Capitolo 7

Successioni per ricorrenza

Ultimo aggiornamento: 30 ottobre 2019

Esercizio 7.1 - Si studi la successione al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$

$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = 2a_n - 3.$$

Esercizio 7.2 - Data

$$a_0 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

si mostri che
i) $\{a_n\}_n$ è limitata,
ii) $\{a_n\}_n$ ammette limite e tale limite è 2

Esercizio 7.3 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{a_n}.$$

Esercizio 7.4 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha \geqslant 0, \qquad a_{n+1} = \log(1 + a_n).$$

Esercizio 7.5 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha \geqslant 1, \qquad a_{n+1} = 1 + \log a_n.$$

Esercizio 7.6 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_n}.$$

Esercizio 7.7 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha \in \mathbf{R}, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1.$$

Esercizio 7.8 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha \geqslant 2, \qquad a_{n+1} = a_n^2 - a_n.$$

Esercizio 7.9 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad a_{n+1} = \operatorname{sen} \frac{a_n}{2}$$

dopodiché si studi la convergenza della serie $\sum_n a_n$.

Esercizio 7.10 - Si mostri che le successioni per ricorrenza del tipo

$$a_{n+1} := \alpha\, a_n + \beta$$

possono essere scritte in maniera esplicita e si trovi tale espressione.

Esercizio 7.11 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{n^n a_n}{(n+1)^n}$$

dopodiché si studi la convergenza della serie $\sum_n a_n$.

Esercizio 7.12 - Si studi la seguente successione per ricorrenza:

$$a_0 = \alpha > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right).$$

Soluzioni

Soluzione 7.1 - Il limite è

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ 3 & \text{se } \alpha = 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 3. \end{cases}$$

Si osservi che se $\alpha = 3$ in realtà a_n è costante (va mostrato per induzione).

Osservazione - In questo caso, scrivendo $a_{n+1} = 2a_n - 3$ come

$$a_{n+1} - a_n = a_n - 3$$

si può leggere la definizione per ricorrenza come "l'incremento di a_n è uguale ad $a_n - 3$". Se si pensasse a_n come una funzione y e l'incremento $a_{n+1} - a_n$ come la sua derivata y' si potrebbe riscrivere

$$y' = y - 3.$$

Risolvendo l'equazione omogenea $y' = y$ si trova un'esponenziale, mentre, avendo come dato iniziale $y(0) = 3$ si avrebbe la soluzione costante $y(t) = 3$. In effetti la successione definita da $a_{n+1} - a_n = a_n$, cioè $a_{n+1} = 2\,a_n$, si può esplicitare come (lo si verifichi per induzione)

$$a_n = c\,2^n \qquad \text{per qualche } c \in \mathbf{R}$$

che è un'esponenziale. Aggiungendo 3 (una soluzione particolare) alla soluzione dell'"omogenea" $a_{n+1} = 2\,a_n$ si ottiene che

$$a_{n+1} - a_n = a_n - 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = c\,2^n + 3.$$

Poiché $a_0 = c + 3$, ma si vorrebbe α basta prendere come costante c la quantità $\alpha - 3$. Si conclude che

$$a_n = (\alpha - 3)2^n + 3.$$

Soluzione 7.2 - Mostriamo, per induzione, che la successione è limitata da 2. Si ha che $a_0 < 2$; supponendo che $a_n < 2$ si ha che

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Vediamo se $\{a_n\}_n$ è strettamente crescente. Infatti

$$a_n < a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$
$$\Updownarrow$$
$$a_n^2 < 2 + a_n$$

Risolvendo la disequazione $x^2 - x - 2 < 0$ si ottiene che

$$x^2 - x - 2 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < x < 2$$

e poiché $0 < a_n < 2$ si ha che $\{a_n\}_n$ è strettamente crescente. Di conseguenza ammette limite, il quale sarà finito e minore o uguale a 2, per cui poassimoa escludere a priori $+\infty$ e $-\infty$. Detto ℓ tale limite possiamo scrivere, usando $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, che

$$\ell^2 = 2 + \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = -1 \;\text{ o }\; \ell = 2.$$

Poiché $a_n > 0$ per ogni n (e inoltre sono crescenti) il limite non può essere -1 e sarà necessariemnte 2. Si noti che si è ottenuto che

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}}}} = 2$$

Soluzione 7.3 - Non ammette limite, in quanto si ottiene che un possibile limite soddisfa

$$\ell = \frac{1}{\ell} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell = 1 \quad \vee \quad \ell = -1,$$

ma è evidente che a_n oscilla tra α e $1/\alpha$. Gli unici casi in cui ha limite è se $\alpha = 1$ o se $\alpha = -1$.

Soluzione 7.4 - Ci chiediamo se per caso la successione è crescente:

$$a_{n+1} \leqslant a_n \qquad \Longrightarrow \qquad \log(1 + a_n) \leqslant a_n.$$

Utilizzando la disuguaglianza

$$\log(1 + x) \leqslant x \quad \text{ e } \quad \log(1 + x) = x \text{ sse } x = 0$$

si deduce immediatamente che la successione è decrescente, a meno che α non sia 0, nel qual caso la successione è costante.
Supponendo $\alpha > 0$ si ha che la successione è strettamente decrescente e, passando al limite, si ottiene che

$$\ell = \log(1+\ell) \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = 0.$$

Di conseguenza per ogni $\alpha \geqslant 0$ esiste il limite di $\{a_n\}_n$ ed è 0.

Soluzione 7.8 - Se un limite esiste potrà essere $-\infty$, $+\infty$ o una soluzione dell'equazione

$$\ell = \ell^2 - \ell,$$

cioè

$$\ell = 0 \quad \vee \quad \ell = 2.$$

Si osservi che per $\alpha = 2$ la successione è costante, $a_n = 2$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Il limite non potrà essere $-\infty$ poiché la funzione $f(x) = x^2 - x$ è inferiormente limitata, ha minimo per $x = 1/2$ dove assume il valore $-3/4$, per cui a_n non può assumere valori inferiori a $-3/4$.
Per $\alpha > 2$ si ha che a_n è crescente: infatti possiamo supporre che $\alpha = 2 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$, si ha che

$$a_1 = (2+\epsilon)^2 - 2 - \epsilon = 4 + \epsilon^2 + 4\epsilon - 2 - \epsilon = 2 + 3\epsilon + \epsilon^2 > 2 + 2\epsilon = \alpha + \epsilon.$$

Ripetendo il ragionamento si può mostrare (per induzione) che

$$a_n > \alpha + n\,\epsilon$$

e di conseguenza il limite di a_n è $+\infty$.
Se $\alpha = 2$ la successione è costante, così come se $\alpha = 0$. Se $\alpha < -1$ abbiamo che $a_1 = \alpha^2 - \alpha > 2$, dopodiché la successione diventa crescente e avrà limite $+\infty$. Se $\alpha = -1$ si ha che $a_1 = 2$, dopodiché rimane costantemente 2.
Se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$ la successione rimane costantemente 0. Rimane da vedere che succede per $\alpha \in (-1, 2)$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. Se $\alpha \in (0, 2)$ si ha che la successione è decrescente: infatti

$$a_1 = \alpha^2 - \alpha < \alpha = a_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha^2 < 2\alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha < 2.$$

Supponiamo che $a_n < a_{n-1}$: allora

Se $\alpha >$ la successione $\{a_n\}_n$ è crescente: $a_{n+1} > a_n$ se

$$a_n^2 - 2a_n = a_n(a_n - 2) > 0,$$

cioè se $a_n \in (0,2)$. Se $\alpha \in (1,2)$ si ha che $\{a_n\}_n$ è decrescente. Infatti la funzione $f(x) = x^2 - 2x$ ha minimo per $x = 1$ dove assume il valore -1. Per cui se $a_n \in (0,2)$ anche $a_{n+1} \in [-1,0]$

Soluzione 7.9 - Dal momento che vale

$$\operatorname{sen} x < x \qquad \text{per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{7.1}$$

e

$$x < \operatorname{sen} x \qquad \text{per } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \tag{7.2}$$

si ha che la successione è decrescente se $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, la successione è crescente se $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, per cui il limite esiste. Tale limite deve soddisfare

$$\ell = \operatorname{sen} \frac{\ell}{2}.$$

Da (7.1) e (7.2) si conclude che ℓ può essere solamente 0.

Passiamo ora allo studio della serie: la condizione necessaria per la convergenza è verificata. Se $\alpha > 0$ si ha che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$: usando il criterio del rapporto si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

per cui la serie converge. Se $\alpha < 0$ si ha che $a_n < 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e si conclude sempre dal criterio del rapporto. Se $\alpha = 0$ tutti i termini della successione sono identicamente nulli.

Soluzione 7.10 - $a_n = a_0\,\alpha^n + \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\,\beta.$

Soluzione 7.12 - La successione è decrescente, almeno per $n \geqslant 1$. Infatti, qualunque sia $\alpha > 0$, si ha che

$$\frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1}{2\,\alpha} \geqslant 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\alpha - 1)^2 \geqslant 0$$

da cui si deduce che $a_1 \geqslant 1$. Ripetendo il ragionamento si ha in realtà che $a_n \geqslant 1$ per ogni $n \geqslant 1$. La successione data è decrescente poiché

$$a_{n+1} \leqslant a_n \qquad \iff \qquad a_n^2 \geqslant 1$$

e, dal momento che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, $a_n^2 \geqslant 1$ è vero. A questo punto si verifica che, oltre a $+\infty$ e $-\infty$, i possibili limiti sono dati da

$$\ell = \frac{1}{2}\,\ell + \frac{1}{2\,\ell} \qquad \iff \qquad \ell = 1 \quad \vee \quad \ell = -1.$$

Poiché $a_n \geqslant 1$ per ogni $n \geqslant 1$ e a_n decrescente si conclude che il limite esiste ed è 1.