Capitolo 14

Integrali generalizzati

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 18 DICEMBRE 2023

Si studino e si calcolino i seguenti integrali impropri:

ESERCIZIO 14.1 - $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$

ESERCIZIO 14.2 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$

ESERCIZIO 14.3 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x+1} \, dx$

ESERCIZIO 14.4 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} \, dx$

ESERCIZIO 14.5 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}} \, dx$

ESERCIZIO 14.6 - $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x \sqrt{1-e^{2x}} \, dx$

ESERCIZIO 14.7 - $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)} \, dx$

ESERCIZIO 14.8 - $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}} \, dx$

Esercizio 14.9 - $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}\,dx$

Esercizio 14.10 - $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx$

Esercizio 14.11 - $\displaystyle\int_{0}^{2} x\log(2-x)\,dx$

Esercizio 14.12 - $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

****

Si studino i seguenti integrali impropri:

Esercizio 14.13 - $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\log x}\,dx$ e $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\log x}\,dx$

Esercizio 14.14 - $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$

Esercizio 14.15 - $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\,dx$

Esercizio 14.16 - $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{(x-1)^{\alpha}(3-x)^{\beta}}\,dx, \qquad \alpha, \beta > 0$

Esercizio 14.17 - $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{(x-\pi)^2}\,dx$

Esercizio 14.18 - $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$

Esercizio 14.19 - $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\alpha} x\,dx \qquad \alpha > 0$

Esercizio 14.20 - $\displaystyle\int_{5}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^5-7x^2+3}\,dx$

Esercizio 14.21 - $\displaystyle\int_5^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^5-7x^2+3}\right)\,dx$

Esercizio 14.22 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^3+x}{x^5+7x^2}\right)\,dx$

Esercizio 14.23 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^5+7x^2}{x^3+x}\right)}\,dx.$

Esercizio 14.24 - $\displaystyle\int_5^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^\alpha+2x}{x^\beta+3}\right)\,dx, \qquad \alpha,\beta>0$

Esercizio 14.25 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^\alpha}\,dx, \qquad \alpha>0$

Esercizio 14.26 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^\alpha}\,dx, \qquad \alpha>0$

Esercizio 14.27 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x - x}\,dx$

Esercizio 14.28 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(1-\cos x)^\alpha}{(\operatorname{tg} x - x)^\beta}\,dx \qquad \alpha,\beta>0$

Esercizio 14.29 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}-1}{x^\alpha}\,dx$

Esercizio 14.30 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e^{\frac{\log x}{x}}-1\right)\,dx$

Esercizio 14.31 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(x^{1/x}-1\right)\,dx$

Esercizio 14.32 - $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}{x^\alpha}\,dx$

Esercizio 14.33 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^2+\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,dx$

Esercizio 14.34 - $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\log x}{\sqrt{x\cos x}}\,dx$

Esercizio 14.35 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4} + 7x + 8\log x + \sqrt[4]{x^5}}$

Esercizio 14.36 - Si studi il seguente integrale e lo si calcoli facendo un cambio di variabile:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Esercizio 14.37 - Si studi il seguente integrale e lo si calcoli facendo un cambio di variabile:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Esercizio 14.38 - $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx, \qquad \alpha > 0$

Esercizio 14.39 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\, dx, \qquad \alpha > 0$

Esercizio 14.40 - $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^x - 1}{(\sqrt[3]{1+x} - 1)^\alpha}\, dx, \qquad \alpha > 0$

Esercizio 14.41 - $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(1 - \sqrt{\cos x}\right)}{x^\alpha}}\, dx, \qquad \alpha > 0$

Esercizio 14.42 - $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x\log x}{1+x^2}\, \operatorname{sen} x\, dx$

Esercizio 14.43 - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\, dx$

Esercizio 14.44 - $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2} + e^{x-2} - 1}\, dx$

Esercizio 14.45 - $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\, dx$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Esercizio 14.46 - $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\, dx$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Esercizio 14.47 - $\displaystyle\int_{1/e}^{1} \frac{1}{x^\alpha(-\log x)^\beta}\,dx$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Esercizio 14.48 - $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^\alpha(-\log x)^\beta}\,dx$ al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Esercizio 14.49 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2\,dx$

Esercizio 14.50 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\operatorname{sen} x^2\,dx$

Esercizio 14.51 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha\,dx, \qquad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R}$

Esercizio 14.52 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\beta \cos x^\alpha\,dx, \qquad \alpha > 0,\ \beta \in \mathbf{R}$

Esercizio 14.53 - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x\,dx$

Esercizio 14.54 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \operatorname{sen} x\,dx$

Esercizio 14.55 - $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log x}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log x}\,dx$

Esercizio 14.56 - $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^3} \operatorname{sen} x\,dx, \qquad$ al variare di $a, b, c \in \mathbf{R}$

Esercizio 14.57 - Si verifichi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\,dx, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

(∗) Dopodiché si dia, fissato $\varepsilon > 0$, un valore di $a > 0$ per il quale

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\,dx - \int_0^{a} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\,dx \right| < \varepsilon.$$

Esercizio 14.58 - (∗) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha|\operatorname{sen} x|}\,dx \qquad$ al variare di $\alpha > 0$.

Soluzioni

Soluzione 14.1 - Integrando per parti si ha

$$\int_c^1 \log x\, dx = x \log x \Big|_c^1 - \int_c^1 dx$$

e passando al limite

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \log x\, dx = -1\,.$$

Soluzione 14.2 - Con il cambio di variabile $e^x = s$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{s+\frac{1}{s}}\, \frac{1}{s}\, ds = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}\, ds =$$
$$= \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{1+s^2}\, ds = \lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg} s \Big|_1^c = \frac{\pi}{4}\,.$$

Soluzione 14.4 - Soluzione 14.5 - Per la convergenza si veda la soluzione dell'Esercizio 14.15. Il calcolo è un esercizio, ci si riduce ad un integrale razionale. Nel caso dell'Esercizio 14.5 si integri per parti, dopodiché si sostituisca la quantità $(x+1)^{1/2}$ con la nuova variabile t. Si ottiene $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t-1)^2 t}\, dt$.

Soluzione 14.6 - L'integrale converge poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^0 e^x\, dx = 1\,.$$

Volendo svolgere i calcoli si può sostituire e^x con $\operatorname{sen} t$ e ottenere

$$\int_{-\infty}^0 e^x\sqrt{1-e^{2x}}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, \cos t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt = \frac{\pi}{4}\,.$$

Soluzione 14.7 - L'integrale diverge a $-\infty$. Vediamo di fare il calcolo diretto. Innanzitutto

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

per cui (per semplicità omettiamo di passare al limite)

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, dx = \log|x-2|\Big|_1^2 - \log(x-1)\Big|_1^2 = -\infty\,.$$

Soluzione 14.8 - Si osservi che

$$-\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{x-4} \leqslant -\frac{1}{5} \qquad\qquad x \in [-1,1]$$

per cui

$$-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}} \leqslant -\frac{1}{5}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,.$$

Il problema quindi è solo nell'origine e $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$ è finito per cui l'integrale dato converge.
Volendo calcolare esplicitamente il valore di tale integrale si ponga $x = t^2$: si otterrà $1/2\log(1/3)$.

Soluzione 14.9 - Dividendo in due l'integrale si può scrivere

$$\int_{-1}^{4} \frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}\, dx + \int_{1}^{4} \frac{1}{(x-4)\sqrt{|x|}}\, dx\,.$$

Il primo dei due converge (si veda la soluzione dell'esercizio precedente), il secondo diverge per confronto con

Soluzione 14.10 - Si osservi che

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \Big[\log\big(\log c\big) - \log\big(\log a\big)\Big] = +\infty$$

non solo per $a = 2$, ma per ogni $a > 0$.

Soluzione 14.12 - Il problema è vicino a 1, dove il denominatore si annulla. Si osservi che $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)}$ per cui la funzione integranda è confrontabile con $1/\sqrt{1-x}$ in 1, cioè

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

di conseguenza l'integrale è convergente. Per calcolarne il valore si ponga $x = \cos u$: si otterrà $\pi/2$.

Soluzione 14.13 - Poiché $\log x \leqslant x - 1$ (se non si conosce questa disuguaglianza, la si dimostri per esercizio) si ha

$$\int_1^2 \frac{1}{\log x}\,dx \geqslant \int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{y}\,dy = +\infty\,.$$

Senza fare una stima diretta si può usare il criterio del confronto asintotico e osservare che

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{\log x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\log x} = 1$$

e quindi studiare $\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$. Analogamente si risolve l'altro.

Soluzione 14.14 - Si osservi che $\sqrt{x}+x^2 = \sqrt{x}\big(1+x^{3/2}\big)$ per cui l'integrale converge. Infatti spezzando in due parti si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx\,.$$

Il primo converge perché il denominatore in 0 è asintotico a $\sqrt{x}$, il secondo converge perché il denominatore all'infinito è asintotico a x^2.

Soluzione 14.15 - Dividiamo in due parti il calcolo, cioè scriviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\,dx\,.$$

Poiché

$$\frac{1}{2^{3/2}} \leqslant \frac{1}{(x+1)^{3/2}} \leqslant 1 \qquad \text{per } x \in (0,1)$$

e $\log x < 0$ per $x \in (0,1)$ si ha che per il primo dei due termini a destra si ha che (si veda anche l'Esercizio 14.1)

$$-1 = \int_0^1 \log x\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}\,dx \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \log x\,dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

Per il secondo termine si osservi che per ogni $\alpha > 0$

$$0 \leqslant \frac{\log x}{(x+1)^{3/2}} = \frac{1}{(x+1)^{\alpha}} \frac{\log x}{(x+1)^{3/2-\alpha}} .$$

Scegliendo α in modo tale che

$$\alpha > 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{3}{2} - \alpha > 0 \tag{14.1}$$

si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\log x}{(x+1)^{3/2}}}{\frac{1}{(x+1)^{\alpha}}} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha \text{ soddisfacente (14.1)}$$

per cui per il confronto l'integrale è finito.

Soluzione 14.17 - Si osservi che la funzione $x \mapsto (x-\pi)^2$ è infinitesima di ordine 2 in π, ma anche la funzione $x \mapsto \operatorname{sen} x$ è infinitesima in π e

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\pi - x} = 1$$

per cui la funzione integranda è asintotica, in π, alla funzione $x \mapsto \dfrac{1}{x-\pi}$, il cui integrale tra 0 e π diverge.

Analogamente si ottiene che, dati $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{(\operatorname{sen} x)^{\alpha}}{(\pi - x)^{\beta}}\, dx$ converge per $\beta < 1 + \alpha$.

Soluzione 14.27 - Il problema sta nel denominatore che è infinitesimo in 0. Sviluppando con Taylor si ha che il denominatore è infinitesimo di ordine 3:

$$\operatorname{tg} x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^4) .$$

Ma si faccia attenzione che anche il numeratore è infinitesimo in 0 e si ha

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

per cui

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x - x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+} x\, \frac{x^2 + o(x^3)}{x^3/3 + o(x^4)} = 3$$

per cui per il confronto con $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ l'integrale dato diverge positivamente.

Soluzione 14.28 - Dalla soluzione precedente si ha che l'integrale dato è finito per $3\beta - 2\alpha < 1$, diverge altrimenti.

Soluzione 14.30 - Scrivendo

$$\left(e^{\frac{\log x}{x}} - 1\right) = \frac{\left(e^{\frac{\log x}{x}} - 1\right)}{\frac{\log x}{x}} \, \frac{\log x}{x}$$

e poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{\log x}{x}} - 1\right)}{\frac{\log x}{x}} = 1$$

si ha che la funzione integranda è asintotica a $\dfrac{\log x}{x}$ all'infinito. Di conseguenza l'integrale dato diverge.
Diversamente si osservi che

$$e^t \geqslant t + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad e^t - 1 \geqslant t$$

e quindi un confronto diretto fornisce

$$e^{\frac{\log x}{x}} - 1 \geqslant \frac{\log x}{x} \geqslant \frac{1}{x}$$

e, nuovamente, poiché $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ anche l'integrale dato diverge.

Soluzione 14.33 - Dividiamo in due parti l'integrale, visto che il denominatore è infinitesimo in 0:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^2 + \operatorname{sen}\sqrt{x}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^2 + \operatorname{sen}\sqrt{x}}\, dx\,.$$

Il primo dei due integrali è asinotico (in 0) a

$$\frac{x^{\alpha/2}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}\,. \tag{14.2}$$

Infatti

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^2 + \operatorname{sen}\sqrt{x}}}{\frac{x^{\alpha/2}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^{\alpha/2}} \, \frac{\sqrt{x}}{x^2 + \operatorname{sen}\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha/2} x}{x^{\alpha/2}} \, \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(x^{3/2} + \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)} = 1\,.$$

Da (14.2) si ricava che il primo dei due integrali converge per $(1-\alpha)/2 < 1$, cioè per $\alpha > -1$.
Il secondo converge perché all'infinito si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg}^{\alpha/2} x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

e inoltre

$$\frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{x^2 + \operatorname{sen}\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x^2}$$

per cui la funzione integranda è asintotica a $1/x^2$ all'infinito. Da ciò (si confronti anche con la soluzione dell'Esercizio 14.14) si conclude che il secondo integrale converge per qualunque valore di α.

Soluzione 14.36 - L'integrale va diviso nella somma di due integrali impropri:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

Per studiarne la convergenza si osservi che

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}\,.$$

Per cui il primo dei due integrali è convergente perché la funzione è confrontabile (in 1) con la funzione $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, che è integrabile in senso improprio in $(1,2)$; a $+\infty$ è confrontabile con $\frac{1}{x^2}$, che è integrabile in senso improprio in $(2,+\infty)$.
Per calcolarne il valore si possono fare i seguenti cambi di variabile:
1^o) poiché

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

si può usare il cambio canonico

$$x = \cosh t.$$

2^o) altrimenti sostituendo y a $1/x$ in

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx$$

si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2\,dy}},$$

che risulta sempre improprio, ma immediatamente integrabile. Si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-y^2\,dy}} = \lim_{c\to 0^+} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-y^2\,dy}} = \lim_{c\to 0^+} \big(\operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen} c\big) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Soluzione 14.37 - L'integrale va diviso nella somma di due integrali impropri e, come nell'esercizio precedente, scriviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,dx$$

e ognuno dei due va diviso ulteriormente in altri due integrali impropri. Quindi si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \\ + \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\,.$$

Questo integrale diverge perché diverge il primo dei quattro (gli altri tre convergono).

Soluzione 14.39 - Converge per ogni $\alpha > 0$ (Suggerimento: si veda un analogo esercizio sulle serie).

Soluzione 14.40 - Suggerimento: si scriva x^x come $e^{x\log x}$.

Soluzione 14.43 - Poiché si ha che

$$\left|\frac{\cos x}{\cosh x}\right| \leqslant \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

si conclude che l'integrale converge assolutamente.

Soluzione 14.44 - Si osservi che il denominatore è un infinitesimo in 2. Infatti, poiché

$$e^{x-2} - 1 = x - 2 + o(x-2)$$

si ha

$$\sqrt{x-2} + e^{x-2} - 1 = \sqrt{x-2}\left[1 + \frac{e^{x-2}-1}{\sqrt{x-2}}\right]$$

e quindi passando al limite per $x \to 2^+$ la funzione integranda converge a 2, quindi è limitata (e continua fino a 2 se la estendiamo).
Quindi il problema che rimane è solo quello a $+\infty$. Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}+e^{x-2}-1}}{\frac{x}{e^x}} = e^2$$

si ha che l'integrale dato ha lo stesso carattere di

$$\int_2^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$$

che converge (come al solito, per confronto con $1/x^\alpha$ con $\alpha > 1$).

Soluzione 14.45 - Si verifica che per $\alpha < 0$ la funzione integranda tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, per cui l'integrale non può convergere.
Limitandosi ai casi in cui $\alpha \geqslant 0$ si verifica che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta} \quad \text{è (definitivamente) negativa}$$

per ogni $\beta \in \mathbf{R}$ se $\alpha > 0$ e per ogni $\beta > 0$ se $\alpha = 0$. Per gli altri valori di α e β essendo f non decrescente l'integrale improprio diverge. Essendo quindi

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}$$

definitivamente decrescente per tali valori di α e β possiamo usare il criterio integrale per le serie e studiare

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}.$$

Ancora: per i valori di α e β per i quali f decrescente è decrescente anche la successione

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$$

e quindi si può applicare il criterio di condensazione di Cauchy e studiare la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha n^\beta}$$

che avrà lo stesso carattere della serie, e quindi dell'integrale di partenza. Si conclude che l'integrale dato converge se e solo se

$$\text{per ogni } \beta \in \mathbf{R} \text{ se } \alpha > 1, \qquad \text{per } \beta > 1 \text{ se } \alpha = 1$$

e diverge positivamente negli altri casi.

Soluzione 14.46 - Converge se e solo se $\beta < 1$ e per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluzione 14.47 - Converge se e solo se $\beta < 1$ e per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluzione 14.48 - Si effettui il cambio di variabile $y = 1/x$ per concludere che l'integrale dato converge se e solo se

$$\text{per ogni } \beta \in \mathbf{R} \text{ se } \alpha < 1, \qquad \text{per } \beta > 1 \text{ se } \alpha = 1$$

e diverge positivamente negli altri casi.

Soluzione 14.49 - Soluzione 14.50 - Soluzione 14.51 - Innanzitutto separiamo lo studio in due integrali

$$I_1 = \int_0^1 x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx, \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx$$

e partiamo dallo studio del primo integrale, che può essere improprio per valori negativi di β. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha}{x^{\beta+\alpha}} = 1$$

si ha che tale integrale converge se e solo se

$$\beta + \alpha > -1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta > -\alpha - 1\,.$$

Per studiare I_2 usiamo il cambio di variabile $y = x^\alpha$: si ottiene

$$\int_1^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx = \int_1^{+\infty} y^{\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}} \operatorname{sen} y \, dy$$

per cui se l'esponente $\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}$ è negativo la funzione $f(y) = y^{\frac{\beta+1-\alpha}{\alpha}}$ risulta decrescente e possiamo applicare i criteri noti per dedurre la convergenza dell'integrale. Tale esponente risulta negativo (si ricordi che stiamo considerando $\alpha > 0$) se

$$\beta < \alpha - 1 \, .$$

In particolare

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x^2 \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \operatorname{sen} x^2 \, dx \qquad \text{convergono}$$

e in generale, dato $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} x^\beta \operatorname{sen} x^\alpha \, dx \qquad \text{converge per} \qquad -\alpha - 1 < \beta < \alpha - 1 \, .$$

Analogamente si ha che

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \cos x^2 \, dx \qquad \text{convergono}$$

e in generale, dato $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} x^\beta \cos x^\alpha \, dx \qquad \text{converge per} \qquad -1 < \beta < \alpha - 1 \, .$$

Si noti la diversa limitazione, rispetto al caso precedente, dal basso per β. Perché?

Soluzione 14.53 - La funzione $f(x) = \dfrac{\log x^n}{x}$ è, definitivamente, decrescente. Infatti

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\Big[n - \log x^n\Big] < 0 \qquad \text{per ogni } x > e$$

per cui possiamo applicare i criteri noti. Infatti, anche se f non è decrescente per ogni $x > 1$, possiamo (analogamente alle serie) scrivere

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x \, dx = \int_1^e \frac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x \, dx + \int_e^{+\infty} \frac{\log x^n}{x} \operatorname{sen} x \, dx$$

e studiare solamente il secondo come integrale improprio.

Soluzione 14.54 - Converge assolutamente.

Soluzione 14.55 - Il primo converge, il secondo diverge a $+\infty$.

Soluzione 14.56 - Dividendo in due parti l'integrale, si ha che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ax^2+bx+c}{x^3} \operatorname{sen} x\, dx$ converge per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$, mentre $\displaystyle\int_0^{1} \frac{ax^2+bx+c}{x^3} \operatorname{sen} x\, dx$ converge solamente per $a \neq 0$ e $b = c = 0$.

Soluzione 14.57 - L'integrale converge per ogni $n \in \mathbf{N}$. Infatti la funzione

$$f_n(x) = \frac{x^n}{x^{\log x}}$$

ha derivata definitivamente negativa:

$$f_n'(x) = \frac{1}{\left(x^{\log x}\right)^2}\, x^{n-1} x^{\log x}\big[n - 2\log x\big] < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > e^{n/2}.$$

Per quanto visto per mostrare la convergenza degli integrali oscillanti e dalla stima sul resto per le serie a termini a segno alterno,

$$\left|\sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n a_n\right| \leqslant a_k\,,$$

si ha

$$\left|\int_{k\pi}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x^n}{x^{\log x}}\, |\operatorname{sen} x|\, dx$$

e, supponendo $k\pi > e^{n/2}$, si ha

$$\left|\int_{k\pi}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x^n}{x^{\log x}}\, dx \leqslant \pi\, \frac{(k\pi)^n}{(k\pi)^{\log k\pi}}.$$

Per una dato $a > 0$ si consideri $k \in \mathbf{N}$ tale che $(k-1)\pi \leqslant a$ e $k\pi > a$, cioè

$$k - 1 = \left[\frac{a}{\pi}\right].$$

Si ha, usando la monotonia di f_n e supponendo $k\pi > e^{n/2}$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx - \int_0^{a} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right. &= \left|\int_a^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| = \\
&= \left|\int_a^{k\pi} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{k\pi}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int_a^{k\pi} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| + \left|\int_{k\pi}^{+\infty} \frac{x^n}{x^{\log x}} \operatorname{sen} x\, dx\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{a^n}{a^{\log a}}(k\pi - a) + \pi\, \frac{(k\pi)^n}{(k\pi)^{\log k\pi}} \leqslant \\
&\leqslant \pi \frac{a^n}{a^{\log a}} + \pi \frac{a^n}{a^{\log a}} = 2\pi \frac{a^n}{a^{\log a}}.
\end{aligned}
$$

Ora si fissi ora $\varepsilon > 0$: per trovare a tale che sia soddisfatta la richiesta iniziale sarà sufficiente scegliere

$$2\pi \frac{a^n}{a^{\log a}} < \varepsilon.$$

In generale si deduce quindi che una stima di

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x) \operatorname{sen} x\, dx\right|,$$

con f decrescente ed infinitesima all'infinito è data da

$$2\pi f(a).$$

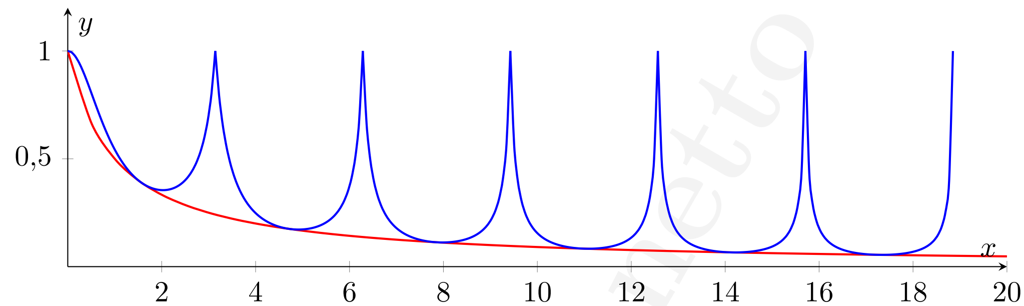
Soluzione 14.58 - Nella figura riportata di seguito in rosso è tracciato il grafico della funzione $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^\alpha}$, in blu il grafico della funzione $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^\alpha|\operatorname{sen} x|}$ per lo stesso valore di α. Poiché è evidente che

$$\frac{1}{1+x^\alpha|\operatorname{sen} x|} \geqslant \frac{1}{1+x^\alpha}$$

e che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\alpha}\, dx = +\infty \qquad \text{per } \alpha \leqslant 1$$

si conclude che per tali valori di α anche l'integrale dato diverge, ma questo non chiude lo studio del problema proposto.



Osserviamo più in dettaglio una delle cuspidi della funzione integranda: derivando la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^{\alpha}|\operatorname{sen} x|}$$

nell'intervallo $(k\pi, (k+1)\pi)$ con k pari in modo tale che $\operatorname{sen} x$ sia positivo si ottiene

$$f'(x) = -\frac{\alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen} x + x^{\alpha} \cos x}{(1 + x^{\alpha}|\operatorname{sen} x|)^2}$$

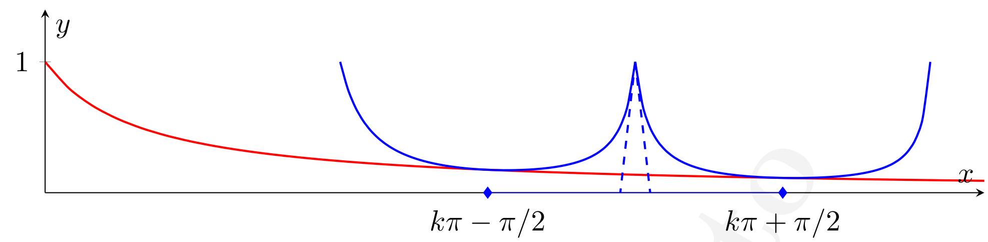
per cui in $k\pi$ la derivata è $-(k\pi)^{\alpha}$. Analogamente il limite della derivata da sinistra di f nel punto $k\pi$ è $(k\pi)^{\alpha}$. Di conseguenza la rette tangenti ai grafici di

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x^{\alpha} \operatorname{sen} x} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{1 + x^{\alpha} \operatorname{sen} x}$$

nel punto $k\pi$ sono

$$r(x) = (k\pi)^{\alpha}(x - k\pi) + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \rho(x) = -(k\pi)^{\alpha}(x - k\pi) + 1 = 0$$

i cui grafici sono tratteggiati in figura.



Chiaramente considerando i due punti $k\pi - \pi/2 = (k - 1/2)\pi$ e $k\pi + \pi/2 = (k + 1/2)\pi$, marcati in figura da un "quadro", si ha che

$$\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2} \frac{1}{1 + x^{\alpha}|\operatorname{sen} x|}\, dx \geqslant A_k$$

dove A_k denota l'area del triangolino isoscele i cui due lati maggiori sono tratteggiati. Valutiamo allora l'area A_k. Troviamo prima i due punti in cui si annullano le due funzioni r e ρ:

$$r(x) = 0 \quad \text{per } x = k\pi - \frac{1}{(k\pi)^{\alpha}} \qquad \rho(x) = 0 \quad \text{per } x = k\pi + \frac{1}{(k\pi)^{\alpha}}$$

per cui la base del triangolino è data da

$$\left(k\pi + \frac{1}{(k\pi)^{\alpha}}\right) - \left(k\pi + \frac{1}{(k\pi)^{\alpha}}\right) = \frac{2}{(k\pi)^{\alpha}}\,.$$

Concludiamo che

$$\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2} \frac{1}{1 + x^{\alpha}|\operatorname{sen} x|}\, dx \geqslant A_k = \frac{1}{(k\pi)^{\alpha}}\,.$$

Questa stima non ci aiuta, visto che, per $\alpha > 1$, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k\pi)^{\alpha}} \qquad \text{converge.}$$

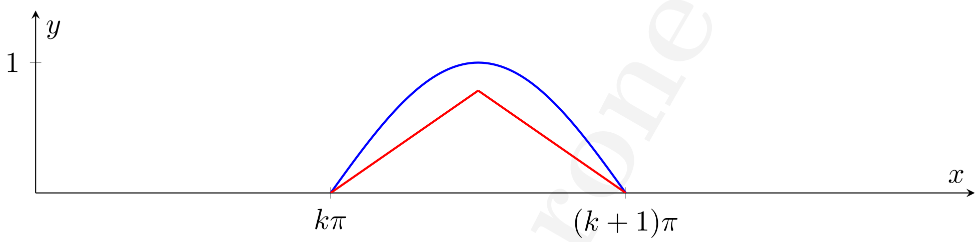
Proviamo allora con una stima dall'alto. Scrivendo

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^{\alpha}|\operatorname{sen} x|}\, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + x^{\alpha}|\operatorname{sen} x|}\, dx$$

stimiamo in altro modo ogni singolo termine

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|}\, dx\,.$$

Come mostrato in figura stimiamo dal basso la funzione $|\operatorname{sen} x|$ con una funzione lineare a tratti, evidenziata in rosso.



Precisamente (il coefficiente $1/2$ è scelto arbitrariamente, un qualunque altro numero tra 0 e $2/\pi$ va comunque bene)

$$|\operatorname{sen} x| \geqslant g(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}\big(x - k\pi\big) & \text{per } x \in \Big[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\Big]\,, \\ -\frac{1}{2}\big(x - (k+1)\pi\big) & \text{per } x \in \Big[k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi\Big]\,. \end{cases}$$

Inoltre

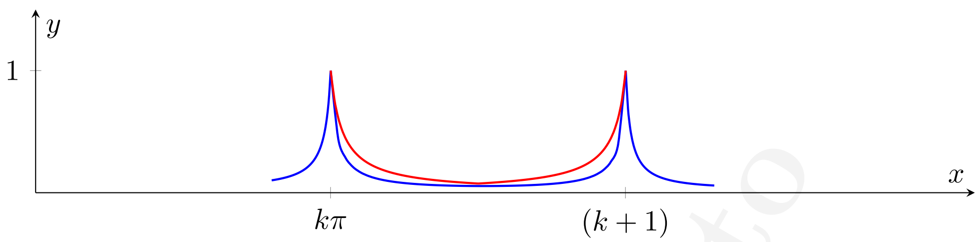
$$x^\alpha \geqslant (k\pi)^\alpha \qquad \text{per } x \in \big[k\pi, (k+1)\pi\big]\,.$$

Di conseguenza si ha che

$$\frac{1}{1 + x^\alpha |\operatorname{sen} x|} \leqslant \frac{1}{1 + (k\pi)^\alpha g(x)} \qquad \text{in } \big[k\pi, (k+1)\pi\big]$$

e il grafico del termine a destra è evidenziato in rosso in un tratto $\big[k\pi, (k+1)\pi\big]$ nella figura che segue. Ora integriamo

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + (k\pi)^\alpha g(x)}\, dx\,.$$



Per fare ciò ci possiamo limitare a valutare l'integrale su metà intervallo, la parte dove è maggiore,

$$\int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+(k\pi)^\alpha g(x)}\,dx = \int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1-(k\pi)^\alpha(x-(k+1)\pi)/2}\,dx$$

e raddoppiare poi il risultato. Si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{1}{\frac{(k\pi)^\alpha(k+1)\pi}{2}+1-\frac{(k\pi)^\alpha}{2}x}\,dx = \\
&\quad = -\frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left(\frac{(k\pi)^\alpha(k+1)\pi}{2}+1-\frac{(k\pi)^\alpha}{2}x\right)\Bigg|_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} = \\
&\quad = \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left(\frac{(k\pi)^\alpha(k+1)\pi}{2}+1-\frac{(k\pi)^{\alpha+1}}{2}-\frac{(k\pi)^\alpha\pi}{4}\right) = \\
&\quad = \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left(1+\frac{(k\pi)^\alpha\pi}{4}\right) \leqslant \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left(1+(k\pi)^\alpha\right) \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{2}{(k\pi)^\alpha}\log\left((2k\pi)^\alpha\right) = \frac{2\alpha}{(k\pi)^\alpha}\log(2k\pi).
\end{aligned}$$

A questo punto, osservando che la serie

$$\sum_k \frac{\log k}{k^\alpha}$$

converge per $\alpha > 1$, finalmente si conclude.