Capitolo 8

Integrali generalizzati

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 18 DICEMBRE 2023

Si studino e si calcolino i seguenti integrali impropri:

ESERCIZIO 8.1 - $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$

ESERCIZIO 8.2 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$

ESERCIZIO 8.3 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x+1} \, dx$

ESERCIZIO 8.4 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} \, dx$

ESERCIZIO 8.5 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}} \, dx$

ESERCIZIO 8.6 - $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \sqrt{1-e^{2x}} \, dx$

ESERCIZIO 8.7 - $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$

ESERCIZIO 8.8 - $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}} \, dx$

ESERCIZIO 8.9 - $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}\,dx$

ESERCIZIO 8.10 - $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx$

ESERCIZIO 8.11 - $\displaystyle\int_{0}^{2} x\log(2-x)\,dx$

ESERCIZIO 8.12 - $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

****

Si studino i seguenti integrali impropri:

ESERCIZIO 8.13 - $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\log x}\,dx$ e $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\log x}\,dx$

ESERCIZIO 8.14 - $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$

ESERCIZIO 8.15 - $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\,dx$

ESERCIZIO 8.16 - $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\alpha}(3-x)^{\beta}}\,dx, \qquad \alpha,\beta>0$

ESERCIZIO 8.17 - $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{(x-\pi)^2}\,dx$

ESERCIZIO 8.18 - $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$

ESERCIZIO 8.19 - $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\alpha} x\,dx \qquad \alpha>0$

ESERCIZIO 8.20 - $\displaystyle\int_{5}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^5-7x^2+3}\,dx$

Esercizio 8.21 - $\displaystyle\int_5^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^5-7x^2+3}\right) dx$

Esercizio 8.22 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3+x}{x^5+7x^2}\right) dx$

Esercizio 8.23 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^5+7x^2}{x^3+x}\right)}\, dx.$

Esercizio 8.24 - $\displaystyle\int_5^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^\alpha+2x}{x^\beta+3}\right) dx, \qquad \alpha,\beta>0$

Esercizio 8.25 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^\alpha}\, dx, \qquad \alpha>0$

Esercizio 8.26 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^\alpha}\, dx, \qquad \alpha>0$

Esercizio 8.27 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x - x}\, dx$

Esercizio 8.28 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{(\operatorname{tg} x - x)^\beta}\, dx \qquad \alpha,\beta>0$

Esercizio 8.29 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{\alpha x}-1}{x^\alpha}\, dx$ (calcolarlo per $\alpha=-2$)

Esercizio 8.30 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e^{\frac{\log x}{x}}-1\right) dx$

Esercizio 8.31 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(x^{1/x}-1\right) dx$

Esercizio 8.32 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{x^\alpha}\, dx$

Esercizio 8.33 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^2+\operatorname{sen}\sqrt{x}}\, dx$

Esercizio 8.34 - $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\log x}{\sqrt{x\cos x}}\, dx$

Esercizio 8.35 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4} + 7x + 8\log x + \sqrt[4]{x^5}}$

Esercizio 8.36 - Si studi il seguente integrale e lo si calcoli facendo un cambio di variabile:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Esercizio 8.37 - Si studi il seguente integrale e lo si calcoli facendo un cambio di variabile:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Esercizio 8.38 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx, \qquad \alpha > 0$

Esercizio 8.39 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx, \qquad \alpha > 0$

Esercizio 8.40 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^x - 1}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)^\alpha}\, dx, \qquad \alpha > 0$

Esercizio 8.41 - $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(1 - \sqrt{\cos x}\right)}{x^\alpha}}\, dx, \qquad \alpha > 0$

Esercizio 8.42 - $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x\log x}{1+x^2}\, \operatorname{sen} x\, dx$

Esercizio 8.43 - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx$

Esercizio 8.44 - $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2} + e^{x-2} - 1}\, dx$

Esercizio 8.45 - $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\, dx$ al varire di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Esercizio 8.46 - $\displaystyle\int_1^{1/e} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\, dx$ al varire di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Esercizio 8.47 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 \, dx$

Esercizio 8.48 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \operatorname{sen} x^2 \, dx$

Esercizio 8.49 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx, \qquad \alpha > 0, \ \beta \in \mathbf{R}$

Esercizio 8.50 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\beta \cos x^\alpha \, dx, \qquad \alpha > 0, \ \beta \in \mathbf{R}$

Esercizio 8.51 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x \, dx$

Esercizio 8.52 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$

Esercizio 8.53 - $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log x} \, dx, \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log x} \, dx$

Esercizio 8.54 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^3} \operatorname{sen} x \, dx, \qquad$ al variare di $a, b, c \in \mathbf{R}$

Esercizio 8.55 - Dopo aver verificato la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x \, dx, \qquad n \in \mathbf{N}$$

si dia, fissato $\varepsilon > 0$, un valore di $a > 0$ per il quale

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x \, dx - \int_0^a \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x \, dx \right| < \varepsilon.$$

$**$ Esercizio 8.56 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|} \, dx \qquad$ al variare di $\alpha > 0$.

****

Data una serie $\sum_n a_n$ diremo che una successione $\{b_n\}_n$ è asintotica alle somme parziali della serie data se

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=0}^N a_n}{b_N} = \lambda, \qquad \lambda \in (0, +\infty)\,.$$

Per le seguenti serie divergenti si trovi una tale successione $\{b_n\}_n$:

$*$ Esercizio 8.57 - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

$*$ Esercizio 8.58 - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$*$ Esercizio 8.59 - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)$

$*$ Esercizio 8.60 - $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \cos\sqrt{\frac{1}{n\log n}}\right)$

****

$**$ Esercizio 8.61 - La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{e^n}$ converge per qualunque $k \in \mathbf{N}$.

È possibile dare una stima della sua somma? Cioè, è possibile trovare due costanti A e B tali che $\displaystyle A \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{e^n} \leqslant B$?

Inoltre, detta S la somma della serie, è possibile dare una stima della quantità

$$S - \sum_{n=0}^{N} \frac{n^k}{e^n}?$$

Soluzioni

Soluzione 8.1 - Integrando per parti si ha

$$\int_c^1 \log x\,dx = x\log x\Big|_c^1 - \int_c^1 dx$$

e passando al limite

$$\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \log x\,dx = -1\,.$$

Soluzione 8.2 - Con il cambio di variabile $e^x = s$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{s+\frac{1}{s}}\,\frac{1}{s}\,ds = \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+s^2}\,ds =$$
$$= \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{1}{1+s^2}\,ds = \lim_{c\to+\infty}\operatorname{arctg} s\Big|_1^c = \frac{\pi}{4}\,.$$

Soluzione 8.4 - Soluzione 8.5 - Per la convergenza si veda la soluzione dell'Esercizio 8.15. Il calcolo è un esercizio, ci si riduce ad un integrale razionale. Nel caso dell'Esercizio 8.5 si integri per parti, dopodiché si sostituisca la quantità $(x+1)^{1/2}$ con la nuova variabile t. Si ottiene $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(t-1)^2 t}\,dt$.

Soluzione 8.6 - L'integrale converge poiché

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1\,.$$

Volendo svolgere i calcoli si può sostituire e^x con $\operatorname{sen} t$ e ottenere

$$\int_{-\infty}^0 e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{\pi}{4}\,.$$

Soluzione 8.7 - L'integrale diverge a $-\infty$. Vediamo di fare il calcolo diretto. Innanzitutto

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

per cui (per semplicità omettiamo di passare al limite)

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \log|x-2|\Big|_1^2 - \log(x-1)\Big|_1^2 = -\infty\,.$$

Soluzione 8.8 - Si osservi che

$$-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x-4} \leqslant -\frac{1}{5} \qquad x \in [-1,1]$$

per cui

$$-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}} \leqslant \int_{-1}^{1}\frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}} \leqslant -\frac{1}{5}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}\,.$$

Il problema quindi è solo nell'origine e $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx = 2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$ è finito per cui l'integrale dato converge.
Volendo calcolare esplicitamente il valore di tale integrale si ponga $x = t^2$: si otterrà $1/2\log(1/3)$.

Soluzione 8.9 - Dividendo in due l'integrale si può scrivere

$$\int_{-1}^{4}\frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}\,dx + \int_{1}^{4}\frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}\,dx\,.$$

Il primo dei due converge (si veda la soluzione dell'esercizio precedente), il secondo diverge per confronto con

Soluzione 8.10 - Si osservi che

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\Big[\log\big(\log c\big) - \log\big(\log a\big)\Big] = +\infty$$

non solo per $a = 2$, ma per ogni $a > 0$.

Soluzione 8.12 - Il problema è vicino a 1, dove il denominatore si annulla.

Si osservi che $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)}$ per cui la funzione integranda è confrontabile con $1/\sqrt{1-x}$ in 1, cioè

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

di conseguenza l'integrale è convergente. Per calcolarne il valore si ponga $x = \cos u$: si otterrà $\pi/2$.

Soluzione 8.13 - Poiché $\log x \leqslant x-1$ (se non si conosce questa disuguaglianza, la si dimostri per esercizio) si ha

$$\int_1^2 \frac{1}{\log x}\, dx \geqslant \int_1^2 \frac{1}{x-1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{y}\, dy = +\infty\,.$$

Senza fare una stima diretta si può usare il criterio del confronto asintotico e osservare che

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{\log x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\log x} = 1$$

e quindi studiare $\int_1^2 \frac{1}{x-1}\, dx$. Analogamente si risolve l'altro.

Soluzione 8.14 - Si osservi che $\sqrt{x} + x^2 = \sqrt{x}\big(1 + x^{3/2}\big)$ per cui l'integrale converge. Infatti spezzando in due parti si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\, dx\,.$$

Il primo converge perché il denominatore in 0 è asintotico a $\sqrt{x}$, il secondo converge perché il denominatore all'infinito è asintotico a x^2.

Soluzione 8.15 - Dividiamo in due parti il calcolo, cioè scriviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\, dx = \int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\, dx\,.$$

Poiché

$$\frac{1}{2^{3/2}} \leqslant \frac{1}{(x+1)^{3/2}} \leqslant 1 \qquad \text{per } x \in (0,1)$$

e $\log x < 0$ per $x \in (0,1)$ si ha che per il primo dei due termini a destra si ha che (si veda anche l'Esercizio 8.1)

$$-1 = \int_0^1 \log x\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\, dx \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \log x\, dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Per il secondo termine si osservi che per ogni $\alpha > 0$

$$0 \leqslant \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}} = \frac{1}{(x+1)^{\alpha}} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2-\alpha}} \,.$$

Scegliendo α in modo tale che

$$\alpha > 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{3}{2} - \alpha > 0 \tag{8.1}$$

si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}}{\frac{1}{(x+1)^{\alpha}}} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha \text{ soddisfacente (8.1)}$$

per cui per il confronto l'integrale è finito.

Soluzione 8.17 - Si osservi che la funzione $x \mapsto (x-\pi)^2$ è infinitesima di ordine 2 in π, ma anche la funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x$ è infinitesima in π e

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x} = 1$$

per cui la funzione integranda è asintotica, in π, alla funzione $x \mapsto \dfrac{1}{x-\pi}$, il cui integrale tra 0 e π diverge.
Analogamente si ottiene che, dati $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{(\operatorname{sen} x)^{\alpha}}{(\pi - x)^{\beta}}\, dx$ converge per $\beta < 1 + \alpha$.

Soluzione 8.27 - Il problema sta nel denominatore che è infinitesimo in 0. Sviluppando con Taylor si ha che il denominatore è infinitesimo di ordine 3:

$$\operatorname{tg} x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^4)\,.$$

Ma si faccia attenzione che anche il numeratore è infinitesimo in 0 e si ha

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

per cui

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x - x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} x\, \frac{x^2 + o(x^3)}{x^3/3 + o(x^4)} = 3$$

per cui per il confronto con $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ l'integrale dato diverge positivamente.

Soluzione 8.28 - Dalla soluzione precedente si ha che l'integrale dato è finito per $3\beta - 2\alpha < 1$, diverge altrimenti.

Soluzione 8.30 - Scrivendo

$$\left(e^{\frac{\log x}{x}} - 1\right) = \frac{\left(e^{\frac{\log x}{x}} - 1\right)}{\frac{\log x}{x}} \frac{\log x}{x}$$

e poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{\log x}{x}} - 1\right)}{\frac{\log x}{x}} = 1$$

si ha che la funzione integranda è asintotica a $\dfrac{\log x}{x}$ all'infinito. Di conseguenza l'integrale dato diverge.
Diversamente si osservi che

$$e^t \geqslant t + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad e^t - 1 \geqslant t$$

e quindi un confronto diretto fornisce

$$e^{\frac{\log x}{x}} - 1 \geqslant \frac{\log x}{x} \geqslant \frac{1}{x}$$

e, nuovamente, poiché $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ anche l'integrale dato diverge.

Soluzione 8.33 - Dividiamo in due parti l'integrale, visto che il denominatore è infinitesimo in 0:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^2 + \operatorname{sen}\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^2 + \operatorname{sen}\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Il primo dei due integrali è asinotico (in 0) a

$$\frac{x^{\alpha/2}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\,. \tag{8.2}$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^2+\operatorname{sen}\sqrt{x}}}{\frac{x^{\alpha/2}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^{\alpha/2}} \frac{\sqrt{x}}{x^2+\operatorname{sen}\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^{\alpha/2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x^{3/2}+\frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)} = 1\,.$$

Da (8.2) si ricava che il primo dei due integrali converge per $(1-\alpha)/2 < 1$, cioè per $\alpha > -1$.
Il secondo converge perché all'infinito si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}^{\alpha/2} x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

e inoltre

$$\frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2+\operatorname{sen}\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

per cui la funzione integranda è asintotica a $1/x^2$ all'infinito. Da ciò (si confronti anche con la soluzione dell'Esercizio 8.14) si conclude che il secondo integrale converge per qualunque valore di α.

Soluzione 8.36 - L'integrale va diviso nella somma di due integrali impropri:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Per studiarne la convergenza si osservi che

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}\,.$$

Per cui il primo dei due integrali è convergente perché la funzione è confrontabile (in 1) con la funzione $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, che è integrabile in senso improprio in $(1,2)$; a $+\infty$ è confrontabile con $\frac{1}{x^2}$, che è integrabile in senso improprio in $(2,+\infty)$.

Per calcolarne il valore si possono fare i seguenti cambi di variabile:
1^o) poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

si può usare il cambio canonico

$$x = \cosh t.$$

2^o) altrimenti sostituendo y a $1/x$ in

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\, dx$$

si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2\, dy}},$$

che risulta sempre improprio, ma immediatamente integrabile. Si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-y^2\, dy}} = \lim_{c\to 0^+} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-y^2\, dy}} = \lim_{c\to 0^+} \big(\operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen} c\big) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Soluzione 8.37 - L'integrale va diviso nella somma di due integrali impropri e, come nell'esercizio precedente, scriviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\, dx$$

e ognuno dei due va diviso ulteriormente in altri due integrali impropri. Quindi si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + $$
$$+ \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,.$$

Questo integrale diverge perché diverge il primo dei quattro (gli altri tre convergono).

Soluzione 8.39 - Converge per ogni $\alpha > 0$ (Suggerimento: si veda un analogo esercizio sulle serie).

Soluzione 8.40 - Suggerimento: si scriva x^x come $e^{x\log x}$.

Soluzione 8.43 - Poiché si ha che

$$\left|\frac{\cos x}{\cosh x}\right| \leqslant \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

si conclude che l'integrale converge assolutamente.

Soluzione 8.44 - Si osservi che il denominatore è un infinitesimo in 2. Infatti, poiché

$$e^{x-2} - 1 = x - 2 + o(x-2)$$

si ha

$$\sqrt{x-2} + e^{x-2} - 1 = \sqrt{x-2}\left[1 + \frac{e^{x-2}-1}{\sqrt{x-2}}\right]$$

e quindi passando al limite per $x \to 2^+$ la funzione integranda converge a 2, quindi è limitata (e continua fino a 2 se la estendiamo).
Quindi il problema che rimane è solo quello a $+\infty$. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+e^{x-2}-1}}{\frac{x}{e^x}} = e^2$$

si ha che l'integrale dato ha lo stesso carattere di

$$\int_2^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$$

che converge (come al solito, per confronto con $1/x^\alpha$ con $\alpha > 1$).

Soluzione 8.45 - Si verifica che per $\alpha < 0$ la funzione integranda tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, per cui l'integrale non può convergere.
Limitandosi ai casi in cui $\alpha \geqslant 0$ si verifica che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \qquad \text{è (definitivamente) negativa}$$

per ogni $\beta \in \mathbf{R}$ se $\alpha > 0$ e per ogni $\beta > 0$ se $\alpha = 0$. Per gli altri valori di α e β essendo f non decrescente l'integrale improprio diverge. Essendo quindi

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$$

definitivamente decrescente per tali valori di α e β possiamo usare il criterio integrale per le serie e studiare

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}.$$

Ancora: per i valori di α e β per i quali f decrescente è decrescente anche la successione

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$$

e quindi si può applicare il criterio di condensazione di Cauchy e studiare la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha n^\beta}$$

che avrà lo stesso carattere della serie, e quindi dell'integrale di partenza. Si conclude che l'integrale dato converge se e solo se

$$\text{per ogni } \beta \in \mathbf{R} \text{ se } \alpha > 1, \qquad \text{per } \beta > 1 \text{ se } \alpha = 1$$

e diverge positivamente negli altri casi.

Soluzione 8.46 - Si effettui il cambio di variabile $y = 1/x$ per concludere che l'integrale dato converge se e solo se

$$\text{per ogni } \beta \in \mathbf{R} \text{ se } \alpha < 1, \qquad \text{per } \beta > 1 \text{ se } \alpha = 1$$

e diverge positivamente negli altri casi.

Soluzione 8.47 - Soluzione 8.48 - Soluzione 8.49 - Innanzitutto separiamo lo studio in due integrali

$$I_1 = \int_0^1 x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx, \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx$$

e partiamo dallo studio del primo integrale, che può essere improprio per valori negativi di β. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha}{x^{\beta+\alpha}} = 1$$

si ha che tale integrale converge se e solo se

$$\beta + \alpha > -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta > -\alpha - 1\,.$$

Per studiare I_2 usiamo il cambio di variabile $y = x^\alpha$: si ottiene

$$\int_1^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx = \int_1^{+\infty} y^{\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}} \operatorname{sen} y \, dy$$

per cui se l'esponente $\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}$ è nagativo la funzione $f(y) = y^{\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}}$ risulta decrescente e possiamo applicare i criteri noti per dedurre la convergenza dell'integrale. Tale esponente risulta negativo (si ricordi che stiamo considerando $\alpha > 0$) se

$$\beta < \alpha - 1\,.$$

In particolare

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \operatorname{sen} x^2 \, dx \qquad \text{convergono}$$

e in generale, dato $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx \qquad \text{converge per} \qquad -\alpha - 1 < \beta < \alpha - 1\,.$$

Analogamente si ha che

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cos x^2 \, dx \qquad \text{convergono}$$

e in generale, dato $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} x^\beta \cos x^\alpha \, dx \qquad \text{converge per} \qquad -1 < \beta < \alpha - 1\,.$$

Si noti la diversa limitazione, rispetto al caso precedente, dal basso per β. Perché?

Soluzione 8.51 - La funzione $f(x) = \dfrac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x$ è, definitivamente, decrescente. Infatti

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\Big[n - \log x^n\Big] < 0 \qquad \text{per ogni } x > e$$

per cui possiamo applicare i criteri noti. Infatti, anche se f non è decrescente per ogni $x > 1$, possiamo (analogamente alle serie) scrivere

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x\, dx = \int_1^{e} \frac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x\, dx + \int_e^{+\infty} \frac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x\, dx$$

e studiare solamente il secondo come integrale improprio.

Soluzione 8.52 - Converge assolutamente.

Soluzione 8.53 - Il primo converge, il secondo diverge a $+\infty$.

Soluzione 8.55 - L'integrale converge per ogni $n \in \mathbf{N}$. Infatti la funzione

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^{\log x}}$$

ha derivata definitivamente negativa:

$$f_n'(x) = \frac{1}{\left(x^{\log x}\right)^2}\, x^{n-1} x^{\log x}\big[n - 2\log x\big] < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > e^{n/2}.$$

Per quanto visto per mostrare la convergenza degli integrali oscillanti e dalla stima sul resto per le serie a termini a segno alterno,

$$\left|\sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n a_n\right| \leqslant a_k\,,$$

si ha

$$\left|\int_{k\pi}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x^n}{x^{\log x}}\, |\operatorname{sen} x|\, dx$$

e, supponendo $k\pi > e^{n/2}$, si ha

$$\left|\int_{k\pi}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x^n}{x^{\log x}}\, dx \leqslant \pi\, \frac{(k\pi)^n}{(k\pi)^{\log k\pi}}.$$

Per una dato $a > 0$ si consideri $k \in \mathbf{N}$ tale che $(k-1)\pi \leqslant a$ e $k\pi > a$, cioè

$$k - 1 = \left[\frac{a}{\pi}\right].$$

Si ha, usando la monotonia di f_n e supponendo $k\pi > e^{n/2}$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx - \int_0^a \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| = \left|\int_a^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| = \\
= \left|\int_a^{k\pi} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{k\pi}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| \leqslant \\
\leqslant \left|\int_a^{k\pi} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| + \left|\int_{k\pi}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| \leqslant \\
\leqslant \frac{a^n}{a^{\log a}}(k\pi - a) + \pi \frac{(k\pi)^n}{(k\pi)^{\log k\pi}} \leqslant \\
\leqslant \pi \frac{a^n}{a^{\log a}} + \pi \frac{a^n}{a^{\log a}} = 2\pi \frac{a^n}{a^{\log a}}.
\end{aligned}$$

Ora si fissi ora $\varepsilon > 0$: per trovare a tale che sia soddisfatta la richiesta iniziale sarà sufficiente scegliere

$$2\pi \frac{a^n}{a^{\log a}} < \varepsilon.$$

In generale si deduce quindi che una stima di

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x\, dx\right|,$$

con f decrescente ed infinitesima all'infinito è data da

$$2\pi f(a).$$

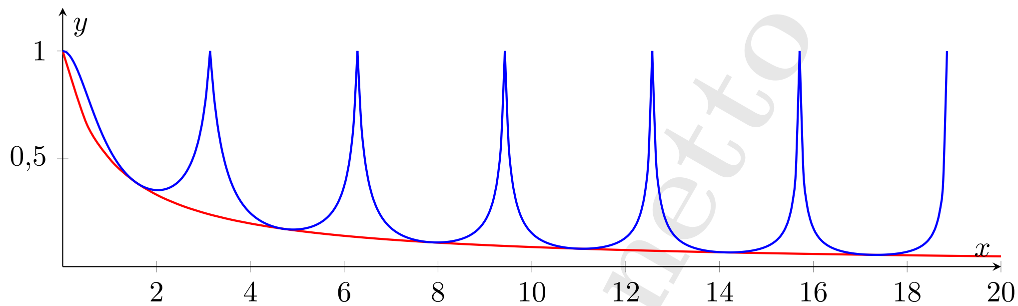
Soluzione 8.56 - Nella figura riportata di seguito in rosso è tracciato il grafico della funzione $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^\alpha}$, in blu il grafico della funzione $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^\alpha|\operatorname{sen} x|}$ per lo stesso valore di α. Poiché è evidente che

$$\frac{1}{1+x^\alpha|\operatorname{sen} x|} \geqslant \frac{1}{1+x^\alpha}$$

e che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha}\, dx = +\infty \qquad \text{per } \alpha \leqslant 1$$

si conclude che per tali valori di α anche l'integrale dato diverge, ma questo non chiude lo studio del problema proposto.



Osserviamo più in dettaglio una delle cuspidi della funzione integranda: derivando la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|}$$

nell'intervallo $(k\pi, (k+1)\pi)$ con k pari in modo tale che $\operatorname{sen} x$ sia positivo si ottiene

$$f'(x) = -\frac{\alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen} x + x^\alpha \cos x}{(1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|)^2}$$

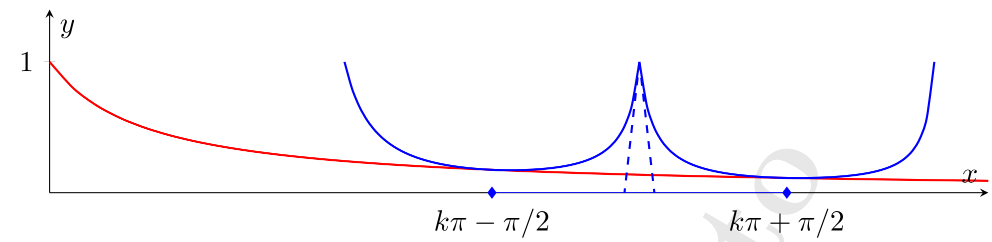
per cui in $k\pi$ la derivata è $-(k\pi)^\alpha$. Analogamente il limite della derivata da sinistra di f nel punto $k\pi$ è $(k\pi)^\alpha$. Di conseguenza la rette tangenti ai grafici di

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x^\alpha \operatorname{sen} x} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{1 + x^\alpha \operatorname{sen} x}$$

nel punto $k\pi$ sono

$$r(x) = (k\pi)^\alpha (x - k\pi) + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \rho(x) = -(k\pi)^\alpha (x - k\pi) + 1 = 0$$

i cui grafici sono tratteggiati in figura.



Chiaramente considerando i due punti $k\pi - \pi/2 = (k - 1/2)\pi$ e $k\pi + \pi/2 = (k + 1/2)\pi$, marcati in figura da un "quadro", si ha che

$$\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2} \frac{1}{1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|}\, dx \geqslant A_k$$

dove A_k denota l'area del triangolino isoscele i cui due lati maggiori sono tratteggiati. Valutiamo allora l'area A_k. Troviamo prima i due punti in cui si annullano le due funzioni r e ρ:

$$r(x) = 0 \quad \text{per } x = k\pi - \frac{1}{(k\pi)^\alpha} \qquad \rho(x) = 0 \quad \text{per } x = k\pi + \frac{1}{(k\pi)^\alpha}$$

per cui la base del triangolino è data da

$$\left(k\pi + \frac{1}{(k\pi)^\alpha}\right) - \left(k\pi + \frac{1}{(k\pi)^\alpha}\right) = \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\,.$$

Concludiamo che

$$\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2} \frac{1}{1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|}\, dx \geqslant A_k = \frac{1}{(k\pi)^\alpha}\,.$$

Questa stima non ci aiuta, visto che, per $\alpha > 1$, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^\alpha} \qquad \text{converge.}$$

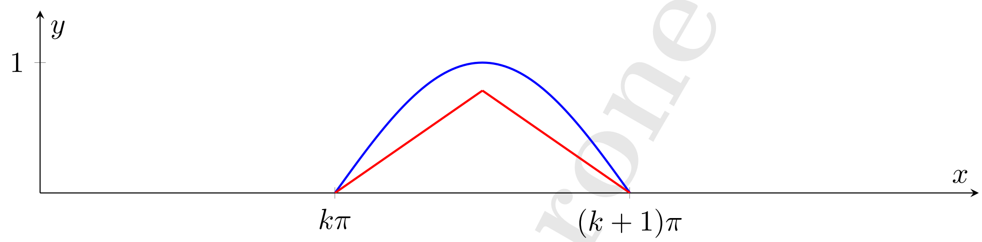
Proviamo allora con una stima dall'alto. Scrivendo

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|}\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|}\, dx$$

stimiamo in altro modo ogni singolo termine

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+x^\alpha |\operatorname{sen} x|}\, dx\,.$$

Come mostrato in figura stimiamo dal basso la funzione $|\operatorname{sen} x|$ con una funzione lineare a tratti, evidenziata in rosso.



Precisamente (il coefficiente $1/2$ è scelto arbitrariamente, un qualunque altro numero tra 0 e $2/\pi$ va comunque bene)

$$|\operatorname{sen} x| \geqslant g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\big(x-k\pi\big) & \text{per } x \in \Big[k\pi, k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Big]\,, \\ -\dfrac{1}{2}\big(x-(k+1)\pi\big) & \text{per } x \in \Big[k\pi+\dfrac{\pi}{2}, (k+1)\pi\Big]\,. \end{cases}$$

Inoltre

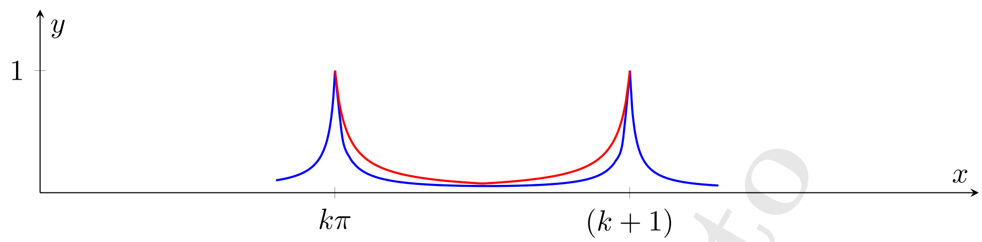
$$x^\alpha \geqslant (k\pi)^\alpha \qquad\qquad \text{per } x \in \big[k\pi, (k+1)\pi\big]\,.$$

Di conseguenza si ha che

$$\frac{1}{1+x^\alpha |\operatorname{sen} x|} \leqslant \frac{1}{1+(k\pi)^\alpha g(x)} \qquad\qquad \text{in } \big[k\pi, (k+1)\pi\big]$$

e il grafico del termine a destra è evidenziato in rosso in un tratto $\big[k\pi, (k+1)\pi\big]$ nella figura che segue. Ora integriamo

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+(k\pi)^\alpha g(x)}\, dx\,.$$



Per fare ciò ci possiamo limitare a valutare l'integrale su metà intervallo, la parte dove è maggiore,

$$\int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+(k\pi)^\alpha g(x)}\,dx = \int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1-(k\pi)^\alpha (x-(k+1)\pi)/2}\,dx$$

e raddoppiare poi il risultato. Si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{1}{\frac{(k\pi)^\alpha (k+1)\pi}{2}+1-\frac{(k\pi)^\alpha}{2}x}\,dx = \\
&\qquad = -\frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left(\frac{(k\pi)^\alpha (k+1)\pi}{2}+1-\frac{(k\pi)^\alpha}{2}x\right)\Bigg|_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} = \\
&\qquad = \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left(\frac{(k\pi)^\alpha (k+1)\pi}{2}+1-\frac{(k\pi)^{\alpha+1}}{2}-\frac{(k\pi)^\alpha \pi}{4}\right) = \\
&\qquad = \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left(1+\frac{(k\pi)^\alpha \pi}{4}\right) \leqslant \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left(1+(k\pi)^\alpha\right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left((2k\pi)^\alpha\right) = \frac{2\alpha}{(k\pi)^\alpha}\log(2k\pi).
\end{aligned}$$

A questo punto, osservando che la serie

$$\sum_k \frac{\log k}{k^\alpha}$$

converge per $\alpha > 1$, finalmente si conclude.

Soluzione 8.58 - Per questo esercizio, come per gli altri simili a questo, va utilizzato il confronto tra serie numeriche e integrali impropri in maniera accorta. In maniera simile a quanto fatto nell'**Approfondimento** a fine paragrafo 5 della parte di teoria, si può osservare che, poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$$

si ha che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N \in \mathbf{N}$ tale che

$$(1-\epsilon)\frac{1}{\sqrt{n}} < \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}} < (1+\epsilon)\frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{8.3}$$

Da quanto visto a teoria sappiamo che

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\displaystyle\int_0^N \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx} = 1.$$

Si osservi che non è importante (in questo caso!) che l'integrale parta da 1, da un qualunque numero positivo o da 0, visto che comunque l'integrale $\displaystyle\int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ è convergente, qualunque sia $\xi > 0$. Ad ogni modo si può considerare, come al solito, il seguente limite, ottenendo sempre il medesimo risultato:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\displaystyle\int_1^N \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx} = 1.$$

Poiché da (8.3)

$$(1-\epsilon)\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{N} \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}} < (1+\epsilon)\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e inoltre

$$\int_0^N \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{N}$$

si conclude che

$$2(1-\epsilon) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{N}} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{N}} \leqslant 2(1+\epsilon)\,.$$

Poiché ciò è vero per ogni $\epsilon > 0$ si deduce che il limite

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{N}}$$

esiste ed è uguale a 2.
Di conseguenza, dato $\lambda > 0$, si può scegliere la successione

$$b_N = \frac{2}{\lambda}\sqrt{N}$$

oppure si può scegliere $\lambda = 2$ e prendere semplicemente $b_N = \sqrt{N}$.
La conclusione è che per ogni successione a_n asintotica a $1/\sqrt{n}$ vale

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{\sqrt{N}} = \lambda \qquad \text{per un qualche } \lambda \in (0, +\infty).$$

Soluzione 8.59 - $b_n = (\log n)^2$

Soluzione 8.60 - $b_n = \log\log n$.

Soluzione 8.61 - Sappiamo che la funzione

$$f_t(x) = x^t e^{-x}$$

è definitivamente decrescente, integrabile in senso improprio in $(0, +\infty)$ e

$$\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\, dx = k!\,.$$

Sappiamo (si veda la parte di teoria riguardante la gamma di Eulero) che la funzione

$$F(t) := \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\, dx$$

ha massimo in t, per cui

$$\begin{aligned} &\frac{n^k}{e^n} \leqslant \frac{x^k}{e^x} \leqslant \frac{(n+1)^k}{e^{n+1}} \qquad \text{per } x \in [n, n+1] \quad \text{fintanto che } n+1 \leqslant k\,, \\ &\frac{(n+1)^k}{e^{n+1}} \leqslant \frac{x^k}{e^x} \leqslant \frac{n^k}{e^n} \qquad \text{per } x \in [n, n+1] \quad \text{se } n \geqslant k\,. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi in cui N sia maggiore di k si ha che

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n^k}{e^n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{n^k}{e^n} + \sum_{n=k}^{N} \frac{n^k}{e^n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{n^k}{e^n} + \sum_{n=k-1}^{N-1} \frac{(n+1)^k}{e^{n+1}} \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^k x^k e^{-x}\, dx + \int_{k-1}^{N} x^k e^{-x}\, dx = \int_0^N x^k e^{-x}\, dx + \int_{k-1}^{k} x^k e^{-x}\, dx\,.$$

Mandando N a $+\infty$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{e^n} \leqslant \int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\, dx + \int_{k-1}^{k} x^k e^{-x}\, dx = k! + \int_{k-1}^{k} x^k e^{-x}\, dx\,.$$

D'altra parte, in maniera analoga, si ha

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n^k}{e^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^k}{e^n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{n^k}{e^n} + \sum_{n=k+1}^{N} \frac{n^k}{e^n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(n+1)^k}{e^{n+1}} + \sum_{n=k+1}^{N} \frac{n^k}{e^n} \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^k x^k e^{-x}\, dx + \int_{k+1}^{N} x^k e^{-x}\, dx = \int_0^N x^k e^{-x}\, dx - \int_k^{k+1} x^k e^{-x}\, dx$$

e mandando N a $+\infty$ si ottiene

$$k! - \int_k^{k+1} x^k e^{-x}\, dx \leqslant S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{e^n} \leqslant k! + \int_{k-1}^{k} x^k e^{-x}\, dx.$$

Ora, per dare la stima per la quantità

$$S - \sum_{n=0}^{N} \frac{n^k}{e^n}$$

si può supporre che N sia maggiore di k e, integrando per parti iterativamente, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_N^{+\infty} x^k e^{-x}\, dx &= -x^k e^{-x}\Big|_N^{+\infty} - \int_N^{+\infty} k\, x^{k-1}(-e^{-x})\, dx = \\
&= N^k e^{-N} + k \int_N^{+\infty} x^{k-1} e^{-x}\, dx = \\
&= N^k e^{-N} + kN^{k-1}e^{-N} + k(k-1) \int_N^{+\infty} x^{k-2} e^{-x}\, dx = \\
&= \quad \vdots \quad = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{j!} N^j e^{-N} + k! \int_N^{+\infty} e^{-x}\, dx = e^{-N} k! \sum_{j=0}^{k} \frac{N^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Per cui

$$S - \sum_{n=0}^{N} \frac{n^k}{e^n} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{n^k}{e^n} \leqslant \int_N^{+\infty} x^k e^{-x}\, dx = e^{-N} k! \sum_{j=0}^{k} \frac{N^j}{j!}.$$