

Capitolo 8

Continuità

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 7 NOVEMBRE 2024

ESERCIZIO 8.1 - Si dica se i seguenti sono i grafici di una funzione continua:

Figura 1

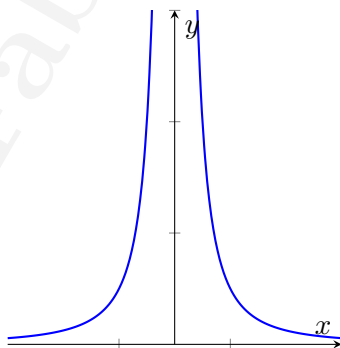


Figura 2

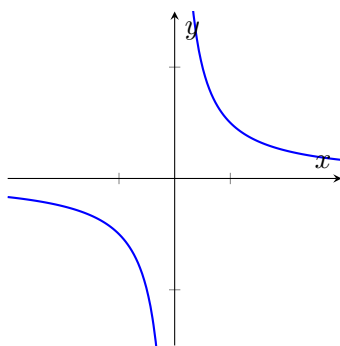


Figura 3

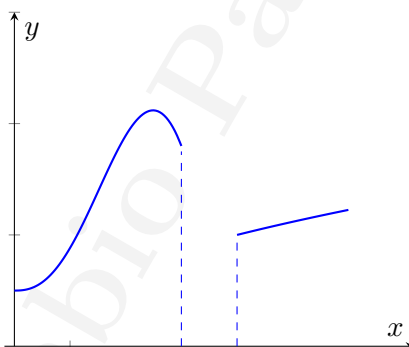
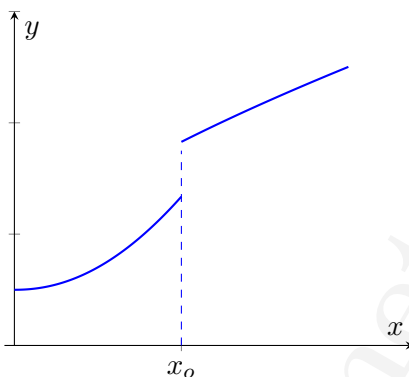


Figura 4



ESERCIZIO 8.2 - Si dica se le seguenti funzioni sono continue e dove:

1. la funzione inversa di quella il cui grafico è riportato in Figura 4 dell'esercizio precedente

$$2. f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ -1 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

$$3. f_2(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbf{Q} \\ -x & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

$$4. f_3(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbf{Q} \\ -\sin x & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

ESERCIZIO 8.3 - Si determini il dominio naturale delle seguenti funzioni, dopodiché si dica se, dove non sono definite, sono estendibili in modo da ottenere una funzione continua:

$$1. f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$2. f(x) = x \log x$$

$$3. f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$4. f(x) = e^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$5. f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x}$$

$$7. f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$8. f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$$

$$9. f(x) = \log |\operatorname{sen} x| - \log |x|$$

ESERCIZIO 8.4 - Dopo aver svolto l'esercizio 8.3.3, si disegni il grafico delle due seguenti funzioni (come fatto nei capitoli 3 e 6 di esercizi)

$$1. f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$2. f(x) = |x| \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

ESERCIZIO 8.5 - Si dica per che scelta dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ le seguenti funzioni risultano continue:

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + 1 & x \leq 1 \\ (ax)^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} a e^x & x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x > 0 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} a \cos x & x \leq 0 \\ 1 + x^2 \log x & x > 0 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 1 \\ \frac{a}{x-1} \log x & x > 1 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} a \cos x & x \leq 0 \\ 1 + x^2 \log x & x > 0 \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\pi(x + \log x))}{\log x} & x \in (0, 1) \\ a & x \leq 0 \\ b & x \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 8.6 - Si dica per che scelta dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ le seguenti funzioni risultano continue e per quali risultano invertibili su $\mathbf{R}$:

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 + 2 & x \leq a \\ bx^2 - 2abx + a^2b + b^2 & x > a \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 8.7 - Si dica se e quante soluzioni hanno le seguenti equazioni (suggerimento: si usi il teorema degli zeri):

1. $e^x = -1$
2. $e^x = 1$
3. $e^x = -x$
4. $\operatorname{tg} x = 1/x$
5. $-\operatorname{arctg} x = e^x + a$, al variare di $a \in \mathbf{R}$
6. $x^3 + 7x = -1$
7. $2x^7 + x^5 + x^3 + 7x = -1$
8. $-9x^9 - 2x^7 - 4x^5 - 6x^3 - 7x = -1$
9. $\log(x+3) = (2-x)^3$
10. $e^{1/x} = \alpha \operatorname{arctg} x$, al variare di $\alpha > 0$

Soluzioni

Soluzione 8.1 -

- 1 è continua
- 2 è continua
- 3 è continua
- 4 non è continua nel punto x_o

Soluzione 8.2 -

- 1 è continua in tutto il suo dominio di definizione
- 2 f_1 non è continua in alcun punto
- 3 f_2 è continua solamente in 0. Si osservi che $f_2(x) = xf_1(x)$.
- 4 f_3 è continua (solamente) in tutti i punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.
Si osservi che $f_3(x) = f_1(x) \sin x$.

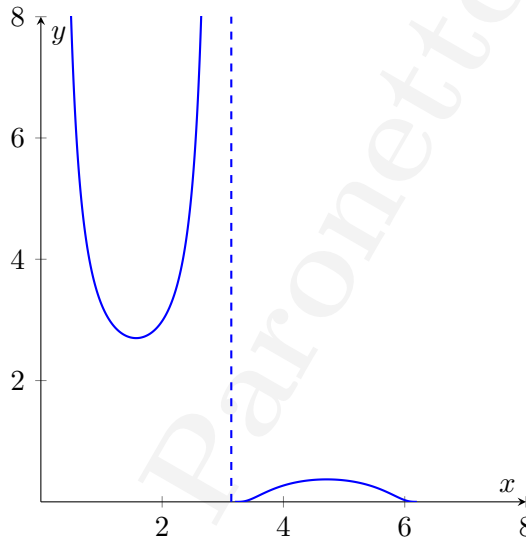
Soluzione 8.3 -

- 1. non è possibile estendere f in alcun modo in maniera che l'estensione risulti continua
- 3. il dominio naturale è $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ la funzione può essere estesa alla funzione

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che risulta continua

4. la funzione non è definita naturalmente per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Il grafico è riportato parzialmente (solo per x compreso tra 0 e 2π). Ovviamente la funzione è estendibile ai punti del tipo $k\pi$ assegnandole il valore 0 in modo da renderla continua negli intervalli $[k\pi, (k+1)\pi]$ con k dispari, ma non potrà essere continua in $\mathbf{R}$.



8. La funzione non è definita per $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, per cui il dominio naturale è

$$\mathbf{R} \setminus \{k\pi \in \mathbf{R} \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Si può però estendere il dominio includendo 0 rendendo l'estensione continua.

Soluzione 8.5 -

2. Basta scegliere $a = 1$.
6. Si vede facilmente che il valore di a è 0. Per trovare il valore di b si osservi che

$$\frac{\sin(\pi(x + \log x))}{\log x} = \frac{\sin(\pi + \pi(x - 1 + \log x))}{\pi(x - 1 + \log x)} \frac{\pi(x - 1 + \log x)}{\log x}.$$

Ricordando che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} = -1$$

si ha che al tendere di x a 1 il primo fattore tende a -1 . Per quanto riguarda il secondo si ha

$$\frac{\pi(x - 1 + \log x)}{\log x} = \pi \left[\frac{x - 1}{\log x} + \frac{\log x}{\log x} \right]$$

che tende, al tendere di x a 1, a 2π . Di conseguenza la funzione risulta continua per $b = -2\pi$.

Soluzione 8.6 -

1. Imponendo la continuità si ottengono per b i due valori $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Qualunque valore di a va bene. Perché sia invertibile qualunque valore di a va bene, b deve appartenere a $[-\sqrt{2}, 0)$.

Soluzione 8.7 -

7. La funzione ha derivata positiva, per cui è strettamente crescente. Il limite a $-\infty$ è $-\infty$, il limite a $+\infty$ è $+\infty$ quindi la funzione ha un solo zero.