Capitolo 9

Derivabilità

Ultimo aggiornamento: 13 novembre 2024

Esercizio 9.1 - Si scriva la retta tangente al grafico di

1. $f(x) = x^3 + 1$ nel punto $(1, 2)$;
2. $f(x) = x^2 + \log x$ nel punto $(1, 1)$.

Esercizio 9.2 - Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni, dove possibile:

1. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{0,2}$
2. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{1,5}$
3. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\pi}$
4. $f(x) = \sqrt[5]{\operatorname{sen} x}$
5. $f(x) = \sqrt{\log(\operatorname{sen} x)}$
6. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^3 & x \geqslant 0 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Esercizio 9.3 - Si dica per che scelta dei parametri $a, b \in \mathbf{R}$ le seguenti funzioni risultano continue, derivabili, con derivata continua:

1. $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x \leqslant 1 \\ a\,x + b & x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} a\,x + b & x < 0 \\ 2 \operatorname{sen} x - 1 & x \geqslant 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + b & x \leqslant 1 \\ (ax)^2 - b & x > 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} a\,e^x + bx & x \leqslant 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & x > 0 \end{cases}$

Esercizio 9.4 - Si derivino le seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^x$

2. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$

3. $f(x) = e^{\operatorname{sen}(\log(\sqrt{x^2+1}))}$

4. $f(x) = \dfrac{\cos(\log(\sqrt{x^2+1}))}{\operatorname{arctg} \operatorname{senh} x}$

Esercizio 9.5 - Sia data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Si dica se

1. se $|f(x)| \leqslant |x|$ possiamo dire che f è continua e derivabile in 0?

2. se $|f(x)| \leqslant x^2$ possiamo dire che f è continua e derivabile in 0?

3. se $|f(x)| \leqslant |x|^3$ possiamo dire che f è continua e derivabile in 0?
   E in un altro punto $x_o \neq 0$?

Esercizio 9.6 - Si calcoli la derivata della funzione

$$f(x) = \log(4x^2 - 32x + 72) - \log(x^2 - 8x + 18).$$

Cosa se ne conclude?

Esercizio 9.7 - Sia data una funzione f il cui grafico è riportato in Figura 9.1. Si tracci il grafico di f'.

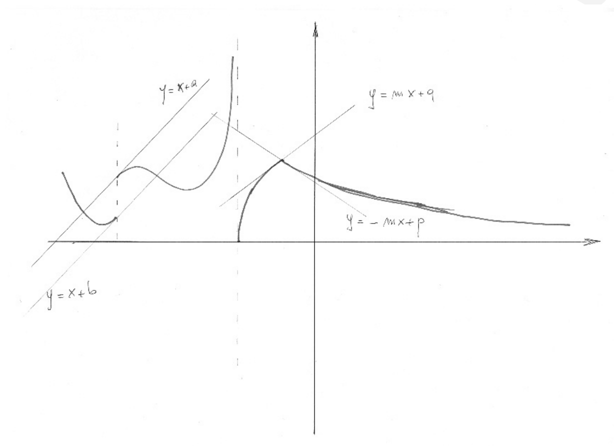


Figura 9.1:

Esercizio 9.8 - Sia data una funzione f il cui grafico è riportato in Figura 9.2. Si supponga che f sia g' per una qualche g. Si tracci un possibile grafico di g. Esiste una g continua?

Esercizio 9.9 - Si dia un esempio di una funzione C^0, ma non C^1.
Si dia un esempio di una funzione di classe C^1, ma non di classe C^2.
Si dia un esempio di una funzione di classe C^2, ma non di classe C^3.
Dato $n \in \mathbf{N}$, si dia un esempio di una funzione di classe C^{n-1}, ma non di classe C^n.

Esercizio 9.10 - Si consideri una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, di classe C^1, tale che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Si può dire che f ha un asintoto $mx + q$ a $+\infty$?

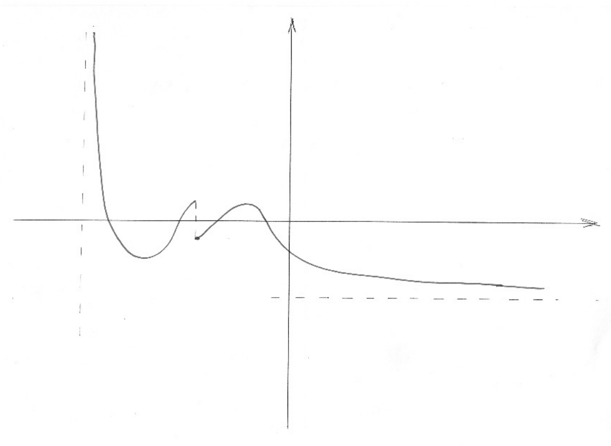


Figura 9.2:

Esercizio 9.11 - Si consideri una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, di classe C^1, tale che

$$f \text{ ha come asintoto a } +\infty \text{ la retta } mx + q.$$

Si può dire che $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = m$?

Esercizio 9.12 - Si consideri una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, di classe C^1, tale che

f ha come asintoto a $+\infty$ la retta $mx + q$,

$f(x) \leqslant mx + q$ definitivamente (per $x \geqslant \bar{x}$ per un certo $\bar{x}$).

Si può dire che $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = m$?
Si può dire che f è definitivamente concava?

Esercizio 9.13 - Si consideri una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, di classe C^2, tale che

f ha come asintoto a $+\infty$ la retta $mx + q$,

$f(x) < mx + q$ definitivamente (per $x \geqslant \bar{x}$ per un certo $\bar{x}$).

Si mostri che f non può essere definitivamente strettamente convessa.

$*$ Esercizio 9.14 Si consideri una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, di classe C^2, tale che

f ha come asintoto a $+\infty$ la retta $mx + q$,

$f(x) \leqslant mx + q$ definitivamente (per $x \geqslant \bar{x}$ per un certo $\bar{x}$).

Si mostri che non è possibile che f'' sia definitivamente positiva (cioè f non può essere definitivamente convessa).

∗ Esercizio 9.15 Si consideri una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, di classe C^2. Si dimostri che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x).$$

Qualche giochino:

Esercizio 9.16 - Si dica quale fra i due seguenti numeri è più grande

$$37^{38} \qquad \text{oppure} \qquad 38^{37}.$$

Soluzioni

Soluzione 9.2 -

1 La funzione è $x \mapsto (\operatorname{sen} x)^{1/5}$, che è definita (e derivabile) per ogni $x \in \mathbf{R}$. Si osservi che coincide con quella del punto 4.

2 La funzione è $x \mapsto (\operatorname{sen} x)^{3/2}$, che è definita solo quando $\operatorname{sen} x \geqslant 0$

3 La funzione è definita solo quando $\operatorname{sen} x \geqslant 0$

6 Chiaramente la funzione è derivabile per ogni $x \neq 0$. Lo è anche in $x = 0$: infatti si verifica facilmente che le derivate sinistra e destra sono uguali

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = 0.$$

7 Per ogni $x \neq 0$ la funzione è derivabile e

$$\frac{d}{dx}\, e^{-\frac{1}{x^2}} = 2\,\frac{1}{x^3}\, e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Per $x = 0$ siamo costretti a valutare il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

per cui la funzione risulta derivabile.

Soluzione 9.3 -

1 È sufficiente verificare la continuità nel punto 1:

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x).$$

Poiché a sinistra di 1 non c'è nulla da verificare è sufficiente richiedere che

$$1 = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (a\,x + b) = a + b.$$

Per verificare se per qualche valore dei parametri f è derivabile calcoliamo le derivate destra e sinistra. La sinistra si valuta facilmente e si può evitare di calcolare il limite del rapporto incrementale, è semplicemente (perché?)

$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x=1} e^{x-1} = 1.$$

A destra invece (utilizzando il vincolo $a + b = 1$)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{a(1+h) + b - 1}{h} = a.$$

Per cui, risolvendo

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

si ottengono i valori $a = 1$ e $b = 0$.

4 I limite da destra e da sinistra in 0 per f forniscono i limiti 1 e a, che debbono essere uguali per avere la continuità, quindi $a = 1$.
Per quanto riguarda la derivata si ha:

$$f'(x) = ae^x + b \quad \text{per } x < 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{x^2}(x\cos x - \operatorname{sen} x) \quad \text{per } x > 0.$$

Usando la regola di de l'Hôpital e passando al limite in zero da destra e da sinistra si ottengono

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = a + b,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x}(\cos x + x \operatorname{sen} x - \cos x) = 0,$$

usando poi il corollario della regola di de l'Hôpital si ottiene infine che f è di classe $C^1(\mathbf{R})$ se

$$a + b = 0$$

cioè $b = -1$. Quando saranno visti, si provino ad utilizzare gli sviluppi di Taylor per svolgere questo esercizio.

Soluzione 9.5 -

1. È continua in 0, non è detto che sia derivabile. Esempio $f(x) = |x|$.

2. È continua e derivabile in 0. Infatti: $f(0) = 0$ e

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| \leqslant \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

   e quindi è continua in 0. Inoltre

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leqslant \frac{x^2}{|x|} = |x|$$

   per cui f è derivabile in 0 e la sua derivata è 0.

3. È continua e derivabile in 0.
   Inoltre se vale $|f(x)| \leqslant |x|^3$ non possiamo concludere che f sia continua, se non in 0. Ad esempio, la funzione

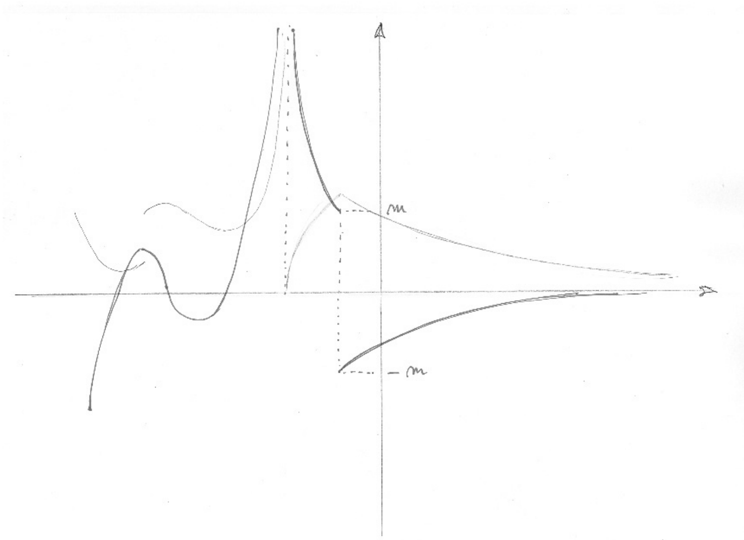
$$g(x) = \begin{cases} x^3 & x \in \mathbf{Q} \\ \\ -x^3 & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

   è continua solamente in 0.

Per quali valori di $a > 0$ si può concludere che

$$|f(x)| \leqslant |x|^a \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ derivabile in } 0\,?$$

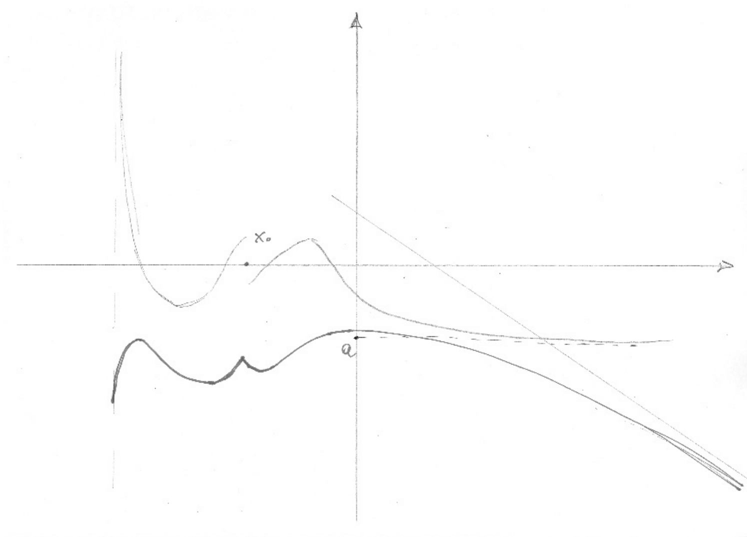
Soluzione 9.7 - Il grafico di f' è riportato nella figura che segue, più in grassetto rispetto al grafico di f. Si osservi la seguente cosa: nel punto di discontinuità il limite della derivata sinistra è 1 (la retta "tangente" è $y = x+b$) e così pure il limite della derivata destra (la retta "tangente" è $y = x+a$). Poiché in tale punto la funzione **non è continua**, indipendentemente dal valore che assume in tal punto, e di conseguenza **non è derivabile**, anche se i limiti destro e sinistro della derivata sono accidentalmente uguali.



Soluzione 9.8 - *Un* possibile grafico è quello riportato in figura. Dico *un* perché ce ne sono infiniti, ovviamente aggiungendo una costante alla funzione il cui grafico è riportato in figura si ottiene il grafico di un'altra funzione con la stessa derivata.
Inoltre si è scelto di disegnare il grafico di una funzione continua, ma nel punto di disconitnuità della derivata potrebbe essere discontinua anche la funzione, differente da quella in figura sempre per una costante additiva.
Si noti come la funzione g' ha limite finito e negativo a $+\infty$ e questo significa che g ha limite $-\infty$ a $+\infty$ e la sua derivata ha come limite una costante, che può essere pensata come la derivata di una retta.

Soluzione 9.10 - La risposta è no. Si considerino le funzioni

$$f(x) = x + \log x \quad \text{e} \quad f(x) = x + x^{\alpha},\ \alpha \in (0,1).$$



Ognuna delle funzioni proposte soddisfa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

ma chiaramente nessuna ammette un asintoto obliquo a $+\infty$.

Soluzione 9.11 - La risposta è no. Si consideri la funzione

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \operatorname{sen} x^2.$$

f ha chiaramente la retta $r(x) = x$ come asintoto a $+\infty$, ma la derivata

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} x^2 + 2\cos x^2$$

non ammette limite a $+\infty$.

Soluzione 9.12 - Le risposte sono no. Si consideri la funzione

$$f(x) = x - \frac{1}{x} (\operatorname{sen} x^2)^2.$$

f ha chiaramente la retta $r(x) = x$ come asintoto a $+\infty$ e $f(x) \leqslant x$. Valutando la derivata

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} (\operatorname{sen} x^2)^2 - 4 \operatorname{sen} x^2 \cos x^2$$

si vede che f' non ha limite 1 e valutando f'' si vede che questa non è definitivamente negativa o non positiva.

Soluzione 9.13 - Per semplicità si supponga che l'asintoto sia la retta

$$r(x) = 0 \tag{9.1}$$

(altrimenti si può considerare, anziché f, la funzione $g(x) = f(x) - mx - q$ che risulta negativa e convergente a zero a $+\infty$).
Si supponga per assurdo che f sia definitivamente convessa. Si ha allora un intervallo $[M, +\infty)$ tale che

$$f''(x) \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } x \geqslant M.$$

Allora si ha f' definitivamente crescente. Per la monotonia esiste allora

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lambda \in \overline{\mathbf{R}}.$$

A questo punto non può capitare che λ sia minore o uguale a zero: infatti se

$$\lambda \leqslant 0$$

si ha, poiché f' crescente, che

$$f'(x) \leqslant 0 \qquad \text{definitivamente.}$$

Per la monotonia di f' si osservi che o $f' < 0$ definitivamente oppure se $f' = 0$ in un certo punto allora f' continua ad essere nulla da quel punto in poi poiché f' è monotona. Se f' fosse definitivamente nulla f sarebbe definitivamente costante e, per (9.1), definitivamente nulla, ma questo non può essere perché si sta supponendo

$$f(x) < mx + q = r(x) = 0 \qquad \text{definitivamente.}$$

Supponiamo allora che $f' < 0$ definitivamente, ma anche questo caso è impossibile, dal momento che f è negativa e tende a zero all'infinito.
Di conseguenza

$$\lambda > 0.$$

Allora, per il teorema della permanenza del segno, f' sarà definitivamente positiva ed in particolare esisteranno $\varepsilon, M > 0$ tali che

$$\lambda - \varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad f'(x) \geqslant \lambda - \varepsilon \quad \text{per ogni } x \geqslant M.$$

Ma questo significherebbe che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

contraddicendo il fatto che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Si conclude che f non può essere definitivamente convessa. Attenzione! Questo non significa che è definitivamente concava (si veda l'Esercizio 9.12).

Si verifichi anche che se una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^2 soddisfa

$$f \text{ ha come asintoto a } +\infty \text{ la retta } mx + q,$$
$$f(x) > mx + q \text{ definitivamente (per } x \geqslant \bar{x} \text{ per un certo } \bar{x}),$$

allora f non può essere definitivamente concava.

Soluzione 9.14 - Innanzitutto si osservi che questo esercizio è differente dal precedente. Infatti se si suppone

$$f(x) \leqslant mx + q$$

la funzione può essere definitivamente convessa: la funzione $f(x) = mx + q$ soddisfa le ipotesi ed è convessa. Ovviamente la derivata seconda non è positiva.

Si supponga per assurdo che $f'' > 0$ definitivamente. Allora f' è definitamente strettamente crescente, per cui

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) \qquad \text{esiste.}$$

Usando la regola di di de l'Hôpital si ha che, poichè f ha un asintoto, che

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x).$$

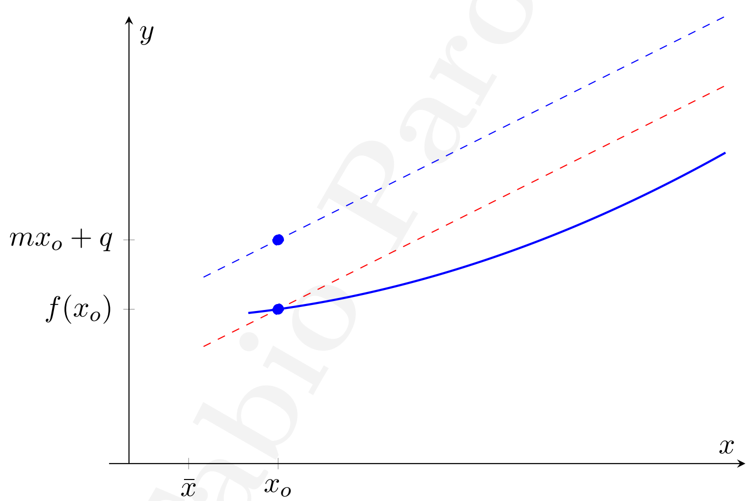
Essendo f' definitamente strettamente crescente si ha quindi

$$f'(x) < m \qquad \text{definitivamente.}$$

Si ha anche che $f(x) < mx + q$ definitivamente: infatti se ci fosse un punto x_o in cui valesse $f(x_o) = mx_o + q$, si dovrebbe avere $f(x) = mx + q$ per ogni $x \geqslant x_o$, ma questo è impossibile perché f è strettamente convessa, In conclusione possiamo supporre l'esistenza di $\bar{x}$ tale che

$$\begin{aligned} &f'(x) < m \\ &f''(x) > 0 \qquad\qquad \text{per ogni } x \geqslant \bar{x}. \\ &f(x) < mx + q \end{aligned}$$

Ora fissiamo $x_o \geqslant \bar{x}$ e consideriamo la retta di coefficiente angolare m passante per il punto $(x_o, f(x_o))$, $r(x) = m(x - x_o) + f(x_o)$, evidenziata in rosso nella figura che segue dove è riportata l'ipotetica configurazione: le due rette tratteggiate hanno coefficiente angolare m e la più alta delle due rappresenta l'asintoto.



Si avrebbe che

$$f(x_o) < mx_o + q$$

$$f(x) < m(x - x_o) + f(x_o) \qquad \text{per ogni } x > x_o$$

visto che $f' < m$ per ogni $x \geqslant \bar{x}$. Allora si avrebbe

$$f(x) - (mx + q) < m(x - x_o) + f(x_o) - (mx + q) = f(x_o) - mx_o - q.$$

Il numero $f(x_o) - mx_o - q$ è negativo per cui passando al limite si avrebbe

$$0 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] \leqslant f(x_o) - mx_o - q < 0$$

il che è impossibile.

Soluzione 9.15 - Per definizione si ha

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\lim_{k\to 0} \frac{f(x+h+k)-f(x+h)}{k} - \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k)-f(x)}{k}}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\lim_{k\to 0} \frac{f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)}{k} \right].
\end{aligned}
$$

Si osservi che

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)}{h} \right] = \\
&\quad = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+k)-f(x+k)-f(x+h)+f(x)}{h} \right] = \\
&\quad = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+k)-f(x+k)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x)}{h} \right] = \\
&\quad = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \left[f'(x+k)-f'(x) \right] = f''(x).
\end{aligned}
$$

Si è mostrato quindi che (lo scambio dei limiti in generale non fornisce il medesimo risultato)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\lim_{k\to 0} \frac{f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)}{k} \right] = \\
&\qquad = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)}{h} \right].
\end{aligned}
$$

Poiché svolgere prima il limite rispetto ad h e poi quello rispetto a k o viceversa fornisce lo stesso risultato è possibile fare i limiti simultaneamente: scegliendo $k=-h$ si ottiene quindi che

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{-h} \left[\frac{f(x+h-h)-f(x+h)-f(x-h)+f(x)}{h} \right] = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \ ,
\end{aligned}
$$

come volevasi dimostrare.

Soluzione 9.16 - Usiamo le derivate. Si osservi che chiedersi se $37^{38} > 38^{37}$ è equivalente a chiedersi

$$(*) \qquad 37^{1/37} > 38^{1/38}$$

Si consideri la funzione $f(x) = x^{1/x}$, definita per $x \in (0, +\infty)$. Studiamola brevemente. Scrivendo $f(x) = e^{\frac{\log x}{x}}$ si ottiene

$$f'(x) = x^{1/x}\,\frac{1 - \log x}{x^2}.$$

Si vede quindi che f cresce fino ad $x = e$ per poi decrescere fino all'infinito. In particolare (dettagli non importanti per concludere)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

ed f parte quindi da 0 in 0, cresce fino ad e assumendo il valore $e^{1/e}$, per poi decrescere fino all'infinito. Si conclude quindi che

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{se } e < x_1 < x_2$$

e quindi in particolare vale $(*)$.