ESERCIZIO 7.27 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsen x}{\arctg x - \arcsen x} = -\infty$$

ESERCIZIO 7.28 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tg x - \sen x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 3 \\ 1/2 & \alpha = 3 \\ +\infty & \alpha > 3 \end{cases}$$

ESERCIZIO 7.29 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\arcsen x} - e^{\arctg x}}{\arcsen x - \arctg x} = 1$$

ESERCIZIO 7.30 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\arctg x^2} = -2$$

ESERCIZIO 7.31 - Si mostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^5 + 2x^4 + 5x - 7} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^5 + 2x^4 + 5x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 7}{x^5 + 2x^4 + 5x - 7} = 0$$

ESERCIZIO 7.32 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2\pi + 4x)}{x}$$

ESERCIZIO 7.33 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi + 4x)}{x}$$

ESERCIZIO 7.34 - Si calcolino

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi(1-x)}{2}}{x}$$

ESERCIZIO 7.35 - Si calcolino

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}, \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - 2\pi}, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 7.36 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x \operatorname{sen} \left(\frac{2^{x+1}\pi}{2^x - \sqrt{3}} \right).$$

ESERCIZIO 7.37 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{x-1}{x+2} \pi \right).$$

ESERCIZIO 7.38 - Si calcolino

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(\cos \frac{2^x}{3^x + x^7 + \log x} \right)}{\frac{4^x + x^4}{9^x + x^9}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(2 + \cos \frac{2^x \pi}{2^x + x^7 + \log x} \right)}{\frac{\pi x^4 + 4 \log x^\pi}{4^x}}$$

ESERCIZIO 7.39 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(2 - \cos x)}{\operatorname{sen} x^2}$$

ESERCIZIO 7.40 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

ESERCIZIO 7.41 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x \operatorname{sen} x} \right]$$

ESERCIZIO 7.42 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$$

ESERCIZIO 7.43 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2 (\sqrt{1+x} - 1)^2}{(\sqrt{1+x^4} - 1) \log(1 + \sin x^2)}$$

ESERCIZIO 7.44 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\operatorname{tg} x}$$

ESERCIZIO 7.45 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3} \right)$$

ESERCIZIO 7.46 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[4]{2+x^4} - \sqrt[4]{1+2x^3+x^4} \right)$$

ESERCIZIO 7.47 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)^3}{\sqrt[5]{x^4} \operatorname{sen}^{\frac{1}{5}} x}$$

ESERCIZIO 7.48 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 x)^{\operatorname{tg}^2 x}$$

ESERCIZIO 7.49 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \operatorname{sen}(e^{-x} \operatorname{sen} x)}{x}$$

ESERCIZIO 7.50 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} x + (1 - \cos 2x) \operatorname{sen} x^2}{5 \operatorname{sen} x + 27x^4}$$

ESERCIZIO 7.51 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \operatorname{tg} x + 5x}{2 \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}}$$

ESERCIZIO 7.52 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos 5x) \operatorname{tg} 3x}{(x - \pi)^3}$$

ESERCIZIO 7.53 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x \operatorname{sen} \left(e^{-x} \operatorname{sen} \frac{2}{x} \right)$$

ESERCIZIO 7.54 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg}^3 x} - 1}{x (\cos x - e^{x^2})}$$

ESERCIZIO 7.55 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\operatorname{tg}^4 x + 1)}{e^{2 \operatorname{sen}^4 x} - 1}$$

ESERCIZIO 7.56 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi \cos x)}{x \operatorname{sen} x}$$

ESERCIZIO 7.57 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1 + \cos x)$$

ESERCIZIO 7.58 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1 + x^2} - 1}{x}$$

ESERCIZIO 7.59 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x + 1 + x^2} - 1)}{x}$$

ESERCIZIO 7.60 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x + 2) - \log 2}{x}$$

ESERCIZIO 7.61 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1 - x}}{\operatorname{sen} x}$$

ESERCIZIO 7.62 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sin x)}{\log x}$$

ESERCIZIO 7.63 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x^2)^{\frac{1}{\log x^2}}$$

ESERCIZIO 7.64 - Si calcoli al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$$

ESERCIZIO 7.65 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\cos x} - 1) \operatorname{tg} x$$

ESERCIZIO 7.66 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x (3^{1/x} - 1)$$

* ESERCIZIO 7.67 Si calcoli, al variare di a e b ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} \left(a x + \operatorname{arctg} \frac{b}{x} \right)$$

ESERCIZIO 7.68 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \log x)^{1/x}$$

ESERCIZIO 7.69 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x}$$

ESERCIZIO 7.70 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{\cos x}}$$

ESERCIZIO 7.71 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \log x \right)$$

ESERCIZIO 7.72 - Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\log(x + \sqrt{x^2 - 1})}$$

Nei seguenti esercizi si dica se i limiti proposti esistono, se esistono separatamente i limiti destro e sinistro ed eventualmente li si calcoli.

ESERCIZIO 7.73 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

ESERCIZIO 7.74 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

ESERCIZIO 7.75 - $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

ESERCIZIO 7.76 - $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^k \operatorname{sen} \frac{1}{x^h}, \quad h, k \in \mathbf{N}$

ESERCIZIO 7.77 - $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{|x|}{x}$

ESERCIZIO 7.78 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{|x|}$

ESERCIZIO 7.79 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{|x|}$

ESERCIZIO 7.80 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^k}{|x|^h}, \quad h, k \in \mathbf{N}$

ESERCIZIO 7.81 - $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^x$

ESERCIZIO 7.82 - $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{1/x}$

ESERCIZIO 7.83 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 2x)}{\sqrt[3]{x^5}}$

ESERCIZIO 7.84 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x + \frac{1}{x}}}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

Soluzioni

Soluzione 7.26 - Ricordo: si è visto a lezione che, perlomeno per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $x \neq 0$, vale

$$0 < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Chiamando y la quantità $\sin x$ si può riscrivere

$$0 < \frac{y}{\arcsin y} < 1$$

da cui di conseguenza, se $y \in (0, 1)$,

$$\frac{\arcsin y}{y} > 1.$$

Inoltre, sempre per $x \in (0, \pi/2)$, si è visto che

$$\frac{\tan x}{x} > 1$$

e, analogamente a prima e scrivendo y al posto di $\tan x$ e $\arctan y$ al posto di x , si ha che

$$\frac{y}{\arctan y} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\arctan y}{y} < 1.$$

Ovviamente, in particolare, si deduce che per ogni $y \in (0, 1)$

$$\frac{\arctan y}{y} < \frac{\arcsin y}{y}. \quad (7.1)$$

Per cui, prendendo in considerazione il limite proposto, si ha

$$\frac{\arcsin x}{\arcsin x - \arctan x} = \frac{\frac{\arcsin x}{x}}{\frac{\arcsin x}{x} - \frac{\arctan x}{x}}.$$

Ognuno dei tre rapporti tende a 1 quando $x \rightarrow 0^+$, ma da (7.1) si deduce che il denominatore, che tende zero, ha segno positivo, da cui il risultato.

Soluzione 7.27 - Si veda la soluzione dell'esercizio precedente.

Soluzione 7.33 - -4

Soluzione 7.37 - Si osservi che la quantità $\frac{x-1}{x+2}\pi$ tende a π quando $x \rightarrow +\infty$. Utilizzando il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{x} = 1$$

e scrivendo

$$\frac{x-1}{x+2} \pi = \frac{x+2-3}{x+2} \pi = \pi - \frac{\pi}{x+2}$$

si ha che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x-1}{x+2} \pi \right)}{\frac{3\pi}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\pi - \frac{3\pi}{x+2} \right)}{\frac{3\pi}{x+2}} = 1$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x-1}{x+2} \pi \right)}{\frac{3\pi}{x+2}} \frac{3\pi}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\pi - \frac{3\pi}{x+2} \right)}{\frac{3\pi}{x+2}} \frac{3\pi x}{x+2} = 3\pi.$$

Soluzione 7.40 - $\log \frac{a}{b}$

Soluzione 7.45 - Si mostri per esercizio (è sufficiente eseguire la moltiplicazione a destra dell'uguaglianza) che vale la formula ($a, b > 0$, $n \in \mathbf{N}$)

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \sum_{k=1}^n a^{k-1} b^{n-k} = \\ &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}). \end{aligned}$$

In particolare si hanno

$$\begin{aligned} n=2 & \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ n=3 & \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ n=4 & \quad a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il limite si conclude utilizzando la formula con $n = 3$. Il risultato è $-2/3$.

Soluzione 7.46 - Si veda la soluzione dell'esercizio 7.45.

Soluzione 7.49 - 0

Soluzione 7.50 - $\frac{3}{5}$

Soluzione 7.52 - Si osservi che

$$\cos 5x = \cos(5x-4\pi) = \cos((5x-5\pi) + \pi) = \cos(5x-5\pi) \cos \pi = -\cos(5(x-\pi))$$

e

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} (3(x - \pi))$$

per cui

$$\frac{(1 + \cos 5x) \operatorname{tg} 3x}{(x - \pi)^\alpha} = \frac{(1 - \cos(5(x - \pi))) \operatorname{tg} 3(x - \pi)}{(x - \pi)^3}.$$

Chiamando t la quantità $x - \pi$ il limite diventa

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 5t) \operatorname{tg} 3t}{t^3} = \frac{75}{2}.$$

Soluzione 7.62 - Si ha che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log x} = 1$.

Per mostrarlo si possono usare le proprietà dei logaritmi e scrivere

$$\log(\operatorname{sen} x) = \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} x\right) = \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + \log(x)$$

da cui

$$\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\log x} = 1 + \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{\log x}.$$

Soluzione 7.63 - Per calcolare questo limite si può usare il fatto che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\operatorname{sen} x^2)}{\log x^2} = 1$$

che si può mostrare similmente a quanto fatto nell'esercizio 7.62. Dopodiché scrivere

$$(\operatorname{sen} x^2)^{\frac{1}{\log x^2}} = e^{\log(\operatorname{sen} x^2) \frac{1}{\log x^2}} = e^{\frac{\log(\operatorname{sen} x^2)}{\log x^2}}$$

e passare al limite.

Soluzione 7.67 - Se $b = 0$ la quantità da analizzare si riduce a

$$x \operatorname{tg}(ax)$$

che tende a zero quando x tende a zero.

Si supponga ora $b \neq 0$ e si usi il seguente fatto:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t\right) = \cos(\operatorname{arctg} t), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t\right) = \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} t)$$

da cui

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \operatorname{arctg} t} = \frac{1}{t}$$

per cui, applicando l'arcotangente ad entrambi i membri dell'uguaglianza, si ottiene infine (**perché?**)

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t & \text{se } t > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Di conseguenza si ha, nel caso in cui b non sia zero,

$$\operatorname{arctg} \frac{b}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} & \text{se } \frac{b}{x} > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} & \text{se } \frac{b}{x} < 0, \end{cases}$$

e quindi

$$\operatorname{tg} \left(a x + \operatorname{arctg} \frac{b}{x} \right) = \begin{cases} \operatorname{tg} \left(a x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right) & \text{se } \frac{b}{x} > 0, \\ \operatorname{tg} \left(a x - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right) & \text{se } \frac{b}{x} < 0. \end{cases}$$

Dalla periodicità della tangente e indipendentemente dal segno di b/x si ha che (ad esempio)

$$\operatorname{tg} \left(a x + \operatorname{arctg} \frac{b}{x} \right) = \operatorname{tg} \left(a x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right).$$

Ora

$$\operatorname{tg} \left(a x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right) = \frac{\operatorname{sen} \left((a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b}) + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left((a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b}) + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right)}$$

e quindi infine

$$\begin{aligned} x \operatorname{tg} \left(a x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right) &= \frac{x}{\operatorname{tg} \left(a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right)} = \\ &= \frac{a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b}}{\operatorname{tg} \left(a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right)} \frac{x}{a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b}}. \end{aligned}$$

A questo punto il primo dei due fattori al tendere di x a zero tende a 1. Concentriamoci sul secondo fattore:

$$\frac{x}{a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b}} = \frac{x}{x \left(a - \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{b}}{\frac{x}{b}} \frac{1}{b} \right)}$$

il cui limite, per $x \rightarrow 0$, è $b/(ab - 1)$. Concludendo di ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} \left(a x + \operatorname{arctg} \frac{b}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{tg} \left(a x + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b}}{\operatorname{tg} \left(a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right)} \frac{x}{a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b}}{\operatorname{tg} \left(a x - \operatorname{arctg} \frac{x}{b} \right)} \frac{1}{\frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{b}}{a - \frac{x}{b} \frac{1}{b}}} = \frac{b}{ab - 1} \end{aligned}$$

qualunque sia il valore di b (visto che per $b = 0$ la quantità $b/(ab - 1)$ coincide con 0).

Soluzione 7.68 - Questo è immediato: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$, per cui il limite richiesto è 0.

Soluzione 7.70 - Scrivendo

$$(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{\cos x}} = \frac{(\operatorname{sen} x)^{\sqrt{\cos x}}}{(\cos x)^{\sqrt{\cos x}}}$$

e trattando separatamente numeratore e denominatore si ottiene che

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{sen} x)^{\sqrt{\cos x}} = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{\sqrt{\cos x} \log \cos x} = 1$$

per cui il limite richiesto è 1.