

Capitolo 10

Applicazioni delle derivate

ULTIMO AGGIORNAMENTO: 2 DICEMBRE 2024

Trovare le soluzioni di un'equazione $f(x) = 0$ o studiare una disequazione $f(x) > 0$ è quasi sempre impossibile. Spesso bisogna accontentarsi di dire se un'equazione ha soluzione e qualche volta si riesce a dire quante soluzioni ha, senza trovarle esplicitamente.

Vediamo ora qualche esercizio dove applicheremo i risultati che conosciamo riguardo le funzioni biettive e derivabili per risolvere equazioni o disequazioni. Si esservi che la disequazione $g_2(x) \geq g_1(x)$ è equivalente alla disequazione $g_2(x) - g_1(x) \geq 0$.

ESERCIZIO 10.1 - Si dica quante soluzioni hanno le seguenti equazioni (si utilizzino il teorema degli zeri, la monotonia e i risultati sulle derivate prime):

1. $x^3 + x = 0$
2. $x^{17} + 13x^{13} + 9x^9 = 0$
3. $ax^4 + bx^2 = 0$ al variare di $a, b \in \mathbf{R}$
4. $\sqrt{x^2 + 1} = a$ al variare di $a \in \mathbf{R}$

ESERCIZIO 10.2 -

1. Si dimostri che $e^x \geq x + 1$ per $x \in \mathbf{R}$
2. Si dimostri che $\log x \leq x - 1$ per $x > 0$
3. Per quali valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ è vera $x^4 \geq x^2 + a$?
4. Per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ è vera $x^4 - x^2 \geq ax^2 + b$?
5. Quante soluzioni ha l'equazione $-ax + \log x = 0$ al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$?

ESERCIZIO 10.3 -

1. Si dimostri $x \geq \sin x$ per $x \geq 0$ e $x \leq \sin x$ per $x \leq 0$
2. Per quali valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ è vera $\cos x - 1 + ax^2 \geq 0$?
3. Per quali valori del parametro $a \in \mathbf{R}$ è vera $1 + a(x - 1) - x^a \geq 0$ (limitatamente a $x > 0$)

ESERCIZIO 10.4 - Si dimostri che se $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è derivabile e pari (cioè $f(-x) = f(x)$) allora la sua derivata è dispari (cioè $f'(-x) = -f'(x)$).

ESERCIZIO 10.5 - Si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$x^3 + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{1+x^2} \right) = 0.$$

ESERCIZIO 10.6 - Si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$x^3 + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{1+x^2} \right) = \lambda$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO 10.7 - Si studi il segno della funzione

$$f(x) = x + \arcsen \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$$

ESERCIZIO 10.8 - Si dica per quali valori di $\lambda > 0$ la funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \lambda x + \sin x$$

è biiettiva.

ESERCIZIO 10.9 - Si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = e^{x^3-3x} - 3 = \lambda$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO 10.10 - Si dica al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ quante soluzioni ha l'equazione

$$e^x = \lambda x^2.$$

ESERCIZIO 10.11 - Si dica se esiste un intervallo del tipo $(0, \bar{x})$ nel quale valgono le seguenti disequazioni:

$$i) \quad \operatorname{arctg} 2x > \log(x+1);$$

$$ii) \quad \operatorname{sen} x > \log(x+1);$$

$$iii) \quad \operatorname{arctg} x > \log(x+1).$$

ESERCIZIO 10.12 - Si dica se esiste un intervallo del tipo $(0, \bar{x})$ nel quale valgono le seguenti disequazioni:

$$i) \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} < e^x - 1;$$

$$ii) \quad \operatorname{arcsen} x < e^x - 1;$$

$$iii) \quad \operatorname{tg} x < e^x - 1.$$

ESERCIZIO 10.13 - Si dimostri che l'equazione

$$x^3 + \operatorname{sen} x^3 + \log(1+x^4) = \lambda$$

ha almeno una soluzione per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

ESERCIZIO 10.14 - Si dimostri che, dati $\alpha \in \mathbf{R}$ e $x \in (-1, +\infty)$,

$$(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x \quad \text{se } \alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty),$$

$$(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x \quad \text{se } \alpha \in (0, 1),$$

e le uguaglianze valgono se e solo se $x = 0$.

ESERCIZIO 10.15 - Si dica per quali valori di $\lambda > 0$ è vero che

$$x < \lambda \left(x + \frac{3}{x} \right) \quad \text{per ogni } x > 0$$

e per quali è falso. Per i valori per i quali è falso si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$x = \lambda \left(x + \frac{3}{x} \right).$$

ESERCIZIO 10.16 - Si dimostri che se f è convessa in (a, b) allora per ogni $r, s, t \in (a, b)$ con $r < s < t$ si ha

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \leq \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

Qualche esercizio inutile (o poco utile), ma curioso, dove assieme al calcolo combinatorio si usano le derivate.

* ESERCIZIO 10.17 Si mostri la seguente identità

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k = n 2^{n-1}.$$

* ESERCIZIO 10.18 Si mostri la seguente identità

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 = (n+1)n 2^{n-2}.$$

* ESERCIZIO 10.19 Si mostri la seguente identità

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-2k)^2 = n 2^n.$$

Soluzioni

Soluzione 10.2 - 5. Chiedersi quando è vera l'uguaglianza equivale a chiedersi quando

$$\log x = ax.$$

È chiaro che per $a \leq 0$ l'equazione ha soluzione e la soluzione è unica. Infatti per $a \leq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} ax = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ax \leq 0 \end{aligned}$$

e quindi l'equazione ha soluzione. Inoltre la funzione $x \mapsto \log x$ è strettamente crescente, la funzione $x \mapsto ax$ è decrescente, per cui tale soluzione è unica.

Veniamo ai casi $a > 0$. Ora non è immediato capire quante soluzioni ci siano, anche perché per $a > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax = +\infty$. Se si chiama f la funzione $x \mapsto -ax + \log x$ e la si deriva si ottiene

$$f'(x) = -a + \frac{1}{x}.$$

Tale derivata si annulla solo per $x = \frac{1}{a}$ e si osservi inoltre che $f' > 0$ (quindi f crescente) per $x \in (0, 1/a)$, $f' < 0$ (quindi f decrescente) per $x > 1/a$. Siccome

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

f è derivabile in ogni punto, il punto $1/a$ sarà di massimo. Basta quindi calcolare il valore di f in tale punto. Si ha

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -1 + \log \frac{1}{a} = -1 - \log a.$$

Se $-1 - \log a > 0$, cioè se $\log a < -1$ che corrisponde ad $a < 1/e$, il massimo di f è positivo e quindi f avrà due zeri. Se $-1 - \log a = 0$, cioè se $a = 1/e$, il massimo di f è nullo e quindi f avrà un solo zero. Questo è il caso in cui i grafici di $x \mapsto \log x$ e $x \mapsto ax$ sono tangenti. Se $-1 - \log a < 0$ il massimo di f è negativo e quindi f non si annulla mai.

Soluzione 10.3 - 2. Poniamo $g(x) = \cos x - 1 + ax^2$. Si osservi che richiedere $\cos x - 1 + ax^2 \geq 0$ è equivalente a chiedere

$$ax^2 \geq 1 - \cos x.$$

Disegnando il grafico di $x \mapsto 1 - \cos x$ ci si rende conto che per $a \leq 0$ la disuguaglianza di sopra non può essere vera.

Limitiamoci quindi a considerare $a > 0$. Poniamo $f(x) = ax^2 + \cos x - 1$. Cerchiamo il minimo di f . Derivando e ponendo uguale a zero la derivata si ottiene

$$f'(x) = 2ax - \sin x = 0.$$

Questa equazione ha come soluzione $x = 0$ e inoltre altri eventuali valori di x che soddisfano

$$2a = \frac{\sin x}{x}.$$

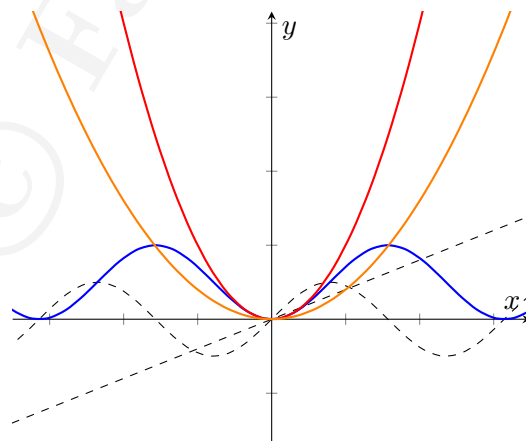
Limitiamo a considerare $x > 0$, per simmetria poi si risolve analogamente per $x < 0$: poiché

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

la precedente equazione ha una soluzione non nulla se e solo se $2a < 1$, quindi per $a < 1/2$ ci sono più punti stazionari, mentre per $a \geq 1/2$ c'è solamente il punto 0.

In quest'ultimo caso si ha che $f'(x) < 0$ per $x < 0$ e $f'(x) > 0$ per $x > 0$ per cui 0 è un punto di minimo e

$$g(0) = 0 \implies g(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x.$$



In figura sono riportati in blu il grafico di $x \mapsto 1 - \cos x$ e negli altri colori diverse parabole: in rosso $a = 1/2$, in arancione un valore di a compreso tra 0 e $1/2$. Le linee tratteggiate corrispondono a $\sin x$ e $2ax$ per il valore di a corrispondente alla curva arancione. Si noti che in questo caso si incontrano (sono uguali) anche in un punto diverso da zero, che in questo caso corrisponde ad un punto di massimo locale per g .

Soluzione 10.4 - Fissiamo un punto x_o e valutiamo $f'(-x_o)$:

$$\begin{aligned}
 f'(-x_o) &= \lim_{x \rightarrow -x_o} \frac{f(x) - f(-x_o)}{x - (-x_o)} = \quad (f \text{ pari}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x + x_o} = \\
 &= \lim_{-x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x + x_o} = \quad (\text{poniamo } y = -x) \\
 &= \lim_{y \rightarrow x_o} \frac{f(-y) - f(x_o)}{-y + x_o} = \quad (f \text{ pari}) \\
 &= \lim_{y \rightarrow x_o} -\frac{f(y) - f(x_o)}{y - x_o} = -f'(x_o).
 \end{aligned}$$

Analogamente se f è derivabile e dispari, f' risulta pari.

A questo punto nel caso in cui f fosse derivabile due volte e pari si ha che f'' risulta pari.

Soluzione 10.5 - Un modo di procedere è il seguente: si osservi che

$$x^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \text{e} \quad \arctg\left(\frac{x}{1+x^2}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Per cui la funzione $f(x) = x^3 + \arctg\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$ è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$ e nulla per, $x = 0$.

Soluzione 10.6 - In questo caso utilizziamo la derivata: si ha che, detta $f(x) = x^3 + \arctg\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$,

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2+x^2} = \frac{3x^2(1+x^2)^2+3x^4+1-x^2}{(1+x^2)^2+x^2}.$$

Poiché $3x^2(1+x^2)^2 = 3x^2 + \dots$ si ottiene che il numeratore, e quindi f' , è positivo, da cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ha **al più** una soluzione.

Dal fatto che f è continua in $\mathbf{R}$ e che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

si deduce che $f(x) = \lambda$ ha **almeno** una soluzione e mettendo assieme le cose si ha che l'equazione $f(x) = \lambda$ ha una ed una sola soluzione per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

Soluzione 10.7 - Questo è un problema difficile e lo può essere maggiormente se la funzione di cui si deve studiare il segno è una somma, come nel nostro caso. Ovviamente studiare

$$f(x) > 0$$

se $f = f_1 + f_2$ non può essere fatto studiando separatamente

$$f_1(x) > 0 \quad \text{e} \quad f_2(x) > 0.$$

Nel nostro caso però possiamo farlo perché è un caso fortunato: si verifica facilmente che

$$x^3 > 0 \iff x > 0 \quad \text{e} \quad \arcsin\left(\frac{x}{1+x^2}\right) > 0 \iff x > 0.$$

Casualmente cioè i due addendi sono positivi nel medesimo insieme, negativi nel medesimo insieme e nulli nel medesimo insieme. Di conseguenza $f(x) > 0$ per $x > 0$, $f(x) = 0$ in $x = 0$, $f(x) < 0$ per $x < 0$.

Un modo simile è osservare che la funzione è dispari, quindi si avrà (f continua) che $f(0) = 0$, che per $x > 0$ f è positiva ed essendo dispari si avrà che f è negativa per $x < 0$.

Altro modo è studiarne la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = 1 + \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

per cui per $x = 1$ e $x = -1$ f non è derivabile e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{1+x^2} & \text{per } |x| > 1 \\ 1 + \frac{2}{1+x^2} & \text{per } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Per $|x| < 1$ la derivata è positiva. Per $|x| > 1$ si osservi che, poiché in $a^2 + b^2 \geq 2ab$ l'uguaglianza vale solo per $a = b$ si deduce che

$$\frac{2}{1+x^2} < 1 \quad \text{per ogni } x \text{ tale che } |x| \neq 1,$$

per cui f' è sempre positiva, dove definita. Poiché si vede facilmente che $f(0) = 0$ si avrà, per la monotonia, che f è positiva in $(0, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, 0)$.

Soluzione 10.8 - La funzione è derivabile e

$$f'(x) = \lambda + \cos x.$$

Se $\lambda > 1$ si ha che f' è positiva, e quindi f strettamente crescente.

Se invece $0 < \lambda < 1$ si ha che f' cambia segno, e quindi f non è iniettiva, anche se suriettiva.

Se $\lambda = 1$ si ha che

$$f'(x) = \lambda + \cos x \geq 0$$

e per alcuni valori la derivata si annulla. Si osservi però che la derivata si annulla solo per $x = (2k+1)\pi$. Allora f è strettamente crescente, perché se non lo fosse si avrebbero due valori a e b nei quali $f(a) = f(b)$. Poiché $f' \geq 0$ l'unica possibilità è che f sia costante nell'intervallo $[a, b]$. Ma allora f sarebbe costante nell'intervallo $[a, b]$ e avrebbe derivata nulla in $[a, b]$.

Soluzione 10.9 - Si ha che la funzione $f(x) > -3$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ per cui per ogni $\lambda \leq -3$ l'equazione non ha soluzioni. Invece, poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ed essendo f continua, l'equazione avrà soluzione per ogni $\lambda > -3$.

Studiamo il segno della derivata. Si ha:

$$f'(x) = e^{x^3-3x}(3x^2-3)$$

da cui

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } |x| > 1 \\ = 0 & \text{per } |x| = 1 \\ < 0 & \text{per } |x| < 1 \end{cases}$$

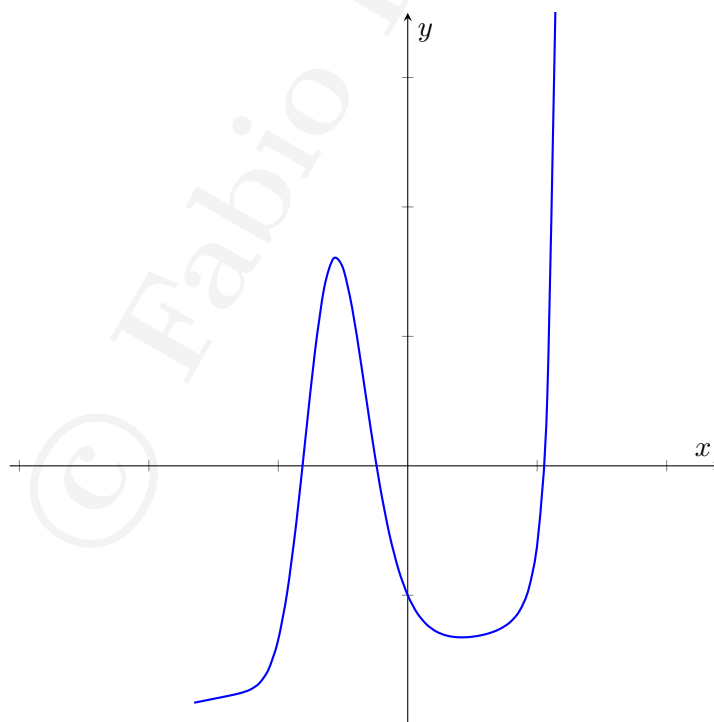
per cui si hanno due punti stazionari. Valutando f in questi punti si ha

$$f(-1) = e^2 - 3, \quad f(1) = e^{-2} - 3.$$

Da questo si conclude che $f(x) = \lambda$

- non ha soluzioni per $\lambda \in (-\infty, -3]$
- ha una soluzione per $\lambda \in (-3, e^{-2} - 3)$
- ha due soluzioni per $\lambda = e^{-2} - 3, \lambda = e^2 - 3$
- ha tre soluzioni per $\lambda \in (e^{-2} - 3, e^2 - 3)$
- ha una soluzione per $\lambda \in (e^2 - 3, +\infty)$

Di seguito il grafico di f .



Soluzione 10.10 - Per $\lambda \leq 0$ chiaramente l'equazione non ha soluzione, per $\lambda > 0$ sì, si tratta solo di capire quante. Infatti, per $\lambda > 0$, si ha

f strettamente crescente e g_λ strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$

con

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g_\lambda(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g_\lambda(x) = 0$$

dove $f(x) = e^x$ e $g_\lambda(x) = \lambda x^2$. Di conseguenza esiste, unico, un valore di $x < 0$ per il quale

$$e^x = \lambda x^2.$$

Quindi il problema si restringe a cercare per $\lambda > 0$ quante soluzioni ha l'equazione in $[0, +\infty)$ o in $(0, +\infty)$, visto che in 0 l'equazione non è soddisfatta.

Si provi cercando il minimo di

$$f - g_\lambda \quad \text{in } (0, +\infty)$$

che esiste dal momento che

$$f(0) > g_\lambda(0) \quad \text{e}$$

$$f > g_\lambda \text{ definitivamente per } x > 0 \text{ poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\lambda x^2} = +\infty,$$

Proponiamo qui invece un altro procedimento.

Si osservi che $x = 0$ non è mai soluzione. Di conseguenza possiamo studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

e vedere quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \lambda$.

Limitiamoci per il momento a $x \in (-\infty, 0)$. Si ha che, essendo f continua,

$$f(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

per cui f mappa l'intervallo $(-\infty, 0)$ nell'intervallo $(0, +\infty)$. Derivando f si ha

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2} - 2\frac{e^x}{x^3} = \frac{e^x}{x^3} (x - 2),$$

per cui fintanto che $x \in (-\infty, 0)$ $f'(x) > 0$ e di conseguenza l'equazione $f(x) = \lambda$ ha esattamente una soluzione nell'intervallo $(-\infty, 0)$ se $\lambda > 0$, non ne ha se $\lambda \leq 0$.

Passiamo ora a $(0, +\infty)$: si vede che

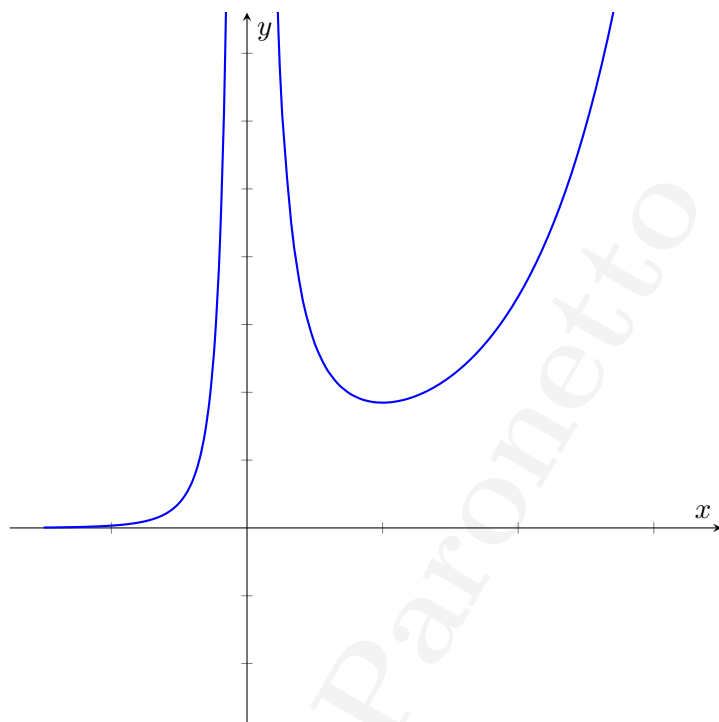
$$f(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

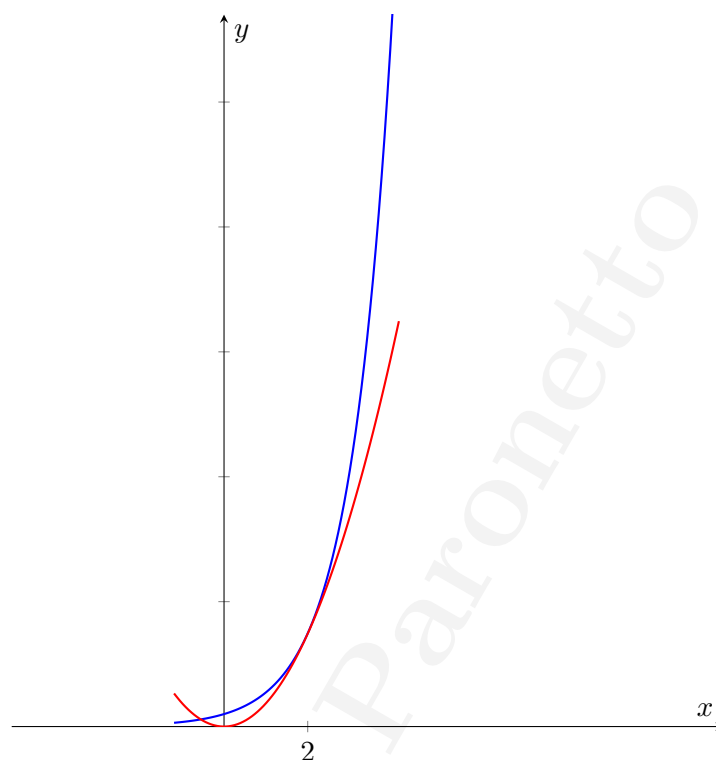
e che la derivata si annulla per $x = 2$, mentre è negativa in $(0, 2)$ e positiva in $(2, +\infty)$. Si ricava che f ha minimo in 2 il cui valore è

$$f(2) = \frac{e^2}{4}.$$

Di conseguenza per ogni $\lambda < \frac{e^2}{4}$ non esistono soluzioni in $(0, +\infty)$, se $\lambda = \frac{e^2}{4}$ c'è solo una soluzione, che corrisponde al punto di minimo, se $\lambda > \frac{e^2}{4}$ esistono due soluzioni, una in $(0, 2)$, un'altra in $(2, +\infty)$.

In conclusione si hanno: una soluzione (negativa) per ogni $\lambda \in (0, \frac{e^2}{4})$, due soluzioni (una negativa e 2) per $\lambda = \frac{e^2}{4}$, tre soluzioni per ogni $\lambda > \frac{e^2}{4}$, nessuna soluzione per ogni $\lambda \leq 0$. Di seguito il grafico di f . Nella figura successiva i grafici (in blu) di $x \mapsto e^x$ e (in rosso) di $x \mapsto \frac{e^2}{4}x^2$.





Soluzione 10.11 - Innanzitutto si osservi che, in generale, se

$$f(x_o) = g(x_o) \quad \text{e} \quad f'(x_o) = g'(x_o)$$

da queste informazioni non si riesce a dire se esiste un intorno di x_o nel quale $f > g$ o $f < g$, né in un intorno destro, né in un intorno sinistro.

Vediamo l'esercizio *i*). Chiamiamo, per semplicità,

$$f(x) = \operatorname{arctg} 2x, \quad g(x) = \log(1+x) \quad h(x) := f(x) - g(x).$$

Si osservi che

$$h(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty, \quad (10.1)$$

quindi h è definitivamente negativa. Si osservi però che

$$h'(0) > 0$$

(poiché h' è continua, per il teorema della permanenza del segno è positiva in un intorno di 0) e questo implica che esiste $\bar{x}$ nel quale h è crescente e quindi che $h > 0$ in $(0, \bar{x})$.

Vediamo l'esercizio *ii*). Definiamo

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \log(1+x) \quad h(x) := f(x) - g(x)$$

e si osservi che h soddisfa anche in questo caso (10.1). Ma questa volta si ha

$$h'(0) = 0.$$

Quindi le informazioni sulla derivata prima non ci aiutano. Si osservi però che

$$h''(0) > 0$$

(poiché h'' è continua, per il teorema della permanenza del segno è positiva in un intorno di 0) e questo implica che esiste $\bar{x}$ tale che h è convessa, e quindi positiva in $(0, \bar{x})$.

Vediamo l'esercizio *iii*). Definiamo

$$f(x) = \arctg x, \quad g(x) = \log(1+x) \quad h(x) := f(x) - g(x)$$

e si osservi che h soddisfa anche in questo caso (10.1). Ma questa volta si ha

$$h'(0) = h''(0) = 0.$$

Quindi né le informazioni sulla derivata prima, né quelle sulla derivata seconda ci aiutano. Si osservi però che esiste $\bar{x} > 0$ tale che

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} > 0 \quad \text{in } (0, \bar{x}).$$

Infatti

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1+x^2}{1+x} < 1$$

e ciò è vero perché $x^2 < x$ fintanto che $x < 1$. Quindi $h' > 0$ in $(0, 1)$ e nuovamente c'è un intervallo nel quale h è positiva.

Soluzione 10.14 - Ricordiamo prima di vedere la dimostrazione la disuguaglianza di Bernoulli, vista in vari modi tra cui l'induzione all'inizio del corso:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Nel caso in cui α sia reale si procede come al solito: consideriamo la funzione

$$f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x).$$

Derivando si ha

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1].$$

Se $\alpha = 1$ la derivata è identicamente nulla, ma in questo caso $f \equiv 0$.

Se $\alpha \neq 1$ e se $\alpha \neq 0$ (altro caso banale) si ha che la derivata si annulla solo per $x = 0$. Studiamo il segno di f' :

$$(1+x)^{\alpha-1} - 1 \begin{cases} > 0 & \text{per } x \in (-1, 0) \\ = 0 & \text{per } x = 0 \\ < 0 & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad \text{se } \alpha - 1 < 0,$$

e

$$(1+x)^{\alpha-1} - 1 \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (-1, 0) \\ = 0 & \text{per } x = 0 \\ > 0 & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad \text{se } \alpha - 1 > 0,$$

da cui (escludendo i due casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$)

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x \in (-1, 0) \text{ e } \alpha < 0, \\ & \text{per } x \in (-1, 0) \text{ e } \alpha > 1, \\ & \text{per } x \in (0, +\infty) \text{ e } \alpha \in (0, 1), \\ > 0 & \text{per } x \in (-1, 0) \text{ e } \alpha \in (0, 1), \\ & \text{per } x \in (0, +\infty) \text{ e } \alpha < 0, \\ & \text{per } x \in (0, +\infty) \text{ e } \alpha > 1 \end{cases}$$

ed è 0 per $x = 0$ qualunque sia α .

Se ne deriva che per ogni $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ f ha un minimo stretto in $x = 0$, mentre per $\alpha \in (0, 1)$ 0 è un punto di massimo stretto, da cui le due disuguaglianze.

Soluzione 10.16 - Ricordiamo la definizione di funzione convessa: f è convessa in (a, b) se per ogni $x, y \in (a, b)$ e $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Si fissino ora $\lambda \in (0, 1)$ e $r, s, t \in (a, b)$ con $r < s < t$. A questo punto si chiamino

$$s := (1 - \lambda)x + \lambda y, \quad r := x, \quad t := y.$$

Da ciò si ricava (scrivendo $s = (1 - \lambda)x + \lambda y = (1 - \lambda)r + \lambda t$) che

$$\lambda = \frac{s - r}{t - r}, \quad 1 - \lambda = \frac{t - s}{t - r}.$$

Si ottiene quindi che

$$f(s) \leq \frac{1}{t - r} \left((t - s)f(r) + (s - r)f(t) \right).$$

Moltiplicando per $t - r$ da entrambi i lati, aggiungendo e togliendo poi a sinistra al coefficiente $t - r$ di $f(s)$ la quantità $t - s$ si conclude.

Si osservi come la disuguaglianza

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \leq \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

valga anche per funzioni solamente continue e non necessariamente derivabili, ma, nel caso di funzioni derivabili, fornisca la crescenza della derivata prima.

Si verifichi che per la funzione $f(x) = |x|$ effettivamente la disuguaglianza appena dimostrata vale.

Soluzione 10.17 - Sappiamo dal capitolo sull'induzione che

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x + y)^n \quad (10.2)$$

per ogni $x, y > 0$. Prendendo ora $y = 1$ e derivando l'uguaglianza

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (x + 1)^n$$

rispetto ad x si ottiene

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(x + 1)^{n-1}$$

e valutando il tutto per $x = 1$ si ottiene l'uguaglianza richiesta.

Soluzione 10.18 - Come prima utilizziamo

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n. \quad (10.3)$$

Derivando due volte si ottiene

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}.$$

Si osservi che la somma parte da 2 perché i primi due termini della somma (10.3) sono $1+nx$, la cui derivata seconda è nulla. Mettendo $x = 1$ si ottiene

$$\begin{aligned} n(n-1)2^{n-2} &= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k^2 - \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 - \binom{n}{1} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k + \binom{n}{1} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k. \end{aligned}$$

Ora, utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, si ottiene

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

Soluzione 10.19 - La risoluzione risulta immediata scrivendo

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-2k)^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n^2 + 4k^2 - 4nk),$$

e mettendo assieme i risultati ottenuti nei due esercizi precedenti e il fatto che (si veda il capitolo sull'induzione, è sufficiente usare (10.2) con $x = y = 1$)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$