Università degli Studi di Lecce

Eserciziario di Matematica I
Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi"

M. Miranda & F. Paronetto

28 ottobre 2003

In queste dispense viene distribuito del materiale che riteniamo possa essere utile allo studente che si avvicina allo studio del corso di Matematica I. Vengono forniti i testi di alcuni esercizi relativi agli argomenti del corso di Matematica I per la Facoltà di Ingengeria di Lecce, con alcune proposte di soluzione. Teniamo a sottolineare che la nostra è solo *una* proposta di risoluzione, ricordando che una qualsiasi soluzione alternativa, *se corretta*, è del tutto equivalente.

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo ($\star$) sono da ritenersi *facoltativi*, nel senso che, *solitamente*, non sono ritenuti necessari per il superamento dell'esame scritto di Matematica I della Facoltà di Ingeneria di Lecce, fermo restando che almeno un tentativo di risoluzione da parte dello studente è quantomeno auspicabile.

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo ($\star\star$) sono da ritenersi *difficili*; per la risoluzione di tali esercizi non è comunque richiesta altra conoscenza al di fuori di quella fornita durante le lezioni, ma solo un pò più di gusto e buona volontà da parte dello studente.

Sottolineiamo infine che con il presente eserciziario non si intende assolutamente sostituire un qualsiasi testo teorico di Matematica I; consigliamo anzi di avere ben chiari i concetti di teoria *prima* di apprestarsi ad affrontare gli esercizi.

In ultimo, chiediamo scusa per eventuali errori esistenti nel presente eserciziario, e invitiamo chiunque trovi delle inesattezza, a segnalarcele prontamente in modo da provvedere alla loro correzione.

Lecce, 26 settembre 2003,

Michele Miranda
michele.miranda@unile.it

Fabio Paronetto
fabio.paronetto@unile.it

Preliminari

In questo capitolo viene fornita una piccola proposta di esercizi da considerarsi di riscaldamento, nel
Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni e disequazioni:

1. $-x > 0\,;\quad 3x - 6 \geq 0\,;\quad 4 - 8x < 0$
2. $x^2 + x - 6 > 0\,;\quad -x^6 + 7x^3 - 12 > 0$
3. $x^2 + 1 \geq 0\,;\quad (x-1)^2 \geq 0\,;\quad \sqrt{x^2} \geq 0$
4. $x^8 - 2x^7 - 3x^6 \leq 0$
5. $x^{10} - x^6 < 0$
6. $\sqrt{|x|} \geq 0$
7. $(x-1)^3 \geq 0$
8. $2x^3 + 2x^2 - 28x - 48 = 0$
9. $27x^{3/2} - \sqrt{x} \geq 0$
10. $-9x^2 + 12x - 4 \geq 0\,;\quad x^4 - 2x^2 - 8 < 0$
11. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} \geq 0$
12. $\dfrac{10}{x^2+1} > 6 - x^2\,;\quad \dfrac{x^4 - 9}{x^2 + 3} > 0\,;\quad \dfrac{7-x}{4-3x} \leq 1$
13. $x^3 + 4 \leq |x + 4^{1/3}|$
14. $|x + 2| \geq 2$
15. $\dfrac{4|x|}{x^2 - 2|x| - 3} \leq -1$
16. $2|x^2 - x| \geq |x|\,;\quad |x+3| - 2 > 0\,;\quad (x+1)^2 < |x^2 - 1|$
17. $|2x^2 - 16x + 31| < 1\,;\quad x \geq 2(|x| - 1)$

18. $\left|\dfrac{x-1}{x-7}\right| \geq 1\,;\qquad \left|\dfrac{2x-1}{5-x}\right| < 2\,;\qquad \big||x+1|-2\big| > 3$

19. $\sqrt{4x^2-1} < x-3$

20. $\sqrt{2x^2-1} > \sqrt{x^2-3}$

21. $|x|(1-2x^2)^{1/2} > 2x^2-1$

22. Si dimostri, usando la definizione di modulo, che:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

23. Trovare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui è verificata la seguente diseguaglianza:

$$\frac{x^3-2x^2}{x^3-4x^2+3x} \geq 0.$$

24. Risolvere la seguente diseguaglianza:

$$\big||x-4|-3x\big| \geq 2x.$$

Principali formule trigonometriche:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Ricavare, usando le formule precedenti, le seguenti uguaglianze:

1. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
2. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
3. $\sin 2x = 2 \sin x \cos y$; $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
4. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

5. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

6. $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

7. $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

8. $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

9. $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

Dire su quali insiemi sono invertibili le seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sin^2 x \quad$ su $[-\pi/2, \pi/2]$, su $[0, \pi/2]$, su $[\pi/4, \pi/2]$
2. $f(x) = \sin x^2 \quad$ su $[-\pi/2, \pi/2]$, su $[-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}]$, su $[0, \sqrt{\pi}]$
3. $f(x) = \sin 2x \quad$ su $[-\pi/2, \pi/2]$, su $[-\pi/4, \pi/4]$, su $[\pi/4, \pi/2]$
4. $f(x) = \arcsin \sin x \quad$ su $[-\pi/2, \pi/2]$, su $[0, \pi]$

Disegnare gli insiemi di $\mathbb{R}^2$ soddisfacenti le seguenti equazioni:

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -11$
2. $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$
3. $x^2 - 8y - 14x + 49 = 0$
4. $x^2 + 10x + 7y = -32$
5. $y = \dfrac{x+4}{x+3}$
6. $5 - 3x - y + xy = 0$
7. Determinare i seguenti insiemi:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| + |x| \leq 2\}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x^2 > 2x}\right\}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x^2} \leq |x|\right\}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 3x - 27)\sqrt{1 - 2\sin x} > 0\right\}$$

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}.$$

Indice

Parte I

Testo degli Esercizi

Capitolo 1

Numeri Reali

1.1 Rappresentazione decimale dei numeri reali.

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Consideriamo la parte intera di a (definita come il più grande intero minore od uguale ad a la quale si denota con $[a]$)

$$n_0 := [a] \in \mathbb{N}\,.$$

Si ha che

$$n_0 \le a < n_0 + 1\,.$$

Definiamo ora $m_0 = a - n_0 \in [0, 1)$ e consideriamo

$$n_1 := [10m_0] \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\,.$$

Si ha che

$$n_1 \le 10m_0 \le n_1 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{n_1}{10} \le m_0 \le \frac{n_1}{10} + \frac{1}{10}$$

e quindi, per definizione di m_0,

$$n_0 + \frac{n_1}{10} \le a < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{1}{10}\,.$$

Se ora definiamo

$$m_1 = m_0 - \frac{n_1}{10} = a - n_0 - \frac{n_1}{10} \in \left[0, \frac{1}{10}\right)$$

e consideriamo

$$n_2 = [10^2 m_1] \in \{0, 1, 2, \dots 9\}\,.$$

otteniamo

$$n_2 \le 10^2 m_1 \le n_2 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{n_1}{10^2} \le m_1 \le \frac{n_1}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

e quindi infine

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} \le a < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\,.$$

Continuando a ragionare in modo analogo possiamo costruire due successioni

$$\begin{aligned} A_k &:= n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \\ B_k &:= n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \end{aligned} \qquad \text{con } n_k \in \{0, 1, 2, \dots 9\}$$

con la proprietà che

$$A_k \le a < B_k\,. \tag{1.1}$$

Si considerino gli insiemi $S = \{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ e $T = \{B_0, B_1, B_2, \dots\}$. Da (1.1) si deduce che S è limitato superiormente, per cui ammette estremo superiore finito. Proviamo che l'estremo superiore di S è a.
Fissato $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare un $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$A_k > a - \varepsilon\,.$$

Ma ciò è equivalente a

$$a - n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} < \varepsilon\,.$$

Ma da (1.1) deduciamo che

$$a - n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} < \frac{1}{10^k}$$

quindi è chiaro che è sufficiente scegliere k in modo tale che valga $1/10^k \le \varepsilon$ ($k \ge \log_{10} \varepsilon^{-1}$).
In modo analogo si prova che $\inf T = a$.
Se $a < 0$ si può considerare, ad esempio, la decomposizione di $-a$ e poi cambiare di segno.

Osservazioni - Come prima cosa osserviamo che, per ogni numero reale a, abbiamo costruito una successione (una particolare successione) di numeri *razionali* che approssimano il numero a. Questo mostra che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (vedi dispense di teoria). Si possono costruire infinite successioni di razionali approssimanti il numero a, ma quelle che abbiamo scelto sono quelle che usualmente usiamo (approssimazione decimale per difetto e approssimazione decimale per eccesso).
Per esercizio costruire un'approssimazione in base 8 anziché in base 10.
Altra cosa da osservare è che ogni numero, nella rappresentazione decimale, ha solo un numero finito di n_k non nulli è un numero razionale. Non è vero il viceversa!! Ad esempio i numeri la cui parte decimale è periodica $(a - [a])$. Si consideri ad esempio il numero

$$a = 1,3232323232\dots\,.$$

La parte decimale ha periodo 2. Moltiplico allora per 10^2 (l'esponenete è la lunghezza del periodo) e ottengo

$$10^2 a = 100a = 132{,}32323232\dots .$$

Sottraendo a a $100a$ si ottiene

$$99a = 131 \qquad \text{da cui} \qquad a = \frac{131}{99}.$$

Osservazione. Si confronti questo risultato con l'esercizio ???.

1.2 Esercizi

1. Dimostrare che se $x^7, x^{12} \in \mathbb{Q}$, allora anche $x \in \mathbb{Q}$.
2. Dimostrare che $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cioè $\sqrt{2}$ è irrazionale.
3. Dimostrare che se $p \in \mathbb{N}$ è un numero primo, allora $\sqrt{p}$ è irrazionale.
4. Dimostrare che $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ o è intero o è irrazionale.
5. Dimostrare che se $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, allora
$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$
6. Dati $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuoti, dimostrare che
$$\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B),$$
$$\inf A \cup B = \min(\inf A, \inf B).$$
E per $A \cap B$ che cosa si può dire?
7. Date due sezioni A e B di $\mathbb{R}$ (cioè due insiemi disgiunti la cui unione è tutto $\mathbb{R}$ e $A < B$), dimostrare che ammette un unico elemento separatore. Questo è vero pure in $\mathbb{Q}$?
8. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \mathbb{N}.$$
9. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = [0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}.$$
10. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \left\{ \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

11. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = [3, 7).$$

12. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = [-3, 3) \cup \{5, 11\}.$$

13. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \left\{ (-1)^n \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

14. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \left\{ \frac{|5-n|}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

15. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{1+n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

16. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \cos 1/x = 0 \right\}.$$

17. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

18. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \{a^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, a > 0\}.$$

19. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \{a^\varrho : \varrho \in \mathbb{Q}, \varrho > 0, a > 0\}.$$

20. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \left\{ \frac{n^2+m^2}{n-m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

21. Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;
$$A = \left\{ \frac{xy}{x+y} : x, y \in (0, 1) \right\}.$$

22. Ripetere gli esercizi dall'8. al 20. cercando estremi superiore, inferiore, massimo e minimo in $\mathbb{Q}$ invece che in $\mathbb{R}$.

Capitolo 2

Numeri complessi

1. Trovare le radici seste del numero complesso
$$w = (\sqrt{3} + i)^9.$$

2. Risolvere l'equazione $(z-2)^3 = -i$.

3. ($\star$) Risolvere il seguente sistema;
$$\begin{cases} z^2 + z\overline{z} = 1 + 2i \\ \\ (z^2 - 1 + i)(z^2 + 1/i) = 0. \end{cases}$$

4. Calcolare le soluzioni complesse di
$$|z|^2 - 6z + 1 = 0.$$

5. Calcolare le soluzioni complesse di
$$z^4 + 6z^2 - 5 = 0.$$

6. Calcolare le soluzioni complesse di
$$z^4 + 4 = 0.$$

7. Dato il polinomio
$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3,$$
calcolare $p(i)$ e trovare tutte le radici del polinomio.

8. Calcolare le soluzioni complesse di
$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8i.$$

9. ($\star$) Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} z^2\overline{z} - \overline{z}z = -\overline{z} \\ (z^3 + \overline{z})^3 = 1. \end{cases}$$

10. Trovare le soluzioni complesse di

$$z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

11. ($\star$) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} (\alpha z - \beta\overline{z})(\beta z - \alpha\overline{z}) = 4 \\ z^2 = |z|^2. \end{cases}$$

12. ($\star$) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} z^m = |z|^m \\ z = \dfrac{1+it}{1-it}\overline{z}. \end{cases}$$

13. Trovare le soluzioni complesse di

$$z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\overline{z} = 0.$$

14. Dato $w \in \mathcal{C}$, trovare i numeri complessi $z \in \mathcal{C}$ tali che

$$|z - w| = |z + w|.$$

15. ($\star$) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} |z| = |w| \\ z^2 + w^2 = 0 \\ z + w = 1. \end{cases}$$

Capitolo 3

Principio di Induzione

1. Dimostrare che, fissato $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, vale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente formula
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. Dimostrare che, fissato $h > -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,
$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

3. Dimostrare che, fissato $h > 0$ e per ogni $n \geq 1$ naturale,
$$(1 + h)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)h^2}{2}.$$

4. Verificare le seguenti identità :

i)
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

ii)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

iii)
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

iv) ($\star$) Indicato con
$$N_h(n) = \sum_{k=1}^{n} k^h,$$

dimostrare che

$$N_h(n) = \frac{1}{h+1}\left((n+1)^{h+1} - 1 - \sum_{i=0}^{h-1}\binom{h+1}{i} N_i(n)\right).$$

v) $(\star)$

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha + k\beta) = \frac{n}{2}(\beta n + 2\alpha + \beta);$$

vi) $(\star)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)\sqrt{k}}.$$

5. Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

i) $2^n \leq n!$

ii) $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$

iii) $n^2 \leq 2^n, \forall n \geq 4$

iv) $2^n + 4^n \leq 5^n, \forall n \geq 2$

v) $n^n > 2^n n!, \forall n \geq 4$

vi) $(\star)$ $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=0}^{n} x_k^2, \forall (x_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$

vii) $(\star)$ $y^n - x^n \leq (y+x)^{n-1}(y-x), \forall 0 \leq x \leq y, n \geq 1$

viii) $(\star)$ $(2n)! \leq 2^n n^n n!$

ix) $(\star)$ $(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}, \forall x \in (0,1)$

x) $(\star)$ $((n+1)!)^n \leq \prod_{k=0}^{n}(2k)!$

xi) $(\star)$ $(2n)! \leq 2n^{2n}$

xii) $(\star)$ $2n \leq 2^n$

6. Data la successione dei numeri di Fibonacci

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

dimostrare che

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

7. Dimostrare la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{3.1}$$

8. ($\star$) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}.$$

9. ($\star$) Dimostrare che dati comunque n numeri reali positivi $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ tali che $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$, allora

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

e l'uguaglianza vale se e solo se gli n numeri x_i sono tutti uguali ($x_i = 1$ per ogni $i = 1, \ldots n$).
Ricavarne come corollario che se si prendono n numeri reali positivi, allora la media geometrica è più piccola della media artimetica, cioè se $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, allora

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \tag{3.2}$$

10. Dimostrare che $\forall h \geq 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

usando prima la formula del binomio di Newton (3.1), poi la (3.2). Rendersi conto che in generale vale

$$(1+h)^n \geq 1 + \binom{n}{k} h^k.$$

Capitolo 4

Successioni Numeriche

4.1 Il Numero di Nepero e

Si consideri $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, e si dimostri che la successione

$$\alpha_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

è definitivamente strettamente crescente (suggerimento: usare la disuguaglianza delle medie (3.2). Si studino poi in particolare le due successioni $\alpha_n(1)$ e $\alpha_n(-1)$.
È sufficiente considerare $n+1$ numeri $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ definiti da

$$x_1 = \cdots = x_n = 1 + \frac{x}{n}\,,\; x_{n+1} = 1\,.$$

Poiché la media geometrica di k numeri positivi è minore della loro media aritmetica, se $1 + \frac{x}{n} > 0$, e cioè $n > -x$, scrivendo le due medie per $x_1, \ldots x_{n+1}$ si ottiene

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot 1 < \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{x}{n} + \cdots + 1 + \frac{x}{n} + 1\right)$$

e cioè

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Si noti che la disguaglianza è stretta perché $x_1, \ldots x_{n+1}$ non sono tutti uguali.
Concludendo: a_n è crescente per ogni $x > 0$ ed è definitivamente crescente per ogni $x < 0$ (crescente per $n > -x$).
Si considerino ora due casi particolari: $x = 1$ e $x = -1$. Si ottiene allora che le due successioni $\alpha_n(1) = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $\alpha_n(-1) = (1 - \frac{1}{n})^n$ sono crescenti e quindi

$$\begin{aligned} \alpha_n(1) = a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ crescente}\,, \\ \frac{1}{\alpha_n(-1)} = b_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \text{ decrescente}\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza esistono $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Vediamo che vale $a_n \leq b_k$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}$. Infatti, supponendo che $n \leq k$, si ha dalla monotonia di a_n

$$a_n \frac{1}{b_k} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{k-1}{k}\right)^k \leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \left(\frac{k-1}{k}\right)^k = \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^k < 1$$

e quindi $a_n < b_k$. Analogamente si prova la disuguaglianza nel caso in cui $n \geq k$. Da ciò in particolare concludiamo che $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ è limitato superiormente (dai b_k) e $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ è limitato inferiormente (dagli a_n). Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$ esistono *finiti*. Inoltre sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Si pone

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Tale numero è compreso tra 2 e 3 (infatti $a_1 < e < b_6$ e $a_1 = 2$ e b_6 è circa $2,98$). Vediamo quant'è il limite di b_n:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1+1}{n}\right)^{-n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato due sucessioni, una crescente ed una decrescente, convergenti allo stesso limite e.
Tornando a $\alpha_n(1) = a_n$ e $\alpha_n(-1) = b_n^{-1}$ possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} .$$

Per esercizio dimostrare che, se a_n è una successione con limite $+\infty$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e\,.$$

Dedurne che in generale vale, dato $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x , \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = e^x$$

con $(1 + \frac{x}{n})^n$ monotona crescente e $(1 - \frac{x}{n})^{-n}$ monotona decrescente.
Infine, applicando la disuguaglianza dell'esercizio 2 del Capitolo 3 prima con $h = x/n$ poi con $h = -x/n$ si ottengono le disuguaglianze

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1-x} ,$$

cioè in particolare

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} . \tag{4.1}$$

4.2 Osservazioni sul numero di Nepero

Supponiamo che un capitale C venga investito per un anno. È più conveniente ricevere un interesse j dopo un anno oppure un interesse $j/2$ ogni sei mesi?

Soluzione:
Dopo un anno si ha che il capitale è $C + jC = C(1 + j$ se l'interesse viene dato tutto assieme dopo un anno. Se invece dopo sei mesi si ottiene un interesse di $j/2$ si ha alla scadenza dei sei mesi un capitale pari a

$$C + \frac{j}{2}C = C(1 + j/2)$$

e dopo altri sei mesi

$$[C(1 + j/2)] + [C(1 + j/2)]j/2 = C\Big(1 + \frac{j}{2}\Big)^2 .$$

Si vede facilmente che $1+j < (1+j/2)^2$. Se l'interesse maturato venisse pagato, e quindi reinvestito assieme al capitale iniziale. ogni mese si otterrebbe a fine anno

$$C\Big(1 + \frac{j}{12}\Big)^{12} .$$

Analogamente, se l'interesse venisse pagato giornalmente, reinvestendo dopo un anno si avrebbe

$$C\Big(1 + \frac{j}{365}\Big)^{365} .$$

Se l'accredito fosse *istantaneo*, il capitale maturerebbe diventando dopo un anno

$$Ce^j .$$

4.3 Esercizi

1. Data una successione numerica $(a_n)_n$ con

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

dimostrare i seguenti limiti notevoli:

i)

$$\lim_{n\to+\infty} \sin a_n = 0;$$

ii)

$$\lim_{n\to+\infty} \cos a_n = 1;$$

iii)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

2. Fissato $a \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della successione
$$a_n = a^n.$$

3. Sfruttando il fatto che, dato $h > 0$ numero reale, vale la relazione
$$(1+h)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2,$$
dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4. Dimostrare che per $|a| < 1$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} na^n = 0.$$

5. ($\star$) Sia $(a_n)_n$ una successione tale che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L;$$
dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |L|.$$
Quando è vera pure l'implicazione inversa?

6. Calcolare i limiti $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}$ con $a > 1$.

7. Studiare la convergenza delle seguenti successioni:

i) $\quad a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1};$

ii) $\quad a_n = \dfrac{n!}{n^n};$

iii) $\quad a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}, \quad \alpha > 0;$

iv) $\quad a_n = n - \sqrt{n^2+n};$

v) $\quad a_n = \dfrac{3n^2-2n+1}{n-n^2};$

vi) $a_n = \dfrac{2n - 5n^3 - 2}{n^2+1}$;

vii) $a_n = \dfrac{4n + 2/n}{1/n^2 + 5n}$;

viii) $a_n = n \arctan n - \sqrt{n}$;

ix) $a_n = \dfrac{n\sqrt{n} - n^2}{n+1}$;

x) $a_n = \dfrac{2^n + 1}{3^n + 1}$;

xi) $a_n = \dfrac{3\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n} + \arctan n}$;

xii) $a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n^2+1}}$;

xiii) $a_n = \sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 2}$;

xiv) $(\star)$ $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n!}\right)^n$;

xv) $(\star)$ $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^n}\right)^{n!}$;

xvi) $(\star)$ $a_n = \dfrac{n^p}{\alpha^n}$, $\alpha > 0, p \in \mathbb{N}$;

xvii) $(\star)$ $a_n = -2^{\sqrt{n}}$;

xviii) $(\star)$ $a_n = \dfrac{n^{n/2}}{n!}$;

xix) $(\star)$ $a_n = \dfrac{n+1}{n} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+2)}$.

8. Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right]$.

b) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right]$.

c) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$.

9. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n}$.

10. ($\star$) Definita per ricorrenza la successione

$$a_0 \geq 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4},$$

studiarne la convergenza in funzione del parametro a_0.

11. ($\star$) Dimostrare che;

i) fissato $a \in (0, \pi)$ e posto

$$b = a + \sin a,$$

vale ancora che $0 < b < \pi$ (si usi il fatto che $\sin x = \sin(\pi - x)$);

ii) definita per ricorrenza la seguente successione numerica, con punto iniziale $a_0 \in (0, \pi)$;

$$a_{n+1} = a_n + \sin a_n,$$

essa è una successione monotona crescente contenuta nell'intervallo $(0, \pi)$;

iii)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi.$$

12. Studiare la convergenza delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

i) $a_0 = k$, $a_{n+1} = a_n^2$ per $n \geq 0$;

ii) $a_0 = k$, $a_{n+1} = ha_n^2$ per $n \geq 0$;

(Sugg: Provare a scrivere il termine generale della successione).

13. ($\star$) Definita per ricorrenza la successione

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2,$$

dimostrare che la successione è costante per $a = 1$, mentre è crescente per $a \neq 1$. Dedurne quindi che se $a < 1$, allora la successione converge a 1, mentre se $a > 1$ essa diverge a $+\infty$.

14. ($\star$) Definita per ricorrenza la successione

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2,$$

dimostrare che:

i) se

$$\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}},$$

allora la successione è definitivamente uguale a 2;

ii) se
$$\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}},$$
allora la successione è definitivamente pari a -1;

iii) se
$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$
allora la successione è periodica di periodo 2.

15. Data una successione $(a_n)_n$, supposto che
$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda,$$
dimostrare che:

i) se $\lambda < 1$, allora
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0;$$

ii) se $\lambda > 1$, allora
$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty.$$

Cosa succede invece nel caso in cui sia $\lambda = 1$?

16. $(\star)$ Dato un numero reale positivo $B > 0$, dimostrare che:

i) fissato un numero reale $a > 0$, il numero reale
$$b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{B}{a}\right)$$
è sempre un numero reale positivo maggiore di $\sqrt{B}$;

ii) definita per ricorrenza la successione
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{B}{x_n}\right)$$
con punto iniziale un qualsiasi $x_0 > 0$, tale successione è decrescente e maggiore di $\sqrt{B}$;

iii) la successione definita al punto precedente è convergente con limite uguale a $\sqrt{B}$.

17. Mostrare che
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1$$

Capitolo 5

Serie Numeriche

1. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-\cos k}{k^2}$$

2. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$$

3. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k^k} a^k$$

4. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k^2 a}{k+a^2}}$$

5. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{k}\right)$$

6. ($\star$) Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\arctan k\right)^p$$

7. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{n}{n+1}\right)$$

8. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\tan\left(\frac{k+\sqrt{k}}{k^3-k+2}\right)$$

9. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$$

10. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k^p}$$

11. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k}$$

12. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

13. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k+k}{3^k-\sqrt{k}}$$

14. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$$

15. Studiare il carattere della serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)$$

16. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln k!}$$

17. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{k^k}$$

18. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

19. ($\star$) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k^2+k-1}{k^2+3k+5} \right)^{k^2}$$

20. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

21. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 2^{k+1}}{3^k}$$

22. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{\ln k} \right)$$

23. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k + \sin k}$$

24. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(1 - k \arctan \frac{1}{k} \right)$$

25. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{k!}$$

26. ($\star$) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1 + \ln k}{\sqrt{k^3 + 1}} \right)$$

27. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k$$

28. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k^{1/k^2} - 1)$$

29. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{k \ln k}{1 + k^2}$$

30. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1 + \cos k}{3} \right)^k$$

31. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos \pi k}{k + 2}$$

32. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k+1}$$

33. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{(k-3)^k}{k^{k+1}}$$

34. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k+1}{2k-1} \right)^k$$

35. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (k - \sin k) \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k} \right)$$

36. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k \sqrt[k]{k}}$$

37. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{e^k}$$

38. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{a/2+ka^2}$$

39. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln \ln k}$$

40. Si supponga di lasciar cadere una pallina da un'altezza iniziale h_0 e si supponga che la pallina, dopo ogni rimbalzo, risalga ad un'altezza che è proporzionale all'altezza raggiunta prima del rimbalzo (si supponga cioè di aver definito la successione di altezze $h_{n+1} = qh_n$ con $q \in (0,1)$ e $h_0 > 0$ fissato). Stabilire se la pallina smette di rimbalzare in un tempo finito o meno. Calcolare quindi il tempo che ci vuole perché una pallina da ping-pong (che ha come rimbalzo caratteristico all'incirca $q = 0.75$) impiega a fermarsi se lasciata cadere da un'altezza di un metro.

Capitolo 6

Limiti e Funzioni Continue

1. Mostrare che la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$$
è continua in $x = -1$.

2. Mostrare che la funzione
$$f(x) = ||x^3| - 1|$$
è continua in $x = 1$.

3. Dire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
è continua.

4. Dire per quali valori dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ risulta continua la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Dire per quali valori dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ risulta continua la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} + b & 0 \le x \le 1 \\ \\ x^2 + bx + a & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

6. Dire se la funzione $f : (-1, 2) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = x(1-x)[x]$$
è continua o meno (dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, si indica con $[a]$ la parte intera del numero a).

7. Dimostrare i seguenti limiti notevoli

i) $(\star)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0;$

iv) $(\star)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e;$

v) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$

vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1;$

vii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \log b \qquad b > 0;$

viii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha;$

ix) $(\star)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^\alpha A^{-x} = 0, \quad A > 1, \forall\alpha > 0;$

x) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\log x)^\beta x^{-\alpha} = 0 \quad \forall\alpha, \beta > 0;$

8. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, dimostrare che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha.$$

9. Mostrare che
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 3x} = \frac{1}{18}.$$

10. Calcolare i seguenti limiti

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x};$$

ii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x};$$

iii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{1+\sin x};$$

iv) $$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2\sin 2x^2};$$

v) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x};$$

vi) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x};$$

vii) $$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x};$$

viii) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)^2}{x^2(1-\cos x)};$$

ix) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|};$$

x) $$\lim_{x\to +\infty} (x^2+x+1)\sin 2/x^2.$$

xi) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-2\sin^2 x/2}{\sin x}\right)^{\sin x}.$$

xii) $$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right).$$

11. Mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin^2 x}{x^2} = +\infty.$$

12. Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{3^x - 1} = \log_3 5;$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{\sin x};$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x} + 3}{e^{1/x} + 1};$

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + e^{1/(1-x)}};$

v) $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{1 - e^{2x}};$

vi) $\lim_{x\to 0} x^{1/x}.$

vii) $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}.$

viii) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x.$

ix) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arcsin x} - e^{\arctan x}}{\arcsin x - \arctan x};$

x) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x;$

xi) $\lim_{x\to 0} (1 + \sin x)^{1/x};$

xii) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}.$

13. Calcolare i seguenti limiti;

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + 10x)}{x};$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2};$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x) - x}{3x + 2};$

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x};$

v) $\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{1-\cos x}$;

vi) $\lim_{x\to +\infty} x \sin\left(\log \frac{x+1}{x+2}\right)$.

vii) $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\log \frac{x+1}{x+2}\right)$.

14. ($\star$) Sapendo che
$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0,$$
mostrare che
$$\lim_{n\to +\infty} e^{\frac{1-n^2}{2+n}} = 0, \qquad \lim_{n\to +\infty} e^{\tan(1/n-\pi/2)} = 0.$$

15. ($\star$) Data l'equazione di secondo grado
$$ax^2 + bx + c = 0,$$
cosa succede alle due radici se, tenendo fissati b e c si fa il limite $a \to +\infty$?

16. ($\star$) Data una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, dimostrare che esiste almento un punto $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x) = x$ (Sugg: considerare la funzione $g(x) = f(x) - x$ e applicare il teorema della permanenza del segno).

17. ($\star\star$) Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che
$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
dimostrare che $f(x) = f(1)x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (Sugg: calcolare la funzione f nei punti della forma $x = n$, poi nei punti della forma $x = n/m$ e sfruttare quindi la continuità).

18. ($\star\star$) Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che
$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) \\ f(1) = a > 0, \end{cases}$$
dimostrare che $f(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6.1 Esercizi senza svolgimento

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\log(1+x))}{x}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\log(1+x))}{x^2+\sin^4 3x}$

3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}}$

4. $\lim_{x\to 4^+} (x-4)^{x^2-16}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin(x^2+4x))+x}{\log(1+x)}$

6. $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3\sin x)}{\tan x}$

7. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}+e^x+1}{2e^{3x}+2}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\arctan 5x}$

9. $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{1-x}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}{x+x^2}$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\arctan 5x}$

12. $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^7+x^5-3x^2+1}{x^5-x^3+\sin\frac{1}{x}+\cos x}$

13. $\lim_{x\to -\infty} x\sin\frac{1}{x}$

14. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x+x^2)}{\log x}$

15. $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

Capitolo 7

Derivate e Problemi di Massimo e Minimo

1. Calcolare, usando la definizione, la derivata in $x_0 = 1$ della funzione
$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

2. Calcolare, usando la definizione, la derivata in $x_0 = 1$ della funzione
$$f(x) = x\sqrt{x+3}.$$

3. Dimostrare che la funzione
$$f(x) = |\sin x|,$$
non è derivabile nei punti della forma $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \sqrt{x}\sin x;$

ii) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1};$

iii) $f(x) = \dfrac{\sin e^x}{\log(x - \tan x^2)};$

iv) $f(x) = \left(\log x^2\right)^2;$

v) $f(x) = \arctan \dfrac{x}{1-x^2};$

vi) $f(x) = |\sin x|(1 + \cos x)$;

vii) $f(x) = \arctan(\dfrac{\sin x}{1 + \cos x})$;

viii) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$;

ix) $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$;

x) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{1 + x^2}\right)$;

xi) $f(x) = \arccos h\sqrt{x^2 - 1}$;

xii) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$;

xiii) $f(x) = e^{\sqrt{x}}(\sin 2x + \cos 3x)$;

xiv) $f(x) = (x^x)^x$;

xv) $f(x) = (\log x)^{1/\log x}$;

xvi) $f(x) = x|x|$;

xvii) $f(x) = x^2 + \log x$;

xviii) $f(x) = \dfrac{\log x + 1}{\log x - 1}$

xix) $f(x) = \sin x \cos x + x$;

xx) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;

xxi) $f(x) = \tan x + \dfrac{1}{\cos x}$;

xxii) $f(x) = \dfrac{\log \sin x}{\cos x}$;

xxiii) $f(x) = (\arctan x)^{x^2+1}$.

5. Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x) = x^3 + x^2 - |x| + 2$$

nell'intervallo $[-3, 4]$.

6. Trovare massimi e minimi della funzione
$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left| x + \frac{1}{2} \right|.$$

7. Trovare massimi e minimi della funzione
$$f(x) = x - 3\ \sqrt[3]{x}$$

8. $(\star)$ Dimostrare la seguente identità ;
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

9. $(\star)$ Dimostrare la seguente identità :
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$
per ogni $-1 \leq x \leq 1$.

10. $(\star)$ Dimostrare le seguenti identità :
$$2\arctan(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -\pi & \text{se } x \leq -1 \\ \pi & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

11. $(\star)$ Dimostrare le seguenti identità :
$$\operatorname{arcsin} hx = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$
$$\operatorname{arccos} hx = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$
$$\operatorname{arctan} hx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

12. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ ax+b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
con a e b parametri reali, determinare a e b in modo che la funzione f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

13. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{se } x \leq 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
con a e b parametri reali, determinare a e b in modo che la funzione f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

14. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b & \text{se } x \leq 2 \\ 2ax^3 + 11a & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

con a e b parametri reali, determinare a e b in modo che la funzione f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

15. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{se } x \leq 0 \\ b\log(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con a e b parametri reali, determinare a e b in modo che la funzione f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

16. ($\star$) Data la funzione

$$f(x) = \arctan\frac{x}{a} + \log(1+x^2),$$

determinare il valore del parametro a in modo che la tangente al grafico di f nel punto 0 formi un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse.

17. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 + 3x + 1,$$

dire se è invertibile e calcolare quindi

$$(f^{-1})(1).$$

18. ($\star$) Data la funzione

$$f(x) = e^x - \sin x - 3x,$$

dimostrare che esiste un punto $x_0 \in [0,1]$ per il quale $f(x_0) = 0$.

19. ($\star$) Data la funzione

$$f(x) = \sin x + x,$$

dimostrare che esiste un unico punto $x_0 \in [0,\pi/4]$ per il quale $f(x_0) = 1/2$.

20. Dire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \pi/4 \leq x \leq \pi/2 \\ \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi/4 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni del teorema di Rolle.

21. ($\star$) Usare il teorema di Lagrange per dimostrare che

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

22. ($\star\star$) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}},$$

dire se f è continua e derivabile.

23. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato, determinare quello di area massima.

24. Tra tutte le pentole cilindriche senza coperchio con superficie laterale pari a S, determinare raggio e altezza in modo da massimizzare il volume.

25. Tra tutti i rettangoli con area fissata, determinare quello che ha la minima diagonale.

26. Trovare, tra tutti i settori circolari con perimetro fissato, quello di area massima.

27. Tra tutti i triangoli rettangoli di cateti a e b tali che $a + b = 5$, trovare quello di ipotenusa massima e quello di ipotenusa minima.

28. Dato un rettangolo di lati a e b fissati, ritagliare nei quattro vertici quattro quadrati di lato r e costruire quindi il parallelipedo di altezza r e base rettangolare di lati $a - 2r$ e $b - 2r$. Determinare r in modo che il volume di tale parallelepipedo sia massimo.

Capitolo 8

Grafici di Funzioni

Tracciare i grafici delle seguenti funzioni.

1. $$f(x) = \frac{1 + \log x}{x};$$

2. $$f(x) = \left| \frac{e^x - 1}{1 + |x|} \right|;$$

3. $$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 6}{x + 2};$$

4. $$f(x) = \arcsin \frac{x}{x + 1};$$

5. $$f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x};$$

6. $$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x};$$

7. $$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1};$$

8. $$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}};$$

9. $$f(x) = \log \frac{1 - x}{1 + x};$$

10. $$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x - 1}{x^3}};$$

11. $$f(x) = \left| \frac{x}{x - 1} \right|;$$

12. $$f(x) = \min \left(\frac{1}{x^4}, x^2 \right);$$

13. $$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x - 1};$$

14. $$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x;$$

15. $$f(x) = \frac{xe^{-x}}{4x + 1};$$

16. $$f(x) = \frac{\arctan x}{x};$$

17. $$f(x) = \sin x + \cos x;$$

18. $$f(x) = \log \left| \log(x^2 - 1) \right|;$$

19.
$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\sin x};$$

20.
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2}{2+\cos x}\right);$$

21.
$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$$

22.
$$f(x) = \min\left(5, \frac{x^2}{|x-1|}\right);$$

23.
$$f(x) = xe^{1/(1+x)};$$

24.
$$f(x) = x + \frac{\log x}{x};$$

25.
$$f(x) = \log(x - \log x);$$

26.
$$f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-1};$$

27.
$$f(x) = \sqrt{1-\log(1-x)};$$

28.
$$f(x) = \frac{x^2}{1+x} + \frac{3}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right);$$

29.
$$f(x) = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}};$$

30.
$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+1};$$

31.
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}};$$

32.
$$f(x) = \log\left(\frac{2|x|-1}{x+2}\right)^2;$$

33.
$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^{|x-1|}};$$

34.
$$f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x};$$

35.
$$f(x) = \log(1+\sin x + |\sin x|).$$

Capitolo 9

Integrali

1. Trovare le primitive delle seguenti funzioni:

   i) $3x^2 \sin x^3$;

   ii) $\dfrac{1}{x(1+\log^2 x)}$;

   iii) $\dfrac{\tan^3 x}{\cos^2 x}$;

   iv) $\sin x \cos x$;

   v) $\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$;

   vi) $\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;

   vii) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$;

   viii) $\dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

   ix) $(\star)$ $\dfrac{1}{\sin x}$;

   x) $(\star)$ $\dfrac{1}{\cos x}$.

2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

   i) $\displaystyle\int x^2 \arcsin x dx$;

   ii) $\displaystyle\int x \sqrt[3]{8+x} dx$;

   iii) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$;

   iv) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} dx$;

   v) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2} dx$;

vi) $\int \sqrt{x^2-1};$

vii) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx;$

viii) $\int \arctan x dx;$

ix) $\int \frac{\arctan(\frac{1}{2}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx;$

x) $\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

xi) $\int \frac{\log^2 x}{\sqrt{x^5}}dx;$

xii) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx.$

3. Calcolare i seguenti integrali:

i) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log x}dx;$

ii) $\int_0^1 x^2 \arctan x dx;$

iii) $\int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx;$

iv) $\int_0^1 \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx;$

v) $\int_0^{-2} \frac{x^3+x+1}{x-1}dx;$

vi) $\int_1^2 \frac{x}{1-\sqrt{1+x}}dx;$

vii) $\int_0^1 \arcsin x dx;$

viii) $\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}}dx;$

ix) $\int_1^e \log^3 x dx;$

x) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}dx;$

xi) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}dx;$

xii) $\int_2^7 \frac{1}{x+\sqrt{x+2}}dx;$

xiii) $\int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx;$

xiv) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x e^{\sin x}dx;$

xv) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos(x+|x|)dx;$

4. Calcolare le medie integrali delle seguenti funzioni

   i) $|\sin x|$ in $[-\pi, \pi]$;

   ii) $\dfrac{2x}{1+3x^2}$ in $[\sqrt{3}/3, 1]$;

   iii) $\sin x \sin(\cos x)$ in $[0, \pi]$.

5. Trovare la funzione F primitiva della funzione
$$f(x) = \arctan x$$
   per la quale $F(0) = 1$.

6. Dimostrare la seguente identità :
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))\, dx, \quad \forall a > 0.$$
   Utilizzare tale identità per dimostrare le seguenti implicazioni:
$$f \text{ dispari } \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \quad \forall a > 0;$$
$$f \text{ pari } \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad \forall a > 0;$$

7. ($\star$) Dimostrare che se f è una funzione T–periodica, allora
$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

8. ($\star$) Verificare la seguente identità
$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x);$$
   usare quindi questo fatto per calcolare il seguente integrale:
$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

9. ($\star$) Calcolare per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ i seguenti integrali:
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx;$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx;$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx.$$

10. ($\star\star$) Verificare che, dato $k \in \mathbb{N}$, se k è dispari, allora
$$\int_0^{2\pi} \sin^k x dx = \int_0^{2\pi} \cos^k x dx = 0,$$
mentre se k è pari, cioè della forma $k = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$, allora
$$\int_0^{2\pi} \sin^k x dx = \int_0^{2\pi} \cos^k x dx = \frac{n+1}{2n}\pi.$$

11. ($\star$) Calcolare, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il seguente integrale:
$$\int e^{\lambda x} \sin(\mu x) dx.$$

12. ($\star$) Verificare le seguenti identità :
$$\int \frac{a}{x-d} dx = a \log|x-d| + cost., \quad \forall a, d \in \mathbb{R};$$
$$\int \frac{a}{(x-d)^r} dx = \frac{a}{r-1}(x-d)^{r-1} + cost., \quad \forall a, d, r \in \mathbb{R}, r \neq 1;$$
$$\int \frac{bx+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{b}{2}\log((x-\alpha)^2+\beta^2) + \frac{c+\alpha b}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + cost.,$$
$$\forall b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.$$

13. ($\star$) Dimostrare che se f è una funzione continua tale che
$$\int_a^b f(x) dx = 0$$
con $a < b$, allora esiste $z \in (a, b)$ per il quale $f(z) = 0$.

14. ($\star$) Dimostrare che l'integrale
$$I = \int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)} dx,$$
con $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione continua positiva, è indipendente dalla funzione f. (Porre $t = a + b - x$).

15. ($\star\star$) Studiare le relazioni tra i seguenti integrali:
$$I = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x) dx,$$
$$J = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x) dx,$$
$$K = \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x) dx.$$

16. ($\star\star$) Dimostrare la seguente relazione:

$$\log(n+1) - \log 2 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \log(n).$$

Dedurne quindi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1.$$

17. ($\star$) Dimostrare che se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $f(0) = 0$, allora, se

$$\int_0^1 f(x)dx = 1,$$

il massimo di f in $[0,1]$ è strettamente maggiore di 1, cioè

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) > 1.$$

Capitolo 10

Integrali Razionali

1. Calcolare i seguenti integrali razionali:

i) $$\int \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)}dx;$$

ii) $$\int_0^{1/2} \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2-1)}dx;$$

iii) $$\int_1^2 \frac{x+2}{x^4+x^3+x^2+x}dx;$$

iv) $$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}dx;$$

v) $$\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}dx;$$

vi) $$\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}dx;$$

vii) $$\int \frac{x^3+8x+21}{(x^2+4x+5)^2}dx;$$

viii) $$\int \frac{1}{x^2(x^2+2)}dx.$$

2. Calcolare i seguenti integrali, riconducendosi ad integrali razionali:

i) $$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}dx;$$

ii) $$\int \frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}}dx;$$

iii) $$\int \frac{1+\sqrt[3]{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}dx;$$

iv) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx;$$

v) ($\star$) $$\int x^{1/3}(1+3\sqrt{x})^2 dx;$$

vi) ($\star$) $$\int (1-x^2)(2-x^2)^{3/2} dx;$$

vii) ($\star$) $$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1}dx;$$

viii) ($\star$) $$\int \frac{\sqrt{2x-x^2}+x}{2-\sqrt{2x-x^2}}dx;$$

ix) ($\star$) $$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-4x-3}}dx;$$

x) ($\star$) $$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx;$$

xi) ($\star$) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx.$$

3. Calcolare i seguenti integrali trigonometrici, riconducendosi ad integrali razionali:

i) $$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}dx;$$

ii) $$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 3\sin x + 2}dx;$$

iii) $$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx;$$

iv) $$\int \frac{1+\tan x}{\cos x}dx.$$

4. Calcolare i seguenti integrali:

i) $$\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}dx;$$

ii) $$\int \frac{1}{2\cosh x + \sinh x + 1}dx;$$

iii) $$\int \sqrt{\frac{e^x}{e^x + e^{-x}}}dx.$$

Parte II

Risoluzione degli Esercizi

Capitolo 11

Numeri Reali

1. Se $x^7, x^{12} \in \mathbb{Q}$, allora anche
$$x^5 = \frac{x^{12}}{x^7} \in \mathbb{Q},$$
e quindi pure
$$x^2 = \frac{x^7}{x^5} \in \mathbb{Q},$$
$$x^3 = \frac{x^5}{x^2} \in \mathbb{Q},$$
$$x = \frac{x^3}{x^2} \in \mathbb{Q},$$
che era ciò che si voleva dimostrare.

2. Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale; possiamo allora scrivere $\sqrt{2} = a/b$, con $a, b \in \mathbb{N}$ e $MCD(a, b) = 1$ (massimo comun divisore pari ad 1, cioè la frazione a/b è ridotta ai minimi termini). Ma allora si ha che $2b^2 = a^2$, cioè a^2 è un numero pari e quindi a deve essere un numero pari $a = 2a_1$. Ma allora $b^2 = 2a_1^2$, e ne segue che pure b deve essere pari, ma ciò contraddice il fatto che $MCD(a, b) = 1$.

3. Con una piccola variazione dell'esercizio precedente, se fosse $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, sarebbe $\sqrt{p} = a/b$ con $a, b \in \mathbb{N}$ primi tra loro. Ma allora si avrebbe, facendo un'analisi dei fattori primi che compongono i numeri a e b, che nell'espressione
$$pb^2 = a^2,$$
il fattore p comparirebbe un numero dispari di volte nel membro di sinistra, mentre comparirebbe un numero pari di volte in quello di destra. E questo non è possibile.

4. Se decomponiamo n in fattori primi, abbiamo due possibilità ; o tutti i fattori compaiono con una potenza pari (in questo caso n sarà un quadrato perfetto), oppure almeno un fattore compare con potenza dispari. Detto n_1 tale fattore, se fosse $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, avremmo

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Quindi $nq^2 = p^2$, da cui il fattore n_1 comparirebbe con una potenza dispari nel membro di sinistra e con una potenza pari nel membro di destra. Ma ciò non è possibile.

5. Dato $a \in A$, siccome $a \in B$ allora

$$\inf B \leq a \leq \sup B$$

, cioè il numero $\sup B$ è un maggiorante e $\inf B$ è un minorante per A; dalla definizione di estremo superiore e inferiore ne segue quindi che

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

6. Se $a \in A \cup B$ allora o $a \in A$ e quindi $\in A \leq a \leq \sup A$, oppure $a \in B$ da cui $\inf B \leq a \sup B$. In definitiva, si ha che

$$\min(\inf A, \inf B) \leq a \leq \max(\sup A, \sup B)$$

e quindi per definizione di estremo superiore e inferiore di $A \cup B$, si ha l'asserto. Analogamente, se $a \in A \cap B$, siccome $a \in A$ e $a \in B$, si ha che

$$\max(\inf A, \inf B) \leq a \leq \min(\sup A, \sup B),$$

e quindi

$$\max(\inf A, \inf B) \leq \inf A \cap B \leq \sup A \cap B \leq \min(\sup A, \sup B).$$

7. Dal fatto che $A < B$ (cioè $a < b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$), si ha che ogni elemento b di B è un maggiorante per A, cioè $\sup A \leq b$ per ogni $b \in B$. Quindi $\sup A$ è un minorante per B, cioè $\sup A \leq \inf B$. Dobbiamo dimostrare che $\sup A = \inf B\alpha$, in modo che α sia l'unico elemento separatore; se così non fosse, si dovrebbe avere $\sup A < \inf B$, e quindi potremmo trovare un elemento $x \in \mathbb{R}$ con $\sup A < x < \inf B$. Ma allora si avrebbe $x \notin A$ e $x \notin B$, ma ciò contraddice il fatto che $\mathbb{R} = A \cup B$.

8. Si ha chiaramente che $0 \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $0 \in \mathbb{N}$, quindi $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$. Inoltre, siccome per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste, per la proprietà Archimedea dei numeri reali, un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq x$, segue subito che $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato, cioè $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

9. Siccome $0 \in A$ e $0 \leq a$ per ogni $a \in A$, si ha che $0 = \inf A = \min A$. Per quanto riguarda l'estremo superiore, siccome

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q < \sqrt{2}\},$$

si ha chiaramente che $\sup A \leq \sqrt{2}$. Inoltre, siccome il numero irrazionale $\sqrt{2}$ può essere approssimato con numeri razionali (cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in A$ tale che $\sqrt{2} - \varepsilon < q < \sqrt{2}$), si ha che $\sup A = \sqrt{2}$.

10. Siccome $1 - 1/n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \sqrt{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè $a < \sqrt{3}$ per ogni $a \in A$. Inoltre, siccome per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_0},$$

ne segue che $\sqrt{3} = \sup A$. Tale sup non è un min, in quanto per nessun $n \in \mathbb{N}$ si ha che $1-1/n = 1$. Per quanto riguarda l'inf, siccome $1-1/n \geq 0$ con uguaglianza se e solo se $n = 1$, si trova che $\inf A = \min A = 0$.

11. L'insieme A è dato da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 7\}.$$

É chiaro quindi che 3 è un minorante di A e 7 un maggiorante. Siccome poi $3 \in A$, allora $3 = \min A = \inf A$; invece $7 \notin A$, quindi 7 non è il massimo. Per vedere se esso è l'estremo superiore, dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in A$ con $7 - \varepsilon < x_\varepsilon$. Basta quindi scegliere ad esempio $x_\varepsilon = 7 - \varepsilon/2$ e (se $\varepsilon < 8$) si ha che

$$7 - \varepsilon < x_\varepsilon < 7,$$

e quindi $x_\varepsilon \in A$ e quindi $7 = \sup A$.

12. Siccome

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 3\} \cup \{5, 11\},$$

abbiamo che -3 è un minorante e 11 è un maggiorante; inoltre $-3, 11 \in A$, quindi $-3 = \min A = \inf A$ e $11 = \max A = \sup A$.

13. Se poniamo

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{2n},$$

abbiamo che $|a_n| \leq 1/2$ per ogni $\mathbb{N}^+$, cioè

$$-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}.$$

Quindi $1/2$ è un maggiorante e $-1/2$ è un minorante. Inoltre $a_1 = -1/2$ e quindi

$$-\frac{1}{2} = \min A = \inf A.$$

Notanto ora che per n pari $a_n > 0$ e per n dispari $a_n < 0$, per determinare il sup ci concentriamo sugli n pari. Ma se n è pari, possiamo scrivere $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}^+$, e quindi

$$a_n = a_{2k} = \frac{1}{4k} \leq \frac{1}{4}$$

per ogni $k \in N^+$. Quindi $1/4$ è un maggiorante e siccome $a_2 = 1/4$, concludiamo che

$$\frac{1}{4} = \max A = \sup A.$$

14. Possiamo scrivere

$$A = \left\{\frac{5}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, 0\right\} \cup \left\{\frac{n-5}{n+3} : n \in \mathbb{N}, n > 5\right\}.$$

Notando che poi, posto

$$a_n = \frac{|5-n|}{n+3} \geq 0$$

e $a_5 = 0$, se ne ricava che

$$0 = \min A = \inf A.$$

Inoltre per $n > 5$, si ha che

$$a_n = 1 - \frac{8}{n+3} < 1$$

si conclude che

$$\frac{5}{3} = \max A = \sup A.$$

15. Posto

$$a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

si ha che $a_n > 0$ per n pari e $a_n < 0$ per n dispari. Inoltre per n dispari $a_n \geq -1/2$ e $a_1 = -1/2$, quindi

$$-\frac{1}{2} = \min A = \inf A.$$

Infine per n pari, $a_n \leq 1$ e $a_0 = 1$, quindi

$$1 = \max A = \sup A.$$

16. Si noti che
$$A = \left\{ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} \right) : k \in \mathbb{N} \right\}$$
in quanto $\cos 1/x = 0$ se e solo se
$$x = a_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$
Quindi, siccome $0 < a_k \leq 2/\pi$ e $a_0 = 2/\pi$, si ottiene che
$$\frac{2}{\pi} = \max A = \sup A.$$
Per vedere che $0 = \inf A$, dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $x_\varepsilon \in A$, cioè un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ con
$$x_\varepsilon = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k_\varepsilon + 1} \right) < \varepsilon.$$
Ma un tale x_ε lo troviamo se scegliamo k_ε in modo che
$$k_\varepsilon > \frac{1}{\pi\varepsilon} - \frac{1}{2},$$
e quindi
$$0 = \inf A.$$

17. Notando che $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$
e $1 \in A$, si ha subito che
$$1 = \max A = \sup A.$$
Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}$, $1/(1+x^2) > 0$ e quindi $0 \leq \inf A$. Mostriamo che in realtà 0 è l'estremo inferiore. Dobbiamo quindi trovare, per ogni $\varepsilon > 0$ un $a_\varepsilon \in A$ (e quindi un $x_\varepsilon \in R$) tale che
$$a_\varepsilon = \frac{1}{1+x_\varepsilon^2} < \varepsilon.$$
Basta quindi che $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ sia scelto in modo che
$$|x_\varepsilon| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$
per concludere che
$$0 = \inf A.$$
Non potrà infine essere un minimo in quanto non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ per il quale $1/(1+x^2) = 0$.

18. Ci sono tre possibilità ; o $a = 1$, o $0 < a < 1$, oppure $a > 1$. Nel primo caso abbiamo che $A = \{1\}$ e quindi

$$1 = \min A = \inf A = \max A = \sup A.$$

Nel caso in cui $0 < a < 1$, notando che

$$0 < a^n = aa^{n-1} < a^{n-1} < a,$$

segue subito che

$$a = \max A = \sup A,$$

e $0 \leq \inf A$. Per vedere che $0 = \inf A$, bisogna trovare, fissato $\varepsilon > 0$, un numero $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ tale

$$a^{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Ma basterà quindi scegliere $n_\varepsilon > \log_a \varepsilon$ per concludere. Notiamo che 0 non è un minimo in quanto non esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $a^n = 0$. Nell'ultimo caso in cui $a > 1$, notiamo che

$$a^n = aa^{n-1} > a^{n-1} > a,$$

e quindi si ha subito che

$$a = \min A = \inf A.$$

Dimostriamo che $\sup A = +\infty$; per dimostrare questo bisogna mostrare che fissato comunque un numero reale $M \in \mathbb{R}$, esiste un elemento $a_M \in A$ tale che $a_M > M$. Bisogna quindi trovare un esponente $n_M \in N^+$ tale che $a^{n_M} > M$, e per fare questo basterà prendere

$$n_M > \log_a M.$$

19. Noitiamo che se $\varrho_1 > \varrho_2$, cioè , scritto $\varrho_1 = p_1/q_1$, $\varrho_2 = p_2/q_2$ $(p_1, p_2, q_1 q_2 \in \mathbb{N})$, se $p_1 q_2 > p_2 q_1$, allora

    - se $a < 1$, allora $a^{\varrho_1} < a^{\varrho_2}$ in quanto $a^{p^1 q_2} < a^{p_2 q_1}$;
    - se $a > 1$, allora $a^{\varrho_1} > a^{\varrho_2}$ in quanto $a^{p^1 q_2} > a^{p_2 q_1}$.

    Quindi, dato che per ogni $\varrho \in \mathbb{Q}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq \varrho < n - 1$, il risultato dell'esercizio seguirà identicamente da quello dell'esercizio precedente.

20. Notiamo che l'insieme

$$A_0 = \{n : n \in \mathbb{N}^+\} \subset A$$

in quanto basta porre $m = 0$ nell'espressione

$$\frac{n^2 + m^2}{n - m}.$$

Quindi, dato che $\sup A_0 = +\infty$, si ha che pure $\sup A = +\infty$. Inoltre, siccome pure

$$B_0 = \{-m : m \in \mathbb{N}^+\} \subset A,$$

avremo che $\inf A = -\infty$ in quanto $\inf B_0 == \infty$.

21. I risultati degli esercizi dall'8. al 20. restano gli stessi tranne che;
    - negli esercizi 9., 10. 16. non esiste l'estremo superiore;
    - in 19. e 20. bisogna distinguere i casi in cui $a \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nel primo caso si ottiene $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ e quindi non si hanno estremo inferiore e superiore, mentre nel secondo caso si procede come se fossimo in $\mathbb{R}$.

Capitolo 12

Numeri complessi

1. Scriviamo anzitutto il numero w in coordinate polari; partiamo quindi dal numero complesso
$$w_0 = \sqrt{3} + i.$$
Calcolando modulo e argomento si trova
$$w_0 = 2(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6).$$
Dalle formule di De Moivre otterremo quindi che
$$w = -i2^9.$$
Le radici saranno quindi date dalla formula
$$z_k = 2\sqrt{2}(\cos \theta_k + i \sin \theta_k),$$
con
$$\theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

2. Facendo la sostituzione $w = z - 2$, si tratta di risolvere l'equazione
$$w^3 = -i;$$
dobbiamo quindi trovare le tre radici cubiche del numero complesso $-i$, che ha mudulo 1 e argomento pari a $3\pi/2$. Quindi le soluzioni saranno
$$w_k = (\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$
In definitiva, la soluzione dell'esercizio sarà data dai tre numeri complessi
$$z_k = (2 + \cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

3. La seconda equazione ci da come soluzioni

$$z^2 = 1 - i, \quad z^2 = -\frac{1}{i} = i. \tag{12.1}$$

Vediamo se queste due soluzioni (che diventerebbero quattro passando alle radici quadrate) sono compatibili con la prima equazione. Tenendo presente che $z\overline{z} = |z|^2$ e che $|z|^2 = |z^2|$, dalla prima delle (12.1) si ricava che la prima equazione del sistema diventa

$$1 - i + 2 = 1 + 2i,$$

che non è possibile. Dalla seconda delle (12.1), otteniamo

$$i + 1 = 1 + 2i,$$

inammissibile pure questa. Quindi il sistema non ha soluzioni.

4. Non trattandosi di un polinomio, scriviamo il numero complesso $z = a+ib$, in modo da trovare il sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 6a + 1 = 0 \\ -6b = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzioni i numeri complessi (in realtà reali) $z_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $z_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

5. Trattandosi di un polinomio (biquadratico), usando la formula risolutiva, si ha, ponendo $w = z^2$,

$$w_1 = -3 + \sqrt{14}, \quad w_2 = -3 - \sqrt{14}.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione data saranno quindi le radici quadrate delle due soluzioni date, cioè

$$z_1 = \sqrt{\sqrt{14} - 3}, \quad z_2 = -\sqrt{\sqrt{14} - 3},$$

$$z_3 = i\sqrt{\sqrt{14} + 3}, \quad z_4 = -i\sqrt{\sqrt{14} + 3}.$$

6. Le soluzioni saranno date dalle quattro radici quarte del numero complesso $w = -4$, e cioè

$$z_k = \sqrt{2}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$$

7. Notiamo che $p(i) = 0$, quindi, dato che il polinomio ha coefficienti reali, si dovrà avere che anche $-i$ è una radice del polinomio. Avremo quindi che

$$p(z) = (z^2 + 1)q(z),$$

dove $q(z) = z^2 - 4z + 3 = (z - 3)(z - 1)$.

8. Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$(z+1)^3 = 8i.$$

Si tratta quindi, posto $w = z+1$, di trovare le tre radici cubiche del numero complesso $8i$, di modulo 8 e argomento $\pi/2$; avremo quindi che le sue tre radici cubiche sono date da

$$w_k = 2(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2,$$

da cui

$$z_k = (-1 + 2\cos\theta_k + 2i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

9. Notando che il numero $z = 0$ non è soluzione del sistema, possiamo dividere la prima equazione per $\overline{z}$ ed ottenere l'equazione equivalente

$$z^2 - z + 1 = 0,$$

che ha come soluzioni

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Sostituendo questi due valori nella seconda equazione, si trova che il sistema non ha soluzioni.

10. L'equazione può essere riscritta come

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4},$$

da cui

$$z_k = -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k = 0, 1.$$

11. Scrivendo $z = a + ib$ la seconda equazione implica che $b = 0$; la prima equazione diventa quindi

$$-(\alpha - \beta)^2 a^2 = 4,$$

che ha le due soluzioni complesse

$$a_{1,2} = \pm\frac{2i}{\alpha - \beta}.$$

Ma dovendo essere a reale, ciò implica che il sistema non ha soluzioni.

12. Scriviamo il numero complesso z nella forma trigonometrica compatta

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}.$$

La prima equazione diventa quindi

$$\rho^m e^{im\theta} = \rho^m,$$

che ha per soluzioni tutti i numeri reali $\rho > 0$ e gli argomenti θ della forma

$$\theta = \frac{2k\pi}{m}.$$

Andando a sostituire nella seconda equazione, troviamo

$$\rho e^{i\theta} = \frac{1+it}{1-it}\rho e^{-i\theta},$$

o equivalentemente

$$e^{2i\theta} = \frac{1+it}{1-it} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}.$$

Si noti che non ci sono condizioni su ρ. D'altro canto il sistema è omogeneo nella variabile z, cioè se z_0 è una soluzione del sistema, allora pure il numero complesso cz_0 con $c \in R^+$ è soluzione del sistema. Vediamo ora di trovare le soluzioni del nostro sistema. Scrivendo

$$\begin{cases} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\phi, \\ \\ \dfrac{2t}{1+t^2} = \sin\phi, \end{cases}$$

le soluzioni del sistema si hanno quando

$$e^{2i\theta} = e^{i\phi},$$

e cioè quando l'angolo $2\theta - \phi$ è multiplo di 2π,

$$2\theta - \phi = 2h\pi.$$

Mettendo insieme le informazioni ottenute, si ottiene che il sistema ha soluzioni se l'angolo ϕ è della forma

$$\phi = \frac{4k\pi}{m} - 2h\phi,$$

che tradotto in condizioni sul parametro t diventa

$$t = \tan\phi/2 = \tan\left(\frac{2k\pi}{m}\right).$$

13. Notiamo anzitutto che $z = 0$ è soluzione dell'equazione data. Cerchiamo quindi le soluzioni non nulle; moltiplicando l'equazione per z otteniamo

$$z^2|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i|z|^2 = 0,$$

o equivalentemente, dato che $z \neq 0$,

$$z^2 - (1 + 4\sqrt{3})i = 0.$$

Quindi avremo due soluzioni non nulle, che altro non sono che le due radici del numero complesso $(1 + 4\sqrt{3})i$, e cioè

$$z_1 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(1 + i),$$

$$z_2 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos 5\pi/4 + i \sin 5\pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(-1 - i).$$

14. Scrivendo $w = a + ib$ e $z = x + iy$, l'equazione è equivalente all'equazione nelle due incognite reali $x, y \in \mathbb{R}$ (essendo una equazione in due incognite in generale non ci possiamo aspettare una sola soluzione)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2$$

che ha per soluzione il luogo di punti descritto dall'equazione

$$by = -ax$$

che descrive una retta nel piano Oxy. Si poteva arrivare a tale risultato interpretando geometricamente l'equazione data; la quantità $|z-w|$ indica la distanza di z da w, mentre $|z+w|$ rappresenta la distanza di z da $-w$. Quindi le soluzioni dell'equazione saranno esattamente i punti equidistanti da w e $-w$, cioè l'asse del segmento che congiunge w con $-w$ (provare a fare un disegno).

15. Scrivendo il sistema con $z = a + ib$ e $w = c + id$, si trovano le soluzioni

$$z = \frac{1}{2}(1 + i), \quad w = \frac{1}{2}(1 - i)$$

$$z = \frac{1}{2}(1 - i), \quad w = \frac{1}{2}(1 + i).$$

Capitolo 13

Principio di Induzione

1. La dimostrazione può essere fatta in due differenti modi; o dimostrando direttamente la formula oppure procedendo per induzione. La dimostrazione diretta procede come segue;

$$\begin{aligned} 1+x+x^2+\ldots+x^n &= \frac{(1+x+x^2+\ldots+x^n)(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1+x+\ldots+x^n-x-x^2+\ldots x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \end{aligned}$$

Per la dimostrazione per induzione, la formula è chiaramente vera per $n=0$; supposta vera per n, vediamo se questo implica la formula per $n+1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}. \end{aligned}$$

2. La formula è chiaramente vera per $n=0$. Vediamo il passo induttivo;

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &= (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) \\ &= 1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h. \end{aligned}$$

3. Per $n=1$ la formula è vera in quanto h è positivo. Per il passo induttivo, bisogna dimostrare che

$$(1+h)^{n+1} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}\left(h^2+h^3\right) + h \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2.$$

L'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che

$$h\left(\frac{n(n-1)}{2}h^2 - nh + 1\right) \geq 0,$$

essendo h e il membro all'interno delle parentesi positivi. Tale membro è infatti un polinomio di secondo grado in h con discriminante

$$\Delta = 2n - n^2.$$

Tale discriminante è definitivamente negativo per $n > 2$, quindi il polinomio sarà sempre positivo per $n > 2$; da qui segue il passo induttivo.

4. Nel punto i), per $n = 1$ la formula si riduce a

$$1 = 1,$$

chiaramente vera. Per il passo induttivo abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Nel punto ii), per $n = 1$ la formula è chiaramente vera. Passo induttivo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

che è la formula desiderata.

In iii), per $n = 1$ la formula è ovvia. Per il passo induttivo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda iv), notiamo che

$$(k+1)^{h+1} = \sum_{i=0}^{h+1} \binom{h+1}{i} k^i = k^{h+1} + hk^h + \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h+1}{i} k^i.$$

Quindi

$$hk^h = (k+1)^{h+1} - k^{h+1} - \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h+1}{i} k^i$$

da cui

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} hk^h &= \sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{h+1}-k^{h+1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{h-1}\binom{h+1}{i}k^i\\ &= (n+1)^{h+1}-1-\sum_{i=0}^{h-1}\binom{h+1}{i}\sum_{k=1}^{n}k^i.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi scritto che

$$hN_h(n)=(n+1)^{h+1}-1-\sum_{i=0}^{h-1}\binom{h+1}{i}N_i(n),$$

che è quanto volevamo dimostrare.

In v), si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\alpha+k\beta) &= \sum_{k=1}^{n}\alpha+\sum_{k=1}^{n}\beta k=n\alpha+\beta\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n}{2}(\beta n+2\alpha+\beta).\end{aligned}$$

Nel caso vi), per $n=1$ la formula si riduce a

$$\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-1,$$

chiaramente vera. Per il passo induttivo abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{n}-1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)\sqrt{k}}\\ &\quad +\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n+1}\\ &= \frac{\sqrt{n+2}}{n+1}-1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)\sqrt{k}}+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}\\ &= \frac{\sqrt{n+2}}{n+1}-1+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{(k-1)\sqrt{k}}.\end{aligned}$$

5. Vediamo i);

$$2^{n+1}=22^n\leq 2n!\leq(n+1)!$$

dove l'ultima disuguaglianza segue per $n\geq 1$. Per quanto riguarda la base chiaramente $2=2!$. Per il punto ii),

$$\begin{aligned}(2(n+1))! &= (2n+2)(2n+1)(2n)!\geq 2(n+1)(2n+1)2^n(n!)^2\\ &\geq 2^{n+1}(n+1)(n+1)(n!)^2\end{aligned}$$

in quanto $2n+1 \geq n+1$. Quindi il passo induttivo. La base induttiva è chiaramente vera per $n=1$. Per il punto iii),

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1.$$

Quindi il passo induttivo è vero se verifichiamo che

$$2n+1 \leq 2^n,$$

e questa si dimostra per induzione essere vera se $n \geq 4$. La base, fatta per $n=4$, si riduce a $4^2 = 2^4$. Per la iv),

$$2^{n+1} + 4^{n+1} = 22^n + 44^n \leq 4(2^n + 4^n) \leq 45^n \leq 5^{n+1}.$$

Per la base, la proprietà è falsa per $n = 0, 1$, mentre è vera per $n = 2$. Quindi è vera per $n \geq 2$. Per la v),

$$(n+1)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n n^n(n+1) > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^n n!(n+1) > 22^n(n+1)!$$

che è la disuguaglianza desiderata. Per la base, è chiaramente vera per $n=4$, mentre è falsa per $n = 1, 2, 3$, quindi la proprietà è vera per $n \geq 4$. Per il punto vi),

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n+1} x_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k \\
&\leq n\sum_{k=0}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 + \sum_{k=0}^{n} 2x_{n+1}x_k \\
&\leq n\sum_{k=0}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 + \sum_{k=0}^{n}(x_{n+1}^2 + x_k^2) = \sum_{k=0}^{n+1} x_k^2,
\end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio segue dalla disuguaglianza $2ab \leq a^2 + b^2$. Per dimostrare vii), notiamo che per come sono stati presi x e y, si ha che $xy, y^n - x^n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$, quindi vale

$$y^{n+1} - x^{n+1} \leq y^{n+1} - x^{n+1} + xy(y^{n-1} - x^{n-1}) = (y+x)(y^n - x^n)$$

da cui, per ipostesi induttiva

$$y^{n+1} - x^{n+1} \leq (y+x)(y+x)^{n-1}(y-x) = (y+x)^n(y-x).$$

Infine, per $n=1$ la disuguaglianza è facilmente verificata, quindi è dimostrato. Per il punto viii),

$$(2(n+1))! = 2(n+1)(2n+1)(2n)! \leq 2^{n+1}(n+1)!(2n+1)n^n.$$

Quindi la disuguaglianza segue se dimostriamo che

$$(2n+1)n^n \leq (n+1)^{n+1},$$

o equivalentemente, se

$$2-\frac{1}{n+1}=\frac{2n+1}{n+1}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

disuguaglianza sempre vera. La base è poi chiaramente vera per $n=1$. Per il punto ix), abbiamo

$$(1-x)^{n+1}=(1-x)(1-x)^{n}\leq\frac{1-x}{1+nx}.$$

Bisogna quindi dimostrare che

$$\frac{1-x}{1+nx}\leq\frac{1}{1+(n+1)x},$$

o equivalentemente

$$(1-x)(1+(n+1)x)\leq 1+nx.$$

Ma questa è chiaramente verificata. Per la base, è facilmente verificata per $n=0$. Per il punto x), si ha

$$\begin{aligned}((n+2)!)^{n+1} &= (n+2)!(n+2)^{n}((n+1)!)^{n}\\ &\leq (n+2)!(n+2)^{n}\prod_{k=0}^{n}(2k)!\\ &= \frac{(n+2)^{n}}{(n+3)\dots(2n+2)}\prod_{k=0}^{n+1}(2k)!\end{aligned}$$

e l'asserto segue in quanto

$$\frac{(n+2)^{n}}{(n+3)\dots(2n+2)}\leq 1.$$

La base è poi chiaramente vera per $n=0$. Per il punto xi),

$$\begin{aligned}(2(n+1))! &= 2(n+1)(2n+1)(2n)!\leq 2(n+1)(2n+1)2n^{2n}\\ &= 4\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}(n+1)^{2(n+1)},\end{aligned}$$

e quindi l'asserto segue in quanto

$$2\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}\leq 1.$$

La base induttiva poi è immediata. Per l'ultimo punto xxii) si ha

$$2(n+1)=2n+2\leq 2^{n}+2\leq 2^{n+1}$$

in quanto $2\leq 2^{n}$ se $n\geq 0$. Per $n=0$, ci si riduce a verificare che $0\leq 1$, sempre vera.

6. Verifichiamo il passo induttivo:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

e l'asserto segue notando che

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

La base dell'induzione è immediata.

7. Vediamo anzitutto il passo induttivo; supponiamo quindi che la formula del binomio di Newton sia vera al passo n e dimostriamo la formula per $(n+1)$, cioè mostriamo che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Tenendo presente che

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k \\
&\quad +\binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}$$

Per la base dell'induzione, basta notare che

$$(a+b)^0 = 1.$$

8. Abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

per la formula del binomio di Newton.

9. Per quanto riguarda la base induttiva, abbiamo che se

$$x_1 + x_2 = 2,$$

allora

$$x_1 \cdot x_2 = x_1(2-x_1) \le 1,$$

in quanto la precedente disuguaglianza è equivalente a richiedere che $(x_1 - 1)^2 \ge 0$, che è sempre vera. Per il passo induttivo, se $x_1+\ldots+x_{n+1} = n+1$, allora abbiamo due possibilità ; o tutti i numeri sono uguali a 1 (e quindi non abbiamo niente da dimostrare), oppure ce ne è almeno uno più grande di 1 e di conseguenza almeno uno minore di 1. Possiamo supporre che si trattino del primo e del secondo numero, cioè $x_1 = 1+a$ e $x_2 = 1-b$ con $a, b \in (0,1)$. Otteniamo quindi che

$$1 + a + 1 - b + x_3 + \ldots + x_{n+1} = n+1,$$

o equivalentemente

$$(1 + a - b) + x_3 + \ldots + x_{n+1} = n.$$

Possiamo applicare quindi l'ipotesi induttiva agli n numeri $(1+a-b), x_3, \ldots, x_{n+1}$ ed ottenere che

$$(1 + a - b) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leq 1.$$

A questo punto la dimostrazione segue in quanto

$$x_1 \cdot x_2 = 1 + a - b - ab \leq 1 + a - b.$$

Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, chiamata M la media aritmetica, abbiamo che

$$M = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

e quindi possiamo applicare il passo precedente sostituendo i numeri x_i con $y_i = x_i/M$.

10. La dimostrazione usando il binomio di Newton è immediata in quanto i primi due termini del binomio sono proprio 1 e nh, e il resto è una quantità positiva. Per la seconda parte si considerino gli n numeri

$$x_i = 1, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad x_n = 1 + nh;$$

applicando la formula (3.2), si ottiene quanto desiderato.

Capitolo 14

Successioni Numeriche

1. Per dimostrare questi fatti, tutto quello che bisogna sapere è che per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, valgono le seguenti disuguaglianze

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|. \tag{14.1}$$

Dalla prima segue immediatamente la i); per la ii) si sfrutta l'identità

$$\sin^2 a_n + \cos^2 a_n = 1,$$

e il fatto che per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ il coseno è positivo. Per quanto riguarda la iii), dalla (14.1), se $a_n > 0$ si ha

$$\sin a_n \leq a_n \leq \tan a_n,$$

da cui, sapendo che anche $\sin a_n$ e $\tan a_n$ sono positivi,

$$1 \leq \frac{a_n}{\sin a_n} \leq \frac{1}{\cos a_n}$$

e l'asserto segue per il punto ii). Se invece $a_n < 0$, pure $\sin a_n$ e $\tan a_n$ sono negativi, e la (14.1) diventa

$$\sin a_n \geq a_n \geq \tan a_n,$$

da cui

$$1 \leq \frac{a_n}{\sin a_n} \leq \frac{1}{\cos a_n}.$$

2. Dividiamo la discussione in vari casi; se $a > 1$, otteniamo

$$a^{n+1} - a^n = a^n(a-1) > (a-1),$$

da cui $a^n - 1 > n(a-1)$. Quindi la distanza del numero a^n da 1 aumenta sempre di più , e siccome, fissato un qualunque numero $M > 0$, essendo $a > 1$, esisterà un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$n(a-1) > M, \quad \forall n \geq n_0.$$

E quindi
$$a^n > M + 1, \quad \forall n \geq n_0,$$
e quindi la successione diverge a $+\infty$. Per $0 < a < 1$, possiamo scivere
$$a = \frac{1}{b}, \quad b > 1,$$
da cui otteniamo che la successione converge a 0. Per $-1 < a < 0$ si scive $a = -b$ con $0 < b < 1$ e si ottiene ancora che la successione converge a 0. Per $a \leq -1$ si ottiene una successione a termini di segno alterno con $|a^{n+1} - a^n| \geq 2$, e quindi la successione non può convergere. Infine, per $a = 1$, la successione è costantemente uguale a 1, quindi converge a 1.

3. Siccome $n \geq 1$ è un numero intero, allora pure la sua radice n–esima sarà un numero maggiore di 1, cioè potremo scrivere
$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$$
dove gli $h_n > 0$ sono numeri reali positivi. Dalla disuguaglianza data, otteniamo quindi, elevando alla n,
$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2,$$
o equivalentemente
$$h_n^2 \leq \frac{2}{n}.$$
Abbiamo quindi che
$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0,$$
da cui $\sqrt[n]{n} \to 1$.

4. Cominciamo con l'osservare che, se indichiamo con $a_n = na^n$, allora abbiamo che
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \frac{n+1}{n} a.$$
Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |a| < 1.$$
Questo vuol dire che, fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esisterà un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$
$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = |a| + \varepsilon,$$
e cioè
$$|a_n| < (|a| + \varepsilon)|a_{n-1}| < (|a| + \varepsilon)^2 |a_{n-2}| < (|a| + \varepsilon)^{n-1} |a|.$$

Ma se ε è stato scelto in modo che $|a| + \varepsilon < 1$ (cioè se $\varepsilon < 1 - |a|$), allora abbiamo trovato che, posto $\lambda_\varepsilon = |a| + \varepsilon$,

$$|a_n| < \lambda_\varepsilon^{n-1}|a| \to 0.$$

Dimostriamo il secondo limite usando un'altra tecnica: si noti che la successione

$$a_n = \frac{a^n}{n}$$

è positiva e monotona crescente, in quanto

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(1+n)n}\left[na^n\left(a - \frac{n+1}{n}\right)\right]$$

e a è definitivamente maggiore di $(n+1)/n$. Quindi il limite della successione esiste ed è o un numero positivo oppure è $+\infty$. Osservando poi che

$$a_{2n} = \frac{a^n}{2}a_n,$$

se ne deduce, passando al limite, che il limite è $+\infty$.

5. L'implicazione segue dalla disuguaglianza triangolare

$$||a| - |b|| \leq |a + b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Infatti

$$||a_n| - |L|| = ||a_n| - | - L|| \leq |a_n + (-L)| = |a_n - L| \to 0.$$

È facile convincersi che il viceversa non è vero; basta considerare la successione $a_n = (-1)^n$ che in valore assoluto converge a 1 (è sempre uguale a 1), mentre essa non converge essendo indeterminata.

Tuttavia ci sono alcuni casi in cui l'implicazione inversa vale; ad esempio, se $L = 0$, come segue immediatamente dalle definizioni di limite. Inoltre, anche se $L \neq 0$ e la successione ha definitivamente lo stesso segno di L. Difatti, indicata con $sgn(x)$ la funzione segno del numero reale x, cioè la funzione che vale 1 se $x > 0$, 0 se $x = 0$ e -1 se $x < 0$, si ha chiaramente che $|x| = x \cdot sgn(x)$; quindi dire che la successione ha definitivamente lo stesso segno di L significa dire che esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $sgn(a_n) = sgn(L)$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi per ogni $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} ||a_n| - |L|| &= |a_n \cdot sgn(a_n) - L \cdot sgn(L)| = |a_n \cdot sgn(L) - L \cdot sgn(L)| \\ &= |sgn(L)| \cdot |a_n - L| = |a_n - L| \end{aligned}$$

in quanto $|sgn(L) = 1|$.

6. La successione

$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$

è positiva e monotona decrescente per $n \geq 3$, in quanto

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)} \ln \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} == \frac{1}{n(n+1)} \ln \left(\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$

Siccome l'argomento del logaritmo è definitivamente minore di 1, si ottiene

$$a_{n+1} - a_n < 0.$$

Chiamando $\lambda \geq 0$ il limite e osservando che

$$a_{n^2} = \frac{2}{n} a_n,$$

passando al limite si ottiene che $\lambda = 0 \cdot \lambda$, cioè $\lambda = 0$. Si osservi che in maniera analoga si dimostra che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^q} = 0$$

per ogni $p, q \in \mathbb{R}$, $q > 0$.
In maniera analoga si mostra che $a^n/n \to +\infty$ se $a > 1$. Denotata $a_n = a^n/n$ è facile mostrare la crescenza ed è sufficiente considerare questa volta $a_{2n} = a_n a^n/2$ per trovare il limite.

7. Verifichiamo il punto i); possiamo scrivere

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^2},$$

quindi sembra abbastanza intuitivo supporre che $a_n \to 1$. Facciamo la verifica usando la definizione di limite; dobbiamo trovare, per ogni fissato $\varepsilon > 0$ un numero $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$ si abbia

$$|a_n - 1| < \varepsilon.$$

Siccome la condizione diventa

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon,$$

è chiaro che basta prendere $n \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$, o come n_0 ad esempio il numero $[1/\sqrt{\varepsilon}] + 1$ (qui $[a]$ è la parte intera inferiore del numero reale a).

Per quanto riguarda il punto ii), notiamo che

$$0 \leq a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

da cui si ricava che il limite è 0.

Per iii), se $\alpha < 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n}{\lim\limits_{n\to\infty} n!} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Se poi è $\alpha = 1$, allora il limite è ancora facilmente uguale a 0. Resta da vedere il caso $\alpha > 1$; indichiamo con $m = [\alpha] \geq 1$ la parte intera del numero α e notiamo che per ogni $n \geq m+1$,

$$\frac{\alpha}{n} < 1, \tag{14.2}$$

mentre per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a}{n} \leq a. \tag{14.3}$$

Quindi riscriviamo, per $n > m+1$ (m è un numero intero determinato una volta scelto α mentre n può essere preso grande arbitrario in quanto si sta facendo il limite per $n \to \infty$) il termine generale della successione come

$$0 \leq \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m+11} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n} \leq \frac{a^{m+1}}{n}$$

in quanto per i termini da 1 a m abbiamo usato la stima (14.3), mentre per i termini dall'$m+1$ all'$n-1$ la stima (14.2) e l'ultimo termine lo abbiamo lasciato inalterato. Quindi segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0.$$

Per iv); abbiamo

$$a_n = n - \sqrt{n^2+n} = -\frac{n}{n+\sqrt{n^2+n}} = -\frac{1}{1+\sqrt{1+1/n}} \to -\frac{1}{2}.$$

Per risolvere v), notiamo che

$$\frac{3n^2-2n+1}{n-n^2} = \frac{3-2/n+1/n^2}{-1+1/n},$$

quindi il limite deve essere -3. Dobbiamo cioè dimostrare che fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\frac{3n^2-2n+1}{n-n^2} + 3\right| < \varepsilon. \tag{14.4}$$

Ma
$$\left|\frac{3n^2-2n+1}{n-n^2}+3\right|=\frac{n+1}{n^2-n},$$
quindi la (14.4) si riduce a verificare la disequazione
$$\varepsilon n^2-(\varepsilon+1)n-1>0,$$
e questa è verificata se ad esempio prendiamo $n_0=[x_0]+1$, con
$$x_0=\frac{(\varepsilon+1)+\sqrt{(\varepsilon+1)^2+4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Per vi),
$$a_n=\frac{2/n-5n-2/n^2}{1+1/n^2}\to-\infty.$$

Per vii),
$$a_n=\frac{4+2/n^2}{1/n^3+5}\to\frac{4}{5}.$$

Per il punto viii), bisogna tenere presente che
$$\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2},$$
e quindi
$$a_n=n\left(\arctan n-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\to+\infty.$$

In ix),
$$a_n=\frac{n(1/\sqrt{n}-1)}{1/n+1/n^2}\to-\infty.$$

Per x),
$$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1+1/2^n}{1+1/3^n}\to 0.$$

In xi),
$$a_n=\frac{3-1/\sqrt{n}}{2+(\arctan n)/\sqrt{n}}\to\frac{3}{2}.$$

Per xii),
$$a_n=\sqrt{\frac{1+2/n^2}{1+1/n^2}}\to 1.$$

Per il punto xiii), si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+2} &= \frac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n+1}+\sqrt{n^2+2}}\\ &= \frac{2-1/n}{\sqrt{1+2/n+1/n^2}+\sqrt{1+2/n^2}}\\ &\to 1.\end{aligned}$$

In xiv), abbiamo

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!n/n!}:$$

siccome $(1+1/n!)^{n!} \to e$ e $n/n! \to 0$, il tutto tende ad $e^0 = 1$.

In xv),

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n^n n!/n^n}:$$

siccome $(1+1/n^n)^{n^n} \to e$ e $n!/n^n \to 0$, il tutto tende ad $e^0 = 1$.

Per risolvere xvi), notiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Quindi, nello stesso modo in cui si è affrontato l'esercizio 4., si fa vedere che se $|\alpha| < 1$, la successione diverge, mentre se $|\alpha| > 1$ la successione tende a 0. Infine, se $\alpha = 1$, la successione diverge a $+\infty$, mentre per $\alpha = -1$, la successione è indeterminata.

In xvii), siccome l'esponente tende a $+\infty$, si ottiene immediatamente che $a_n \to -\infty$.

Per affrontare xviii), se n è pari, scriviamo

$$a_n = \frac{n}{n}\cdots\frac{n}{n/2}\frac{1}{n/2-1}\cdots 1 \leq \frac{2}{n-2} \to 0.$$

Inoltre si può fare vedere che la successione è monotona decrescente (cioè si dimostra per induzione che $a_{n+1} \leq a_n$), quindi segue che $a_n \to 0$.

In xix), possiamo scrivere, siccome $1/(k(k+2)) = 1/2(1/k - 1/(k+2))$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\right.\\ &\quad \left.\ldots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{n+1}{2n}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\to\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

8. a) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$a_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n \text{ volte}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} \to +\infty\,.$$

b) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$0 \leq a_n \leq \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}}_{n \text{ volte}} = \frac{n}{(n+1)^2} \to 0\,.$$

Per il teorema dei due carabinieri si conclude.

c) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\,.$$

Per il teorema dei due carabinieri si conclude che il limite è 1.

9. Raccogliendo 7^n all'interno della radice si ottiene che

$$\sqrt[n]{3^n + 7^n} = 7\,\sqrt[n]{1 + (3/7)^n} \to 7\,.$$

10. Notiamo anzitutto che

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + \frac{1}{4} - a_n = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0,$$

quindi la successione è sempre crescente, indipendentemente dal valore iniziale. Ora, se fosse vero che $a_n \to L \in \mathbb{R}$, si dovrebbe avere, per come è definita la successione

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 + \frac{1}{4} = L^2 + \frac{1}{4},$$

da cui $L = 1/2$. Quindi, se $a_0 > 1/2$, abbiamo una successione crescente che non può convergere ad $1/2$, da cui se ne deduce che $a_n \to +\infty$. Invece, se $a_0 \leq 1/2$, notiamo che

$$a_1 = a_0^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Quindi ogni elemento della successione sarà minore o uguale a $1/2$. Otteniamo quindi una successione monotona crescente limitata superiormente, quindi essa deve convergere ad un qualche numero, che come visto in precedenza, non può che essere $1/2$.

11. Notiamo che se fissiamo $a \in (0, \pi)$, dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $|\sin x| < |x|$, deduciamo che
$$\sin a = \sin(\pi - a) < (\pi - a),$$
quindi
$$b = a + \sin a < a + (\pi - a) = \pi.$$
D'altronde, essendo $a > 0$, e quindi anche $\sin a > 0$, la stima $b > 0$ è immediata. Quindi se andiamo alla successione definita per ricorrenza, notiamo anche che
$$a_{n+1} - a_n = \sin a_n > 0,$$
cioè la successione data è monotona crescente. Inoltre è limitata superiormente ($a_n < \pi$), e quindi essa necessariamente converge ad un numero reale $L \in [a_0, \pi]$. Ma per come è definita la successione
$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n + \sin a_n) = L + \sin L,$$
cioè $\sin L = 0$. Ma questo può verificarsi solo se $L = \pi$, e quindi la nostra successione converge a π.

12. Studiamo solo la successione al punto ii), in quanto la i) segue ponendo $h = 1$. Possiamo scrivere
$$a_n = ha_{n-1}^2 = h^2 a_{n-2}^4 = \ldots = h^n k^{2n} = (hk^2)^n.$$
Quindi la successione converge a 0 se $|hk^2| < 1$, diverge per $hk^2 > 1$, è costantemente pari a 1 se $hk^2 = 1$, mentre è indeterminata se $hk^2 \leq -1$.

13. Dimostriamo anzitutto la monotonia:
$$a_{n+1} - a_n = 1 - 2a_n + a_n^2 = (1 - a_n)^2 \geq 0.$$
Quindi la successione è una successione monotona crescente. Se ammette limite, si deve avere
$$L = 1 - L + L^2,$$
cioè $L = 1$. Quindi, se $a_0 > 1$ la successione deve necessariamente divergere a $+\infty$. Mentre, notando che se $a_n < 1$, allora
$$a_{n+1} = 1 + a_n(a_n - 1) < 1,$$
quindi se $a_0 < 1$, la successione è monotona crescente superiormente limitata, quindi convergente (necessariamente a 1). Infine, se $a_0 = 1$, allora ogni termine della successione è pari ad 1.

14. Cerchiamo anzitutto se esistono numeri reali L per i quali si abbia
$$L = L^2 - 2.$$

Soluzioni di questa equazione sono

$$L = 2, \quad L = -1.$$

Quindi se per un certo elemento della successione capita che $a_n = 2$ o $a_n = -1$, allora la successione deve necessariamente rimanere costantemente uguale a tale valore. Vediamo cosa succede se

$$a_0 = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$

Abbiamo

$$a_1 = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad a_2 = -\sqrt{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -2, \quad a_5 = 2.$$

Quindi per $n \geq 5$, la successione rimane costantemente uguale a 2. Se invece $a_0 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, allora

$$a_1 = -\sqrt{3}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1.$$

Quindi per $n \geq 3$, la successione è costantemente uguale a -1. Infine, se

$$a_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

allora

$$a_1 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Quindi la successione risulta periodica di periodo due, cioè si alterna tra due valori.

15. Se $\lambda < 1$, allora, preso $\varepsilon > 0$ tale che $\lambda + \varepsilon < 1$, per la definizione di limite, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ per il quale

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \lambda + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Quindi

$$|a_{n+1}| < (\lambda + \varepsilon)^n |a_0| \to 0.$$

Se $\lambda > 1$, si prende $\varepsilon > 0$ tale che $\lambda - \varepsilon > 1$ e un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \lambda - \varepsilon.$$

Quindi

$$|a_{n+1}| > (\lambda - \varepsilon)^n |a_0| \to +\infty.$$

16. Si ha
$$b - \sqrt{B} = \frac{1}{2a}(a - \sqrt{B})^2 \geq 0.$$
Quindi la successione x_n sarà una successione inferiormente limitata, cioè sempre maggiore di $\sqrt{B}$. Inoltre
$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2x_n}(B - x_n^2) \leq 0.$$
Quindi la successione deve essere convergente ad un numero L, che però deve soddisfare
$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{B}{L}\right),$$
cioè $L = \sqrt{B}$.

Capitolo 15

Serie Numeriche

1. Si noti che si ha la seguente stima
$$0 \leq \frac{1-\cos k}{k^2} \leq \frac{2}{k^2};$$
possiamo quindi applicare il criterio del confronto per concludere che la serie data è convergente.

2. Applicando il criterio del rapporto con $a_k = a^k/k!$, si ottiene che
$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|a|}{k+1}$$
e quindi, siccome per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a|}{k+1} = 0,$$
la serie data converge assolutamente per ogni fissato $a \in \mathbb{R}$, e quindi converge anche semplicemente. Si potrebbe dimostrare (non facilmente) che la serie data ha somma
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n.$$

3. Applicando il citerio del rapporto con $a_k = \frac{k! a^k}{k^k}$, si ottiene
$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|a|}{(1+1/k)^k}.$$
Siccome si ha che
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a|}{(1+1/k)^k} = \frac{|a|}{e}$$

si avrà convergenza assoluta per $|a| < e$, mentre non si avrà convergenza per $|a| \geq e$ (il caso $|a| = e$ lo si deduce in quanto la successione

$$\frac{e}{(1+1/k)^k}$$

converge in modo monotono decrescente ad 1).

4. Utilizzando il criterio della radice, si ha che, ponendo $a_k = e^{-\frac{k^2 a}{k+a^2}}$,

$$\sqrt[k]{|a_k|} = e^{-\frac{ka}{k+a^2}}.$$

Quindi, siccome

$$\lim_{k\to+\infty} e^{-\frac{ka}{k+a^2}} = e^{-a},$$

se ne deduce che la serie converge per $a > 0$, mentre diverge per $a \leq 0$ (nel caso $a = 0$ il termine generale è sempre pari a 1).

5. Usando il limite notevole

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1-\cos a_k}{a_k} = \frac{1}{2},$$

con (a_k) successione infinitesima, se ne deduce che la successione $1 - \cos 1/k$ è a termini positivi e asintoticamente equivalente alla successione $(1/(2k^2))$, e quindi, dato che quest'ultima ha una serie convergente, la serie data è convergente.

6. Si noti che

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \arctan k\right) = \tan \arctan k = k,$$

se ne deduce che

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan k)\right) = \frac{1}{k}.$$

Utilizzando quindi il limite notevole

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tan a_k}{a_k} = 1 \tag{15.1}$$

se (a_k) è una successione infinitesima, se ne deduce che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan k\right)^p$$

è asintoticamente equivalente alla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

e quindi converge se $p > 1$ e non converge per $p \leq 1$.

7. Proponiamo due soluzioni.

La prima è la seguente. Prima ricordiamo i seguenti fatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \qquad \text{se } a_n \text{ infinitesima}$$

e

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Usando il primo dei fatti appena ricordati e il criterio del confronto ci possiamo limitare a studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$$

che per il secondo fatto diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\arcsin\frac{n}{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin\frac{n}{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$$

che diverge.
La seconda è meno elegante, ma può essere istruttiva.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,.$$

Ora, se si riuscisse a trovare una funzione g tale che

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \tag{15.2}$$

grazie alla regola di de l'Hôpital si concluderebbe che $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Scegliendo $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$ si ha chiaramente che le condizioni (15.2) sono soddisfatte. Integrando si ottiene $g(x) = 2\sqrt{1-x}$. Conclusione:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e quindi, per il criterio del confronto, la serie seguente ha lo stesso carattere di quella di partenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\sqrt{1 - \frac{n}{n+1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Si conlude che la serie diverge (confrontare con quanto ottenuto precedentemente).

8. Siccome la successione
$$\frac{k+\sqrt{k}}{k^3-k+2}$$
è asintoticamente equivalente alla successione $1/k^2$, utilizzando il limite notevole (15.1) dell'esercizio precedente, se ne deduce che la serie data è asintoticamente equivalente alla serie $\sum 1/k^2$ e quindi convergente.

9. La serie data è una serie a termini alterni; si nota subito che la serie non è assultamente convergente, e quindi dobbiamo studiare la convergenza semplice. Utilizziamo quindi il criterio di Leibniz; la successione $1/k$ è chiaramente infinitesima, positiva e monotona decrescente in quanto per $k < k+1$ si ha $1/k > 1/(k+1)$. Quindi per il criterio di Leibniz si ha la convergenza semplice.

10. Il termine generale è infinitesimo solo per $p > 0$ e quindi per $p \leq 0$ non si può avere convergenza. Inoltre per $p > 0$, la successione $(1/k^p)$ è monotona decrescente. Quindi grazie al criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente per $p > 0$. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, si ricade nel caso della serie armonica generalizzata, che covnerge per $p > 1$.

11. La serie non converge assolutamente in quanto per $k \geq 3$
$$\frac{\ln k}{k} \geq \frac{1}{k}$$
e per il criterio del confronto si ha $\sum \ln k/k = +\infty$. Per quanto riguarda la convergenza semplice, trattandosi di una serie a segni alterni, proviamo ad applicare Leibniz. La successione $a_k = \ln k/k$ è monotona se verifichiamo che
$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \frac{\ln k}{k}.$$
Ma questa condizione equivale a richiedere che
$$\ln \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \leq 0$$
oppure
$$b_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \leq 1.$$
Ma
$$b_k = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \frac{e}{k}$$
e quindi per $k \geq 3$ $b_k \leq 1$ da cui la monotonia di a_k. Per vedere che (a_k) è infinitesima, si noti che
$$a_{k^2} = \frac{2}{k}a_k \leq \frac{2}{k}a_3.$$

Quindi dalla monotonia segue che $\lim a_k = 0$. Possiamo allora applicare il criteri di Leibniz e concludere che

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{\ln k}{k} \in \mathbb{R}.$$

12. La serie data è a termini negativi in quanto $1-1/k^2 < 1$; quindi può essere trattata come una serie a termini positivi solo con il segno meno davanti. Per trattare quasta serie abbiamo bisogno del sequente limite notevole; se (a_n) è una successione infinitesima, allora

$$\lim \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

cioè $\ln(1+a_n)$ è asintoticamente equivalente ad a_n. Tale limite segue in quanto

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \ln(1+a_n)^{1/a_n}.$$

Per trattare questa espressione, supponiamo $a_n > 0$ e scriviamo $a_n = 1/b_n$ con $b_n \to \infty$. Avremo che $[b_n] \leq b_n < [b_n]+1$ con il vantaggio che $[b_n] \in \mathbb{N}$; quindi

$$\left(1+\frac{1}{[b_n]+1}\right)^{([b_n]+1)\cdot\frac{b_n}{[b_n]+1}} \leq \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \leq \left(1+\frac{1}{[b_n]}\right)^{([b_n])\cdot\frac{b_n}{[b_n]}}.$$

Tenendo presente che per $b_n \to \infty$ si ha che

$$\lim \frac{b_n}{[b_n]} = \lim \frac{b_n}{[b_n]+1} = 1,$$

si ottiene che

$$\lim \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e,$$

da cui l'asserto. Il caso $a_n < 0$ si tratta in modo analogo tenendo presente che

$$\lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Abbiamo quindi che la successione $|\ln(1-1/k^2)|$ è asintoticamente equivalente alla successione $1/k^2$ e quindi è assolutamente e semplicemente convergente (qui la convergenza assoluta è la stessa di quella semplice a meno del segno).

13. Posto

$$a_k = \frac{2^k + k}{3^k - \sqrt{k}} \geq 0,$$

è facile notare che $a_k \sim (2/3)^k$ e quindi la serie è asintoticamente equivalente ad una serie geometrica di ragione minore di 1, e quindi la serie converge.

14. Si ha che
$$a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{k\sqrt{k}(\sqrt{1+1/k}+1)} \geq 0$$
e quindi $a_k \sim 1/k^{3/2}$ con $3/2 > 1$, e quindi a_k è asintoticamente equivalente ad una serie convergente.

15. Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione logaritmo
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$
si ottiene che la successione
$$a_k = \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \geq 0$$
è asintoticamente equivalente alla successione $1/(2k^2)$, e quindi la serie data è convergente.

16. Notando che $k! < k^k$, la serie diverge (confrontare l'esercizio 20.).

17. Applicando il criterio del rapporto si ottiene che
$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{(1+1/k)^k} \to \frac{1}{e}$$
da cui la convergenza della serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

18. Dal criterio del rapporto si ha che
$$\lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{2} < 1$$
e quindi la serie data converge.

19. Scrivendo
$$\left(\frac{k^2+k-1}{k^2+3k+5}\right)^{k^2} = \left(1-\frac{2k+6}{k^2+3k+5}\right)^{\frac{k^2+3k+5}{2k+6}\cdot k^2 \cdot \frac{2k+6}{k^2+3k+5}}$$
e tenendo presente che
$$\lim\left(1-\frac{2k+6}{k^2+3k+5}\right)^{\frac{k^2+3k+5}{2k+6}} = \frac{1}{e}$$

e

$$\frac{2k+6}{k^2+3k+5} \sim \frac{2}{k},$$

ne segue che

$$a_k \sim \frac{1}{(e^2)^k},$$

cioè la serie data è asintoticamente equivalente alla serie geometrica di ragione $1/e^2 < 1$, e quindi si ha convergenza.

20. Applicando il criterio di condensazione, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2},$$

e quindi la serie data non converge.

21. Applichiamo il criterio del rapporto per ottenere che

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2}{3}\frac{(k+1)^2}{k^2} \to \frac{2}{3} < 1,$$

e quindi la serie converge.

22. La serie non converge assolutamente in quanto

$$\ln\left(1+\frac{1}{\ln k}\right) \sim \frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{k}.$$

Per la convergenza semplice applichiamo Leibniz; siccome $\ln k \to +\infty$ per $k \to +\infty$, si ha che

$$a_k = \ln\left(1+\frac{1}{\ln k}\right)$$

è infinitesima. Sfruttando la monotonia della funzione logaritmo, si ricava inoltre che la successione è pure monotona, da cui la convergenza della serie data.

23. La serie non converge assolutamente in quanto il termine generale è asintotico a $1/2k$. La successione

$$a_k = \frac{1}{2k + \sin k}$$

è infinitesima e $a_{k+2} \leq a_k$ in quanto $\sin k - \sin(k+1) \leq 2$; quindi applicando il criterio di Leibniz, la serie converge. Si noti che lo studio della convergenza della serie

$$\sum (-1)^k \frac{1}{k+\sin k}$$

risulta alquanto più complicata; serve una stima del tipo

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

stima che si può dimostrare usando le formule di Prostaferesi.

24. Dallo sviluppo di Taylor per la funzione arcotangente
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
si ottiene che la successione
$$1 - k \arctan \frac{1}{k}$$
è asintoticamente equivalente alla successione $1/k^2$ e quindi si ha convergenza assoluta e a maggior ragione semplice.

25. Se applichiamo il criterio del rapporto, si ottiene
$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{k+1}\frac{(k+1)^3}{k^3} \to 0$$
e quindi la serie converge.

26. Vogliamo andare a confrontare (asintoticamente) la nostra serie (che è a termini positivi) con la serie armonica $1/k^p$. Si ha che
$$k^p\left(\frac{1+\ln k}{\sqrt{k^3+1}}\right) = \frac{1+\ln k}{k^{3/2-p}\sqrt{1+1/k^3}}.$$
Si ha quindi che $k^p a_k \to 0$ se $3/2 - p > 0$, cioè se $p < 3/2$. Quindi la serie data è sicuramente definitivamente più piccola della serie con termini $1/k^p$ per $p < 2/3$; se prendiamo poi $p > 1$, otteniamo che la serie data converge.

27. Usando la formula di Taylor, si può scrivere
$$\sqrt[k]{k} - 1 = e^{\ln k/k} - 1 = \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$$
da cui si ottiene che la serie converge.

28. Scrivendo
$$k^{1/k^2} - 1 = \frac{\ln k}{k^2} + o\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$
si ottiene che la serie converge.

29. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, si ha che definitivamente
$$\frac{k \ln k}{k^2+1} > \frac{k}{k^2+1}$$
e quindi niente convergenza assouta. Per la convergenza semplice si applica Leibniz in quanto la successione è infinitesima e momnotona (verificarlo per esercizio).

30. Si noti che
$$0 \leq \frac{1+\cos k}{3} \leq \frac{2}{3}$$
e quindi la serie è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $2/3 < 1$ e quindi converge.

31. Si noti che $\cos \pi k = (-1)^k$ e quindi la serie diventa
$$\sum \frac{(-1)^k}{k+2}$$
che è convergente grazie al criterio di Leibniz, ma non assolutamente convergente.

32. Si noti che $\sin 1/(k+1) \sim 1/(k+1)$ e quindi la serie diventa asintoticamente equivalente alla serie
$$\sum \frac{1}{k(k+1)}$$
che è convergente.

33. Dal criterio della radice si ha che
$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|k-3|}{k^{1+1/k}} \to 0$$
e quindi la serie è convergente.

34. Dal criterio della radice si ha
$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k+1}{2k-1} \to \frac{1}{2} < 1,$$
e quindi la serie converge.

35. Dallo sviluppo di Taylor della funzione seno, si ricava che la successione
$$a_k = (k - \sin k)\left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k}\right)$$
è asintoticamente equivalente alla successione $1/k^2$ e quindi converge.

36. Notare che
$$ka_k = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1$$
e quindi la serie data è asintotica alla serie con termini $1/k$, quindi la serie non converge.

37. Dal criterio del rapporto si ottiene che
$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{e}\frac{(k+1)^3}{k^3} \to \frac{1}{e} < 1,$$
quindi la serie converge.

38. Scrivendo $a_k = e^{a/2}e^{ka^2}$, dal criterio della radice si ottiene

$$\sqrt[k]{|a_k|} = e^{a/(2k)}e^{a^2} \to e^{a^2}.$$

Siccome per $a \neq 0$ $e^{a^2} > 1$, la serie non converge; infine per $a = 0$, si ha che $a_k = 1$ e quindi ancora non si ha convergenza.

39. La serie converge semplicemente grazie a Leibniz, in quanto $1/\ln\ln k$ è monotono decrescente e infinitesimo. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, dal criterio di condensazione, si ha convergenza se e solo se converge la serie

$$\sum \frac{2^k}{\ln(k\ln 2)},$$

ma il termine generale di tale serie non è infinitesimo, e quindi non si può avere covnergenza assoluta.

40. Se si lascia cadere la pallina, dalla fisica si sa che il tempo che impiega per raggiungere il suolo partendo da un'altezza h_0 è pari a

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Dopo il primo rimbalzo il tempo che impiega per giungere al rimbalzo successivo è dato da

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2t_0\sqrt{q},$$

dove $q \in (0,1)$ rappresenta la percentuale dell'altezza raggiunta, e il numero 2 deriva dal fatto che la pallina deve prima salire fino all'altezza h_1 e poi ridiscendere. In generale per l'ennesimo rimbalzo si ha

$$t_n = \sqrt{q}t_{n-1} = \sqrt{q}^{n-1}t_1$$

e quindi il tempo che impiegherà per smettere di rimbalzare sarà

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} t_k = t_0 + 2t_0\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{q}^k = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}.$$

Se mettiamo in tale formula i valori di $q = 0.75$ e $h_0 = 1$, si ottiene che

$$T = 6.29s$$

circa.

Capitolo 16

Limiti e Funzioni Continue

1. Per svolgere questo esercizio, calcoliamo la funzione nel punto $x_0 = -1$, e verifichiamo che
$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1).$$
Ma $f(-1) = 0$, e quindi bisogna trovare, fissato $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tale che se $x + 1 < \delta$, allora $|f(x)| < \varepsilon$. Ma
$$\sqrt[3]{x+1} < \varepsilon$$
se e solo se $x + 1 < \varepsilon^3$, quindi basta prendere $\delta = \varepsilon$.

2. Siccome $f(1) = 0$, cerchiamo, fissato $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ per il quale $|x-1| < \delta$ si abbia $|f(x)| < \varepsilon$. Ma
$$||x^3| - 1| < \varepsilon$$
se e solo se
$$1 - \varepsilon < |x^3| < 1 + \varepsilon$$
Stiamo verificando la continuità nel punto 1, quindi per δ opportuno, si dovrà avere che x è positivo. Così ad esempio, per $\delta = 1/2$, si ha che $1/2 < x < 3/2$; in tal modo si ha che $|x|^3 = x^3$, e quindi la condizione da verificare diventa
$$-\varepsilon < x^3 - 1 < \varepsilon.$$
A questo punto, scrivendo $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, se $\delta = 1/2$, otteniamo che $1/2 < x < 3/2$, da cui
$$1 < \frac{7}{4} < x^2 + x + 1 < \frac{19}{4} < 5.$$
Quindi
$$x - 1 < x^3 - 1 < 5(x-1),$$
da cui se prendiamo $\delta = \min(1/2, \varepsilon/5)$, otteniamo quanto cercato.

3. Per verificare la continuità di f basta andare a verificare che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$
Ma questo segue grazie al limite notevole
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$
limite che vedremo successivamente; infatti
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \frac{1}{2}.$$

4. Per verificare la continuità della funzione data basta andare a verificare la continuità nei punti $-\pi/2$ e $\pi/2$. Cioè , si deve avere
$$\lim_{x\to -\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to -\pi/2^+} f(x),$$
da cui segue che $2 = -a + b$. Inoltre si deve avere
$$\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^+} f(x),$$
da cui $a + b = 0$. Quindi si ottiene $a = -1$ e $b = 1$.

5. Si deve andare a testare la continuità nei punti 0 e in 1. La condizione di continuità in 0 diventa $1 + b = a$, mentre la condizione di continuità in 1 diventa $\sqrt{2}+b = 1+b+a$. Otteniamo quindi che $a = \sqrt{2}-1$ e $b = \sqrt{2}-2$.

6. La funzione data è prodotto di tre funzioni, x (continua ovunque), $(1-x)$ (continua ovunque) e $[x]$ (continua in tutti gli intervalli del tipo $(n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$). Quindi potrebbero esserci due discontinuità della funzione data, più precisamente in 0 e 1. Ma
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$
e analogamente
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0.$$
Quindi la funzione f è continua in $(-1, 2)$.

7. Il punto i) segue, analogamente a quanto dimostrato per i limiti notevoli sulle successioni, dalle disuguaglianze
$$|\sin x| \le |x| \le |\tan x|.$$
Per quanto riguarda il punto ii), segue da i) una volta posto $1 - \cos x = 2\sin^2 x/2$. Il punto iii) segue da ii) in quanto
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} x\frac{1-\cos x}{x^2} = 0 \cdot \frac{1}{2}.$$

Il punto iv) non lo dimostriamo (in realtà può essere preso come definizione del numero e, o almeno segue è equivalente alla definizione del numero e). Il punto v) segue da iv); ad esempio, facendo la sostituzione $y = 1/x$, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0^+}(1+y)^{1/y} = e.$$

Per il punto vi), una volta scritto

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \log(1+x)^{1/x},$$

il limite segue da iv) notando che la funzione log è una funzione continua. Dimostriamo vii) prima nel caso particolare in cui $b = e$: utilizzando la stima (4.1) si ottiene

$$1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{1}{1-x}$$

e passando al limite per $x \to 0$ e utilizzando il teorema dei due carabinieri si conlude.
Nel caso più generale vediamo una dimostrazione differente: poniamo $y = b^x - 1$, da cui

$$x = \log_b(1+y) = \frac{\log(1+y)}{\log b}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x} = \log b \lim y \to 0 \frac{y}{\log(1+y)} = \log b.$$

Per viii), si pone $y = \log(1+x)^\alpha$, da cui

$$x = e^{y/\alpha} - 1,$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{e^{y/\alpha} - 1} = \alpha.$$

Il limite ix) segue dall'analogo limite dimostrato per le successioni

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{A^n} = 0,$$

e notando che la funzione $x \to x^\alpha A^{-x}$ è monotona decrescente, almeno per $x > 1/(A^{1/\alpha} - 1)$. Il punto x) segue poi da ix) facendo la sostituzione $y = \log x$.

8. Abbiamo, se $\alpha \neq 0$ (in caso contrario il limite è ovvio),

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha \lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha.$$

9. Abbiamo
$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 3x} = \frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{x}{\sin 3x}\right)^2,$$
da cui
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 3x} = \frac{1}{18}.$$

10. Per il limite i), si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x\frac{\sin x^2}{x^2} = 0.$$
Il limite ii) ha il numeratore che tende a 1, così come il denominatore, quindi il limite è pari a 1. Analogamente per il limite iii). Per il limite iv), abbiamo
$$\frac{x\sin x}{2\sin 2x^2} = \frac{1}{4}\frac{\sin x}{x}\frac{2x^2}{\sin 2x^2},$$
quindi
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\sin 2x^2} = \frac{1}{4}.$$
Per il limite v), scritto
$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x},$$
il limite segue. Nel limite vi), ponendo $y = \arcsin x$, otteniamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1.$$
In vii), si pone $y = \arctan x$, e si ottiene
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y} = 1.$$
Per viii), scrivendo
$$\frac{(1-\cos 3x)^2}{x^2(1-\cos x)} = \frac{x^2}{1-\cos x}\left(\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\right)^2\cdot 81,$$
otteniamo che
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)^2}{x^2(1-\cos x)} = \frac{81}{2}.$$
In ix), facendo la sostituzione $y = \sqrt{|x|}$, otteniamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} = \lim_{y\to 0^+}\frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

In x), facendo la sostituzione $y = 1/x$, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x + 1)\sin 2/x^2 = \lim_{y\to 0^+} 2(y^2 + y + 1)\frac{\sin 2y^2}{2y^2} = 2.$$

In xi), studiamo la funzione

$$\sin x \left(\log(1 - \sin^2 x/2) - \log\sin x\right).$$

Usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} x\log = 0$$

otteniamo quindi che

$$\lim_{x\to 0}\sin x \left(\log(1 - \sin^2 x/2) - \log\sin x\right) = 0,$$

da cui il limite originario uguale a 1. In xii), si ha che

$$\sqrt[3]{x^3 + 2x^2}\left(\frac{(x^2 + 2x)^{1/2}}{(x^3 + 2x^2)^{1/3}} - 1\right) = x(1{+}2/x)^{1/3}\left((1 + 2/x)^{1/2-1/3} - 1\right) = 2(1{+}2/x)^{1/3}\frac{(1 + 2/x)^{1/6} - 1}{2/x} \to 2$$

11. Abbiamo

$$\frac{1 + \sin^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2},$$

quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 = \sin^2 x}{x^2} = +\infty.$$

12. Per i), scrivendo

$$\frac{5^x - 1}{3^x - 1} = \frac{5^x - 1}{x}\frac{x}{3^x - 1},$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x - 1}{3^x - 1} = \frac{\log 5}{\log 3} = \log_3 5.$$

Per ii), scritto

$$\frac{1 - e^x}{\sin x} = \frac{1 - e^x}{x}\frac{x}{\sin x},$$

otteniamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - e^x}{\sin x} = -1.$$

Per iii), calcoliamo separatamente limite destro e limite sinistro. Sostituendo $y = 1/x$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x} + 3}{e^{1/x} + 1} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1 + 3e^{-y}}{1 + e^{-y}} = 3,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x} + 3}{e^{1/x} + 1} = \lim_{y\to-\infty}\frac{1e^y + 3e}{e^y + 1} = 1.$$

Quindi il limite non esiste. Per iv),

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{1/(1-x)}} = \frac{1}{1+e}.$$

In v),

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{1-e^{2x}} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1-e^{2x}} = -\frac{3}{2}.$$

In vi), scrivendo

$$x^{1/x} = e^{\log x/x},$$

si ha che

$$\lim_{x\to 0} x^{1/x} = 0.$$

Mentre in vii), si usa il limite notevole x), per ottenere

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = 1.$$

In viii), scriviamo

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)^{-(x+2)(-x/(x+2))},$$

ottenendo quindi che

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = e^{-1}.$$

In ix), scrivendo

$$\frac{e^{\arcsin x} - e^{\arctan x}}{\arcsin x - \arctan x} = e^{\arctan x} \frac{e^{\arcsin x - \arctan x} - 1}{\arcsin x - \arctan x},$$

segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{arcsinx} - e^{\arctan x}}{\arcsin x - \arctan x} = 1.$$

In x), ponendo $y = x/2$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$$

In xi), abbiamo

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{(1/\sin x)(\sin x/x)} = e.$$

In xii), facendo la sostituzione $y = 1/x^3$, otteniamo

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^{x/(x+1)} = y^{1/(1+y^{1/3})}.$$

Quindi tenendo presente che

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{1+y^{1/3}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log y}{y^{1/3}} \frac{y^{1/3}}{1+y^{1/3}} = 0,$$

otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{x/(x+1)} = 1.$$

13. In i), scritto

$$\frac{\log(1+10x)}{x} = 10\frac{\log(1+10x)}{10x},$$

si ottiene che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+10x)}{x} = 10.$$

In ii), scrivendo $\cos x = 1 - 2\sin^2 x/2$, otteniamo

$$\frac{\log\cos x}{x^2} = \frac{\log(1-2\sin^2 x/2)}{-2\sin^2 x/2} \frac{-2\sin^2 x/2}{x^2},$$

da cui si ottiene che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

In iii), il numeratore tende a 0 mentre il denominatore tende a 2, quindi il limite è 0. In iv) scriviamo

$$\frac{\log(1+\sin x)}{x} = \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x},$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin x)}{x} = 1.$$

In v), scriviamo

$$\frac{\log\cos x}{1-\cos x} = \frac{\log(1-\sin^2 x/2)}{-2\sin^2 x/2} \frac{-2\sin^2 x/2}{(x/2)^2} \frac{x^2/4}{1-\cos x},$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{1-\cos x} = -\frac{1}{8}.$$

Ponendo $y = 1/x$, possiamo scrivere

$$x\sin\left(\log\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\sin\left(\log\frac{1+y}{1+2y}\right)}{\log\frac{1+y}{1+2y}} \frac{\log\left(1-\frac{y}{1+2y}\right)}{-y/(1+2y)} \left(-\frac{1}{1+2y}\right)$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\log\frac{x+1}{x+2}\right) = -1.$$

Per vii), si ha
$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\log \frac{x+1}{x+2}\right) = 0.$$

14. Eseguendo la divisione tra polinomi, abbiamo
$$\frac{1-n^2}{2+n} = 2 - n - \frac{3}{2+n}.$$
Quindi
$$e^{\frac{1-n^2}{2+n}} = e^2 e^{-n} e^{-3/(2+n)}$$
e quindi
$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1-n^2}{2+n}} = 0.$$
Per il secondo limite, si noti che
$$\tan(1/n - \pi/2) = -\frac{\cos(1/n)}{\sin(1/n)} = -\frac{\cos(1/n)}{1/n}\frac{1/n}{\sin(1/n)}.$$
Quindi il limite sarà 0.

15. Le radici sono date da
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{a} = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{4c}{a}}$$
e quindi le due radici tendono a 0 per $a \to +\infty$.

16. La funzione $g(x) = f(x) - x$ è tale che $g(0) = f(0) \geq 0$, mentre $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Quindi per il teorema dell'esistenza degli zeri per le funzioni continue, esisterà sempre un punto $x_0 \in [0,1]$ per il quale $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = x_0$.

17. Dato $n \in \mathbb{Z}$, si ha chiaramente che
$$f(n) = nf(1).$$
Se poi $x \in \mathbb{Q}$, scrivendo $x = n/m$, siccome
$$f(mx) = mf(x) = mf(n/m),$$
otteniamo che
$$f(n/m) = \frac{f(mx)}{m} = \frac{f(n)}{m} = \frac{n}{m}f(1).$$
Quindi abbiamo dimostrato che per $x \in \mathbb{Q}$,
$$f(x) = xf(1).$$
A questo punto sfruttiamo la continuità della funzione f e otteniamo, approssimando ogni $x \in \mathbb{R}$ con una successione di numeri razionali $q_n \in \mathbb{Q}$,
$$f(x) = f(\lim q_n) = \lim f(q_n) = \lim q_n f(1) = xf(1).$$

18. Analogamente al punto precedente, se $n \in \mathbb{Z}$, otteniamo che

$$f(n) = a^n,$$

quindi per ogni $x = n/m \in \mathbb{Q}$, si ha

$$f(x) = a^{n/m}.$$

Quindi per la continuità della funzione f, otteniamo che

$$f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Capitolo 17

Derivate e Problemi di Massimo e Minimo

1. Anzitutto, abbiamo che $f(1) = 1/2$ e dalla definizione

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2+h}{2(2+2h+h^2)} = -\frac{1}{2}.$$

2. Abbiamo $f(1) = 2$, e quindi

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)\sqrt{h+4} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 6h + 9}{(h+1)\sqrt{h+4} + 2} = \frac{9}{4}.$$

3. La funzione $\sin x$ è 2π–periodica e, dalla relazione $\sin(-x) = -\sin x$, segue che la funzione $f(x)$ è π–periodica. Quindi basta dimostrare che la funzione f non è derivabile in 0. Ma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1.$$

Quindi f non può essere derivabile.

4.

i) $$f'(x) = \frac{\sin x + 2x\cos x}{2\sqrt{x}};$$

ii) $$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2};$$

iii) $$f'(x) = \frac{e^x \cos e^x}{\log(x - \tan x^2)} - \frac{(\sin e^x)(1 - 2x - 2x\tan^2 x^2)}{(x - \tan x^2)\log^2(x - \tan x^2)};$$

iv) $$f'(x) = \frac{4}{x}\log x^2;$$

v) $$f'(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2 + x^4};$$

vi) $$f'(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}(2\cos^2 x + \cos x - 1);$$

vii) $$f'(x) = \frac{1}{2};$$

viii) $$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\log\left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\right);$$

ix) $$f'(x) = (\sin x)^{\tan x}\left(\frac{\log \sin x}{\cos^2 x} + 1\right);$$

x) $$f'(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)\sqrt{x^4 + 2x^2}};$$

xi) $$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1};$$

xii) $$f'(x) = \sqrt{\frac{(x+1)^3}{x - 1}};$$

xiii) $$f'(x) = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin 2x + \cos 3x}{2\sqrt{x}} + 2\cos 2x - 3\sin 3x\right);$$

xiv) $$f'(x) = x(x^x)^x(2\log x + 1);$$

xv) $$f'(x) = \frac{(\log x)^{1/logx - 1}}{x}\left(1 - \frac{\log\log x}{\log x}\right);$$

xvi) $f'(x) = 2|x|;$

xvii) $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x};$

xviii) $f'(x) = -\dfrac{2}{x(\log x - 1)^2}$

xix) $f'(x) = \cos 2x + 1;$

xx) $f'(x) = \dfrac{2}{1+\sin 2x};$

xxi) $f'(x) = \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x};$

xxii) $f'(x) = \dfrac{1-\sin^2 x(1+\log\sin x)}{\sin x - \sin^3 x};$

xxiii) $f'(x) = (\arctan x)^{x^2+1}(2x \log\arctan x + 1).$

5. Spezziamo lo studio della funzione data nello studio delle due funzioni

$$f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 2, \quad x \in [-3, 0],$$
$$f_2(x) = x^3 + x^2 - x + 2, \quad x \in [0, 4].$$

Per trovare i massimi e minimi della funzione f_1 nell'intervallo dato, calcoliamo dapprima i valori della funzione negli estremi dell'intervallo;

$$f_1(-3) = -13, \quad f_1(0) = 2.$$

Vediamo ora se la funzione ha massimi o minimi all'interno. Calcoliamo quindi la derivata e la poniamo uguale a 0.

$$f_1'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Si nota subito che la derivata non si annulla mai, quindi la funzione f_1 è sempre strettamente crescente, quindi il suo massimo sarà raggiunto in 0 con valore 2, mentre il suo minimo sarà raggiunto in -3 con valore -13.

Passiamo ora allo studio di f_2. I suoi valori agli estremi sono

$$f_2(0) = 2, \quad f_2(4) = 78.$$

Cerchiamo massimi e minimi interni:

$$f_2'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Questa equazione ha due soluzioni, una positiva, $1/3$, e una negativa, -1, che scartiamo in quanto fuori dell'intervallo considerato. Quindi il punto $1/3$ sarà un punto di minimo locale con

$$f_2(1/3) = \frac{49}{27} < 2.$$

In definitiva, la funzione f avrà quindi un massimo in 4 e minimo in -3.

6. La funzione data è definita, per via della presenza della radice, nell'intervallo $[-1, 1]$. Quindi i massimi e i minimi andranno cercati nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$. Dividiamo il problema in due problemi, causa la presenza del valore assoluto. Abbiamo le due funzioni

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} - x - \frac{1}{2}, \quad \text{su } [-1, -1/2],$$

$$f_2(x) = \sqrt{1-x^2} + x + \frac{1}{2}, \quad \text{su } [-1/2, 1].$$

Vediamo anzitutto f_1; abbiamo $f_1(-1) = 1/2$, mentre $f_1(-1/2) = \sqrt{3}/4$. La derivata di f_1 è

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

che si annulla $-\sqrt{2}/2$ (l'unico zero della derivata incluso nell'intervallo $[-1, -1/2]$; in corrispondenza di tale punto il valore della funzione f_1 è $-1/2$. Quindi,

$$\min_{x\in[-1,-1/2]} f_1(x) = -\frac{1}{2}, \quad \text{assunto per } x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\max_{x\in[-1,-1/2]} f_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \text{assunto per } x = -\frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda f_2 invece, abbiamo che $f_2(-1/2) = \sqrt{3}/4$, mentre $f_2(1) = 3/2$. Per quanto riguarda la derivata, si ha che

$$f_2'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1$$

che si annulla in $\sqrt{2}/2$, con $f_2(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2} + 1/2$. Quindi

$$\min_{x\in[-1/2,1]} f_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{assunto per } x = -\frac{1}{2},$$

$$\max_{x\in[-1/2,1]} f_2(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \quad \text{assunto per } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Quindi il massimo per f sarà assunto in $\sqrt{2}/2$ con valore pari a $\sqrt{2}+1/2$, mentre il minimo sarà assunto in $-\sqrt{2}/2$ con valore $-1/2$.

7. Siccome

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

sarà chiaro che la funzione non ammette massimo o minimo assoluti. L'unica cosa che si potrà ricercare, sono i massimi e i minimi locali. Per quanto riguarda la derivata di f, abbiamo

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Tale derivata si annulla in 1 e -1. Siccome la derivata per x compreso tra questi due valori è negativa mentre la derivata è positiva per $|x| > 1$, allora 1 e -1 sono rispettivamente punti di massimo e minimo locale per la f, con $f(-1) = 2$ e $f(1) = -2$.

8. Considerando la funzione

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right),$$

abbiamo che

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{1+x^2} = 0.$$

Quindi la funzione è costante e in particolare

$$f(x) = f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

9. Detta

$$f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x),$$

otteniamo che

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

quindi la funzione è costante e in particolare

$$f(x) = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

10. Facendo la derivata della funzione

$$f(x) = 2\arctan(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

otteniamo

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2}\frac{1-x^2}{|1-x^2|}.$$

Quindi, per $x^2 > 1$, si ha che la derivata si annulla, e quindi la funzione è costante. Siccome

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan(-\infty) + \arcsin(0) = -\frac{\pi}{2},$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan(+\infty) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2},$$

segue la conclusione dell'esercizio.

11. Dimostreremo la prima identità , le altre due si dimostrano in modo analogo. Ci sono due modi per dimostrare tale identità . Il primo modo consiste semplicemente nel calcolare

$$\sinh(\log(x + \sqrt{(x^2 + 1)})).$$

Se questa quantità è pari a x, allora dalla definizione di $\arcsin h$ otteniamo l'identità . Ma

$$\begin{aligned}\sinh(\log(x + \sqrt{(x^2+1)})) &= \frac{e^{\log(x+\sqrt{(x^2+1)})} - e^{-\log(x+\sqrt{(x^2+1)})}}{2} \\ &= \frac{\log(x + \sqrt{(x^2+1)}) - \frac{1}{\log(x+\sqrt{(x^2+1)})}}{2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{2(x + \sqrt{x^2+1})} = x.\end{aligned}$$

Il secondo metodo, consiste nell'usare le derivate. Le due funzioni coincidono per $x = 0$ e sono uguali a 0. Se le loro derivate coincidono, allora le due funzioni sono uguali. Ma

$$(\arcsin hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

mentre

$$(\log(x + \sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

12. Imponiamo dapprima la condizione di continuità :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0,$$

quindi $b = 0$. Per la derivabilità ,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = a = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0,$$

da cui $a = 0$.

13. Per la continuità ,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = b,$$

quindi $b = 1$. Per la derivabilit

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = a,$$

da cui $a = 1$.

14. La condizione di continuità si riduce a

$$8 + b = 16a + 11a,$$

mentre la condizione di derivabilità

$$4 = 24a + 11a.$$

Gli unici due numeri che soddisfano queste condizioni sono $a = 4/25$ e $b = 132/25$.

15. La condizione di continuità si riduce a

$$0 = 0,$$

cioè la funzione data è comunque sempre continua indipendentemente dai parametri a e b. Per la derivabilità , otteniamo

$$a = b.$$

16. L'unica cosa che si sta richiedendo è che la derivata della funzione data sia pari ad 1 nel 0. Calcoliamo quindi la derivata prima;

$$f'(x) = \frac{a}{a^2 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Quindi

$$f'(0) = \frac{1}{a}.$$

Quindi la condizione è verificata se $a = 1$.

17. Per dimostrare l'invertibilità della funzione data, mostriamo che essa è strettamente monotona. Calcoliamo quindi la derivata prima

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0.$$

In particolare, la derivata prima non si annullerà mai (è sempre almeno pari a 3). Quindi, dato che f è strettamente monotona crescente, ammetterà una inversa, anch'essa monotona crescente. Tale inversa sarà anche continua ed in virtù della formula

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

la funzione inversa sarà anche derivabile. In particolare, siccome $f^{-1}(1) = 0$, avremo che

$$(f^{-1}(1)) = \frac{1}{3}.$$

18. Siccome $f(0) = 1$ mentre $f(1) = 1 - \sin 1 - 3 < 0$, allora per il teorema dell'esistenza degli zeri di una funzione continua, esisterà un punto $x_0 \in (0, 1)$ per il quale $f(x_0) = 0$.

19. Siccome $f(0) = 0$ e $f(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \pi/4 > 1/2$, allora siccome tutti i valori tra questi due numeri saranno assunti da f, in quanto funzione continua (corollario del teorema dell'esistenza degli zeri); in particolare esisterà un punto $x_0 \in (0, \pi/4)$ per il quale $f(x_0) = 1/2$.

20. La funzione data è tale che $f(0) = 0$ e $f(\pi/2) = 0$, però tale funzione non è derivabile in tutti i punti interni a $(0, \pi/2)$. Infatti si ha un problema in $\pi/4$ in quanto
$$\lim_{x \to \pi/4^-} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
mentre
$$\lim_{x \to \pi/4^+} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

21. Prendendo due punti $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, applichiamo il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x, y]$, per avere l'esistenza di un punto $x_0 \in [x, y]$ per il quale
$$\frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \sin'(x_0) = \cos(x_0).$$
Quindi, siccome $|\cos(x_0)| \leq 1$, segue la tesi.

22. La funzione limite è data da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
Quindi la funzione f è continua ma non derivabile.

23. Poniamo di avere un rettangolo generico di lati x e y. La condizione che il perimetro sia fissato, diventa
$$2x + 2y = P,$$
con $P \in \mathbb{R}$ numero reale fissato. Quindi, l'area del rettangolo diventa
$$A(x) = \frac{x(P - 2x)}{2}.$$
Questa è una funzione definita in $[0, P/2]$ e ne cerchiamo il massimo. Valutiamola negli estremi, $A(0) = 0 = A(P/2)$. Per quanto riguarda la derivata, otteniamo
$$A'(x) = \frac{P}{2} - 2x,$$
che si annulla per $x = P/4$ (quindi $y = P/4$) ed in tale punto si ha $A(P/4) = P^2/16$.

24. Poniamo il raggio della base del cilindro pari a r e l'altezza del cilindro pari a h. La condizione che la superficie laterale sia pari a S diventa

$$\pi r^2 + 2\pi r h = S,$$

da cui

$$h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}.$$

Il volume del cilindro diventa quindi

$$V(r) = \pi r^2 h = \frac{r(S - \pi r^2)}{2}.$$

Tale funzione va studiata nell'intervallo $[0, \sqrt{S/\pi}]$; abbiamo

$$V(0) = V(\sqrt{S/\pi}) = 0.$$

La derivata diventa quindi

$$V'(r)\frac{S - 3\pi r^3}{2}.$$

Tale derivata si annulla per $r = \sqrt{S/(3\pi)}$.

25. La condizione è , detti x e y i due lati del rettangolo, $xy = A$ con A numero reale fissato. La diagonale è quindi data da

$$D(x) = x^2 + \frac{A^2}{x^2}.$$

Tale funzione è definita su $(0, +\infty)$. La derivata è data da

$$D'(x) = \frac{2(x^4 - A^2)}{x^3},$$

che si annulla per $x = \sqrt{A}$ (da cui $y = \sqrt{A}$).

26. Di un settore circolare le variabili sono il raggio r del cerchio e l'ampiezza x del settore. Il perimetro del settore circolare è dato da

$$r(x + 2) = P$$

dove P sarà quindi un numero reale fissato. L'area del settore è data da

$$A(x) = \frac{xr^2}{2} = \frac{Px}{2(x+2)^2}.$$

Tale funzione è definita per $x \in [0, 2\pi]$; abbiamo che $A(0) = 0 = A(2\pi)$. La derivata sarà data da

$$A'(x) = \frac{2P(2 - x)}{(x+2)^3}.$$

Tale derivata si annulla per $x = 2$ che sarà quindi un punto di massimo.

27. Scritto $b = 5 - a$, la lunghezza dell'ipotenusa al quadrato sarà data da

$$I(a) = 2a^2 - 10a + 25,$$

con $a \in [0, 5]$. Si ha che $I(0) = I(5) = 25$, mentre la derivata di I sarà

$$I'(a) = 4a - 10,$$

che si annulla per $a = 5/2$ (e quindi $b = 5/2$), che sarà l'ipotenusa di lunghezza più piccola.

28. Il volume del parallelepipedo è dato da

$$V(r) = (a - 2r)(b - 2r)r.$$

Tale funzione è definita in $r \in [0, \min(a, b)/2]$. La derivata è data da

$$V'(r) = 12r^2 - 4(a + b)r + ab.$$

Tale derivata si annulla per

$$r = \frac{(a + b) + \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6},$$

che sarà quindi un punto di massimo.

Capitolo 18

Grafici di Funzioni

I grafici delle funzioni proposte sono dati in Appendice **??**; diamo qui una piccola traccia dei calcoli che portano a tali grafici.

1.

   i) Dominio: $D = (0, +\infty)$.

   ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

   iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1/e$.

   iv) Segno: la funzione è positiva per $x \geq 1/e$.

   v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

   vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

   vii) Derivata:

$$f'(x) = -\frac{\log x}{x^2}.$$

   viii) Zeri della derivata: $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

   ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq 1$, quindi $x = 1$ è un massimo con $f(1) = 1$.

   x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2 \log x - 1}{x^3}.$$

   xi) Zeri della derivata seconda: $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt{e}$.

   xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \geq \sqrt{e}$.

2.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x=\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x + 1}{(x+1)^2} & \text{per } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{(x-2)e^x + 1}{(1-x)^2} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: $f'(x) = 0$ in un unico punto $x_1 < 0$ (si trova per via grafica).

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq x_1$ e per $x \geq 0$, quindi il punto x_1 è un punto di massimo e 0 è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+1)e^x - 2}{(x+1)^3} & \text{per } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{(4x - 5 - x^2)e^x + 2}{(1-x)^3} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: $f''(x) = 0$ in due punti, uno $x_2 < x_1 < 0$ ed uno $x_3 > 0$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x < x_2$ e per $x > x_3$.

3.

i) Dominio: $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = (3 \pm \sqrt{33})/2$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $-2 < x < (3 - \sqrt{33})/2$ e per $x > (3 + \sqrt{33})/2$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x - 5$ è un asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0, -4$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq -4$ e per $x \geq 0$, quindi si ha un massimo in -4 ed un minimo in 0.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x > -2$.

4.

i) Dominio: $D = [-1/2, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \geq 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}},$$

tale derivata è definita in $(-1/2, +\infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{3x+2}{(x+1)^2(2x+1)^{3/2}}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: non si annulla mai in D.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre negativa.

5.

i) Dominio: $D = (0, 1/e) \cup (1/e, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $0 < x < 1/e$ e per $x \geq 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 1/e^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1/e^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{x(1 + \log x)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva in D.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{\log x + 3}{x^2(1 + \log x)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = e^{-3}$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $1/e < x \leq e$.

6.

i) Dominio: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x > 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x+1$ è un asintoto obliquo per la funzione sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = \pm 1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq -1$ e per $x \geq 1$.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \geq 0$.

7.

i) Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = -\sqrt[3]{3}$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $-\sqrt[3]{3} \leq x < -1$ e per $x > 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x(x^3 - 3x - 6)}{(x^2 - 1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla solo per $x = 0$ e in un secondo punto $x_1 > 0$ (la funzione $x^3 - 3x - 6$ ha massimi e minimi locali entrambi negativi).

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq 0$ e per $x \geq x_1$. Quindi 0 è un punto di massimo e x_1 è un punto di minimo.

8.

i) Dominio: $D = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono né simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$, mentre la retta $y = -x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x^3+1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$$

tale derivata è definita in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla in $-1/(\sqrt[3]{2})$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq -1/(\sqrt[3]{2})$.

9.

i) Dominio: $D = (-1, 1)$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è dispari, ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $-1 < x \leq 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2}{x^2-1}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre negativa.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = 0$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $-1 < x \leq 0$.

10.

i) Dominio: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono né simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x < 0$ e per $x \geq 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x^3}\right)^{-2/3} \frac{3-2x}{x^4}$$

il dominio della derivata è $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1 + \infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 3/2$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x < 0$ e per $1 < x \leq 3/2$, quindi $3/2$ è un punto di massimo.

11.

i) Dominio: $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{per } x \leq 0 \text{ e per } x > 1 \\[2ex] \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{per } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x < 1$.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^3} & \text{per } x \leq 0 \text{ e per } x > 1 \\[2ex] -\dfrac{1}{(x-1)^3} & \text{per } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $0 \leq x < 1$ e per $x > 1$.

12.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è pari, ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x^5} & \text{per } x < -1 \text{ e per } x > 1, \\ \\ 2x & \text{per } -1 < x < 1, \end{cases}$$

il dominio della derivata è inoltre $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0$.

ix) Segno della derivata: la derivata è crescente per $x < -1$ e per $0 \leq x < 1$, quindi i punti -1 e 1 sono punti di massimo mentre 0 è punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{x^6} & \text{per } x < -1 \text{ e per } x > 1, \\ \\ 2 & \text{per } -1 < x < 1, \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre positiva.

13.

i) Dominio: $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono né simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = -\sqrt[3]{3}$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \leq -\sqrt[3]{3}$ e per $x > 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 3}{(x-1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: siccome la funzione a numeratore nella derivata ha massimo locale in 0 con valore negativo e minimo locale in 1 con valore sempre negativo, ne segue che esiste un unico punto $x_1 > 1$ tale che la derivata si annulla in x_1.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq x_1$, quindi x_1 è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 6}{(x-1)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: siccome la derivata della funzione a numeratore è pari a $6(x-1)^2$, ne segue che la funzione a numeratore è sempre crescente, quindi, siccome in 0 è positiva, ne segue che esiste un unico punto $x_2 < 0$ per il quale la derivata seconda do f si annulla.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \leq x_2$ e per $x > 1$.

14.

i) Dominio: $D = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty. \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = -2x - 1/2$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1,$$

il dominio della derivata è $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x > 0$.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{1}{4(x^2+x)^{3/2}}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre negativa.

15.

i) Dominio: $D = (-\infty, -1/4) \cup (-1/4, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x < -1/4$ e per $x \geq 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1/4^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-1/4^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{(1-x-4x^2)e^{-x}}{(4x+1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = (-1 \pm \sqrt{17})/8$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per

$$(-1-\sqrt{17})/8 \leq x < -1/4$$

e per

$$-1/4 < x \leq (-1+\sqrt{17})/8.$$

16.

i) Dominio: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è pari, ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai (si confrontino i grafici delle funzioni $\arctan x$ e $x/(x^2+1)$, andando a notare che la derivata della prima è sempre maggiore della derivata della seconda).

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x < 0$, quindi 0 è un punto di massimo.

17.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è 2π–periodica, ma non ha simmetrie. Quindi studiamo la funzione nel dominio $[0, 2\pi]$.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 3\pi/4, 7\pi/4$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $0 \leq x \leq 3\pi/4$ e per $7\pi/4 \leq x \leq 2\pi$.

v) Limiti agli estremi del dominio: essendo la funzione periodica e definita in tutta la retta reale, non bisogna fare i limiti agli estremi.

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \cos x - \sin x.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = \pi/4, 5\pi/4$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x \leq \pi/4$ e per $5\pi/4 \leq x \leq 2\pi$, quindi $\pi/4$ è un punto di massimo, mentre $5\pi/4$ è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\sin x - \cos x.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = 3\pi/4, 7\pi/4$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per

$$3\pi/4 \leq x \leq 7\pi/4.$$

18.

i) Dominio: $D = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è pari, ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\sqrt{1 + 1/e}$ e $x = \pm\sqrt{1+e}$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \leq -\sqrt{1+e}$, per $-\sqrt{1+1/e} \leq x < -1$, per $1 < x \leq \sqrt{1+1/e}$ e per $x \geq \sqrt{1+e}$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(x^2-1)\log(x^2-1)} & \text{per } |x| \geq \sqrt{2} \\[2ex] -\dfrac{2x}{(x^2-1)\log(x^2-1)} & \text{per } -\sqrt{2} \leq x < -1, \\ & \text{e per } 1 < x \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: la derivata prima non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $-\sqrt{2} < x < -1$ e per $x > \sqrt{2}$.

19.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty) \setminus \{3\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è 2π–periodica ma non simmetrica, quindi la studiamo in $[0, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, \pi/2, \pi, 2\pi$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $0 \leq x \leq \pi/2$ e per $\pi \leq x < 3\pi/2$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to3\pi/2^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to3\pi/2^+} f(x) = -\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2(1 - \sin x - \sin^2 x)}{1 + \sin x}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla in due punti $0 < x_1 < \pi/2$ e $\pi/2 < x_2 < \pi$ (in tali punti il seno vale $(\sqrt{5}-1)/2$).

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x \leq x_1$, per $x_2 \leq x < 3\pi/2$ e per $3\pi/2 < x \leq 2\pi$.

20.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty) \setminus (\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è 2π–periodica e pari, quindi possiamo studiarla nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

iii) Intersezione con gli assi: la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio: non bisogna fare limiti agli estremi.

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2 \sin x}{\sqrt{\cos x(2 + \cos x)^3}},$$

la derivata è definita in $(-\pi/2, \pi/2)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x < \pi/2$, quindi 0 è un punto di minimo.

21.

i) Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{(x+1)^2};$$

il dominio della derivata è $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{x}{(x-1)(x+1)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x < -1$.

22.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 5.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} & \text{per } \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2} & \text{per } \dfrac{-5-3\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

il dominio della derivata è dato da $(-\infty, (-5-3\sqrt{5})/2) \cup ((-5-3\sqrt{5})/2, 1) \cup (1, (5+\sqrt{5})/2) \cup ((5+\sqrt{5})/2 + \infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0, 2$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \le x < (-5-3\sqrt{5})/2$ e per $2 \le x < (5+\sqrt{5})/2$, quindi 0 e 2 sono punti di minimo.

23.

i) Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità :

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \ge 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = e^{1/(x+1)} \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -e^{1/(x+1)} \frac{x + 2}{(x+1)^4}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = -2$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \leq -2$.

24.

i) Dominio: $D = (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = x_1$, con $0 < x_1 < 1$ (questo si può vedere per via grafica).

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \geq x_1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - \log x}{x^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai (questo si può vedere per via grafica).

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2\log x - 3}{x^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = e^{3/2}$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \geq e^{3/2}$.

25.

i) Dominio: $D = (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ (questo si può vedere per via grafica).

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2 - x\log x}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq 1$, quindi 1 è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{x^2 - 3x + 1 + \log x}{(x^2 - x\log x)^2}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: esiste un solo punto $x_2 > 1$ per il quale la derivata seconda si annulla.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $0 < x \leq x_2$.

26.

i) Dominio: $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, 2$

iv) Segno: la funzione è positiva per $x < 1$ e per $x \geq 2$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:
$$f'(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x}{(x-1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq 0$, quindi 0 è punto di minimo.

x) Derivata seconda:
$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{(x-1)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = 2$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x < 1$ e per $x \geq 2$.

27.

i) Dominio: $D = [1 - e, 1)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1 - e$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:
$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1 - \log(1-x)}}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:
$$f''(x) = \frac{1 - 2\log(1-x)}{4(1-x)^2(1 - \log(1-x))^{3/2}}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = 1 - \sqrt{e}$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \geq 1 - \sqrt{e}$.

28.

i) Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: per via grafica, se vede che la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x > 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x - 1$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 3x - 3}{2x(x+1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 1, (-3 - \sqrt{3})/2$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq (-3 - \sqrt{3})/2$ e per $x \geq 1$, quindi $(-3 - \sqrt{3})/2$ è punto di massimo e 1 è punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{10x^2 + 9x + 3}{2x^2(x+1)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x > 0$.

29.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x - 9/4$ è asintoto obliquo a $+\infty$, mentre la retta $y = -x + 9/4$ è asintoto a $-\infty$.

vii) Derivata:
$$f'(x) = \frac{8x^3 + 6x^2 - 8x - 6}{(4x^2 + 2x + 1)^{3/2}}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = -1, -3/4, 1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $-1 \leq x \leq -3/4$ e per $x \geq 1$, quindi -1 e 1 sono punti di minimo, mentre $-3/4$ è punto di massimo.

30.

i) Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x > -1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{per } x \geq 1 \\[2ex] -\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{per } x \leq 1. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq 1$, quindi 1 è punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(x+1)^3} & \text{per } x \geq 1 \\[2ex] \dfrac{4}{(x+1)^3} & \text{per } x \leq 1. \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $-1 < x \leq 1$.

31.

i) Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è dispari ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $-1 < x \leq 0$ e per $x > 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{4/3}}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = \pm\sqrt{3}$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq -\sqrt{3}$ e per $x \geq \sqrt{3}$, quindi $-\sqrt{3}$ è un punto di massimo e $\sqrt{3}$ è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x(9 - x^2)}{9(x^2 - 1)^{7/3}}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = -3, 0, 3$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \leq -3$, per $-1 < x \leq 0$ e per $1 < x \leq 3$.

32.

i) Dominio: $D = (\infty, -2) \cup (-2, -1/2) \cup (-1/2, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1, 3$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \leq -1$ e per $x \geq 3$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log 4, \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1/2^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1/2^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to1/2^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to1/2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \log 4.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2(4x + |x|)}{|x|(x + 2)(2|x| - 1)}.$$

il dominio della derivata è $(\infty, -2) \cup (-2, -1/2) \cup (-1/2, 0, \cup (0, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x < -2$, per $-1/2 < x \leq 0$ e per $x > 1/2$, quindi 0 è un punto di massimo.

33.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : non ci sono simmetrie né periodicità .

iii) Intersezione con gli assi: la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x|x - 1| - x^3 + x^2 - x + 1}{|x - 1|e^{|x-1|}},$$

il dominio della derivata è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

viii) Zeri della derivata: ls derivata si annulla per $x = -1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq 1$, quindi il punto 1 è un punto di massimo.

34.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty) \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è pari e 2π–periodica, quindi la studiamo nell'intervallo $[0, \pi)$.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pi/2$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $0 \leq x \leq \pi/2$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:
$$f'(x) = -\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0$.

ix) Segno della derivata: la derivata non è mai positiva in $[0, \pi)$.

x) Derivata seconda:
$$f''(x) = \frac{\cos^2 x - \cos x - 2}{(1+\cos x)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai in $[0, \pi)$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre negativa.

35.

i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità : la funzione è 2π–periodica ma non simmetrica, quindi la studiamo in $[0, 2\pi]$.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $\pi \leq x \leq 2\pi$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio: non bisogna fare alcun limite.

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cos x}{1+2\sin x} & \text{per } 0 \leq x \leq \pi \\ \\ 0 & \text{per } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = \pi/2$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x \leq \pi/2$, quindi $\pi/2$ è punto di massimo.

x) Derivata seconda:
$$f''(x) = \begin{cases} -2\dfrac{\sin x + 2}{(1+2\sin x)^2} & \text{per } 0 \leq x \leq \pi \\ \\ 0 & \text{per } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre negativa.

Capitolo 19

Integrali

1.

i) $-\cos x^3$;

ii) $\arctan \log x$;

iii) $\dfrac{\tan^4 x}{4}$;

iv) $\dfrac{\sin^2 x}{2}$;

v) $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2-3}{\sqrt{x}}\right)$;

vi) $-\arctan\cos(x)$;

vii) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

viii) $\tan x - \cot x$;

ix) $\log|\tan(x/2)|$;

x) $\log|\tan(x/2+\pi/4)|$.

2. **i)** Tramite la sostituzione $x = \sin t$, si ottiene

$$\frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{9} + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{9} + c.$$

ii) Effettuando la sostituzione $t = \sqrt[3]{8+x}$, si ottiene il risultato

$$\frac{3}{7}(x-6)(8+x)^{4/3} + c.$$

iii) Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$4\sqrt{x} - x - 4\log(1+\sqrt{x}) + c.$$

iv) Con la sostituzione $x = \sin t$, si ottiene

$$\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$$

v) Con la sostituzione $x = \sinh t$, si ottiene

$$\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}\right) + c.$$

vi) Con la sostituzione $x = \cosh t$ con $t \geq 0$ se $x \geq 1$ (altrimenti si pone $x = -\cosh t$, sempre con $t \geq 0$), si ottiene

$$\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right) + c.$$

vii) Scrivendo $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$, si ottiene

$$\arcsin(x-1) + c.$$

viii) Integrando per parti, si ottiene

$$x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c.$$

ix) Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$(2\sqrt{x}-1)\arctan(1/2-\sqrt{x}) + \log(x-\sqrt{x}+5/4) + c.$$

x) Ponendo $x = \sin t$, si ha

$$\frac{e^{\arcsin x}}{2}(x - \sqrt{1-x^2}) + c.$$

xi) Ponendo $t = \log x$, si ottiene

$$-\frac{2}{27}x^{-3/2}(9\log^2 x + 12\log x + 8) + c.$$

xii) Scrivendo $x - x^2 = 1/4 - (x-1/2)^2$ si ottiene

$$\arcsin(2x-1) + c.$$

3. **i)** Si ha

$$[\log\log x]_e^{e^2} = \log 2.$$

ii) Integrando per parti si ottiene

$$\left[\frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{\log(x^2+1)}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\log 2}{6} - \frac{1}{6}.$$

iii) Ponendo $t = \sqrt{x}$ si ha

$$\left[2t - \frac{2t^3}{3}\right]_1^2 = -\frac{8}{3}.$$

iv) Si ha
$$[\tan x - 2\log|\cos x|]_0^1 = \tan 1 - 2\log\cos 1.$$

v) Si ottiene
$$-\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 3\log|x-1|\right]_{-2}^{0} = 3\log 3 - \frac{14}{3}.$$

vi) Ponendo $t = \sqrt{x+1}$, si ottiene
$$-\left[\frac{2}{3}t^3 + t^2\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3} - 1.$$

vii Ponendo $x = \sin t$, si ottiene
$$[t\sin t + \cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

viii) Ponendo $t = \sqrt{x}$, si ottiene
$$4\,[t\log t - t]_1^{\sqrt{e}} = 4 - 2\sqrt{e}.$$

ix) Integrando per parti, si ricava
$$\left[x(\log^3 x - 3\log^2 x + 6\log x - 6)\right]_1^e = 6 - 2e.$$

x) Ponendo $t = x^4$, si ottiene
$$\left[\frac{\arctan t}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

xi) Ponendo $t = \sqrt{e^x - 1}$, si ricava
$$2\,[\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

xii) Ponendo $t = \sqrt{x+2}$, si ottiene
$$\left[\frac{2}{3}\log(|t+2|^2|t-1|)\right]_2^3 = \frac{2}{3}\log\frac{25}{8}.$$

xiii Ponendo $x = \sqrt{2}\sin t$, si ottiene
$$\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(4t)}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

xiv) Con la sostituzione $t = \sin x$, si ottiene
$$2[(t-1)e^t]_0^1 = 2$$

xv) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x+|x|)dx &= \int_{-\pi/2}^{0} x^2dx+\int_0^{\pi/2} x^2\cos(2x)dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{2} + \\ &+\left[\frac{(2x^2-1)\sin(2x)}{4}\frac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

4. Si hanno rispettivamente

$$\mathbf{i)}\frac{2}{\pi};\quad \mathbf{ii)}\frac{\log 2}{3-\sqrt{3}};\quad \mathbf{iii)}\frac{\cos(-1)-\cos(1)}{\pi}.$$

5. Una primitiva generica per la funzione f è data da

$$F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+c.$$

Si tratta quindi di determinare la costante in modo da verificare la condizione $F(0)=1$. Ma

$$F(0)=c.$$

quindi la primitiva cercata sarà data da

$$F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+1.$$

6. Si ha che

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_0^a f(x)dx.$$

Nel primo dei due integrali si effettua la sostituzione $t=-x$ e si ottiene

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(x)dx$$

da cui l'asserto. Quindi se la funzione è dispari si ha che $f(-x)=-f(x)$, da cui l'integrale è nullo, mentre se f è pari $f(-x)=f(x)$, da cui la seconda parte dell'esercizio.

7. Dato $a>0$, esisterà sicuramente un $k\in\mathbb{N}$ per il quale $a\in[(k-1)T,kT)$. Quindi

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^{kT} f(x)dx+\int_{kT}^{a+T} f(x)dx.$$

Nel primo integrale si fa la sostituzione $t = x - (k-1)T$, mentre nel secondo la sostituzione $t = x - kT$, in modo da ottenere, sfruttando la periodicità di f,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_{a-(k-1)T}^{T} f(x)dx + \int_0^{a-(k-1)T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

8. Tramite la sostituzione $x = a - t$, otteniamo

$$\int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(a-t)dt = \int_0^a f(a-x)dx.$$

Da questa, per la seconda parte dell'esercizio, si ottiene

$$2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

9. Prendiamo in considerazione il primo integrale. Dalle formule di Prostaferesi, abbiamo che

$$\sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x).$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0.$$

Analogamente, per le altre due otterremo che

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

10. Integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} \int \sin^k x dx &= \int \sin x \sin^{k-1} x dx \\ &= -\cos x \sin^{k-1} x + (k-1)\int \cos^2 x \sin^{k-2} x dx + c. \\ &= -\cos x \sin^{k-1} x + (k-1)\int \sin^{k-2} x dx + \\ &\quad -(k-1)\int \sin^k x dx + c., \end{aligned}$$

da cui

$$\int \sin^k x dx = -\frac{\cos x \sin^{k-1} x}{k} + \frac{k-1}{k}\int \sin^{k-2} x dx.$$

Da questa identità si deduce l'esercizio.

11. Integrando due volte per parti, otteniamo

$$\int e^{\lambda x}\sin(\mu x)dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}\left(\lambda\sin(\mu x) - \mu\cos(\mu x)\right) + \frac{\mu^2}{\lambda^2}\int e^{\lambda x}\sin(\mu x)dx + c.,$$

da cui

$$\int e^{\lambda x}\sin(\mu x)dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2+\mu^2}\left(\lambda\sin(\mu x) - \mu\cos(\mu x)\right) + c.$$

12. Le prime due identità sono immediate. Per l'ultima, scritto

$$\frac{bx+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{b}{2}\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{c+\alpha b}{\beta^2}\frac{1}{((x-\alpha)/\beta)^2+1},$$

otteniamo l'identità desiderata.

13. Si tratta di applicare il teorema di Rolle alla funzione

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx.$$

Tale funzione è chiaramente nulla in a, così come lo è in b per ipotesi. Quindi esiste un punto interno all'intervallo (a,b) per il quale $F'(z) = 0$. L'esercizio segue in quanto $F'(z) = f(z)$.

14. Effettuando la sostituzione $t = a + b - x$, troviamo che

$$I = \int_a^b \frac{f(b-x)}{f(b-x)+f(x-a)}dx,$$

da cui

$$\begin{aligned} b-a &= \int_a^b \frac{f(x-a)+f(b-x)}{f(b-x)+f(x-a)}dx \\ &= \int_a^b \frac{f(b-x)}{f(b-x)+f(x-a)}dx + \int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx = 2I. \end{aligned}$$

15. Per quanto riguarda il secondo integrale, tenendo conto che

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x),$$

otteniamo che $J = I$. Per quanto riguarda il terzo integrale, tenendo presente che

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$

otteniamo che

$$K = 2I + \frac{\pi\log 2}{2}.$$

D'altro canto si ha che

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\sin x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\sin(x+\pi/2) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\sin x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log\cos x dx = I. \end{aligned}$$

Quindi i tre integrali sono tutti uguali tra loro e il loro valore è pari a

$$I = -\frac{\pi\log 2}{2}.$$

16. Calcolando l'integrale

$$\int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{1}{x} dx = \log(k+1) - \log k,$$

e dalle stime $1/(k+1) \leq x \leq 1/k$ su $[1/(k+1), 1/k]$, sommando su k, otteniamo la stima desiderata. Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, basta tenere conto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1.$$

17. Supponiamo che il massimo sia minore o uguale a 1. Siccome la funzione in 0 vale 0, esisterà un $\delta > 0$ per il quale, se $x < \delta$, $f(x) < 1/2$. Quindi, otteniamo che

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\delta} f(x)dx + \int_{\delta}^1 f(x)dx \leq \frac{\delta}{2} + (1-\delta) = 1 - \frac{\delta}{2} < 1,$$

che è una contraddizione.

Capitolo 20

Integrali Razionali

1.

i)

$$\log \frac{|x-1|^2}{|x|^{3/2}|x-2|^{1/2}} + c.$$

ii)

$$\left[\log \frac{|x+2||x-1|^{1/2}}{|x+1|^{1/2}}\right]_0^{1/2} = \log \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

iii)

$$\left[\log \frac{|x|^2|x+1|^{\frac{1}{2}}}{|x^2+1|^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{2}\arctan x\right]_1^2 = \log\left(\frac{\sqrt[4]{288}}{\sqrt[4]{125}}\right) + \frac{1}{2}\arctan(2) - \frac{\pi}{4}.$$

iv)

$$\frac{x^2-2x-1}{x-1} + \log(|x||x-1|) + c.$$

v)

$$\log \frac{|x-1|^{3/2}}{|x-3|^{1/2}} - \frac{13}{x-3} + c.$$

v)

$$\log \frac{|x-1|}{(x^2-2x+2)^{1/2}} + 3\arctan(x-1) + c.$$

vi)

$$\frac{1}{2}\log(x^2+4x+5) - \frac{9}{2}\arctan(x+2) + \frac{1}{2}\frac{3x-13}{x^2+4x+5} + c.$$

vii)

$$-\frac{1}{2x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

2.

i) Con la sostituzione $t=\sqrt{x}$, si ottiene

$$2\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)\right)+c.$$

iii) Con la sostituzione $t=\sqrt[6]{x+1}$, si ottiene

$$\begin{aligned}&-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x+1}-2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+\\&-\log\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|^2\left|\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}\right|^2+\\&+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[6]{x+1}+\frac{1}{2}\right)\right)+c.\end{aligned}$$

iv) Con la sostituzione $t=\sqrt[6]{x}$, si ottiene

$$2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\log(\sqrt[6]{x}+1)+c.$$

3.

i) Con la sostituzione $t=\tan(x/2)$, si ottiene

$$[\log|t|]_{1/\sqrt{3}}^{1}=\log\sqrt{3}.$$

ii) Con la sostituzione $t=\sin x$, si ottiene

$$\log\frac{(2-\sin x)^4}{(1-\sin x)^2}+c.$$

iii) Ponendo $t=\tan(x/2)$, si ottiene

$$-2\left[\frac{1}{t}+\arctan t\right]_1^{+\infty}=1-\frac{3\pi}{4}.$$

iv) Ponendo $t=\tan(x/2)$, si ottiene

$$\log\left|\frac{\sin(x/2)+\cos(x/2)}{\sin(x/2)-\cos(x/2)}\right|-\frac{2\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)-\cos^2(x/2)}+c.$$

4.

i) Ponendo $t=e^x$, si ottiene

$$\log\frac{|e^x-1|^{3/2}}{(e^x+1)^{1/2}}-x+c.$$

ii) Ricordando le definizioni del seno e del coseno iperbolico, ponendo $t=e^x$ si ottiene

$$\sqrt{2}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(e^x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)+c.$$

iii) Ponendo $t=e^x$, si ottiene

$$\arccos he^x+c.$$

Parte III

Testi di Esame

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 9.9.2002 – **Compito B**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:
$$f(x) = |x^2 - 3x|e^{-x}.$$

2) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - e^{x^2}}{x^2}.$$

3) Calcolare modulo e argomento delle radici del polinomio
$$p(z) = z^2 - 6iz - 18.$$

4) Calcolare il seguente integrale:
$$\int_0^1 |2x - 1|e^{-x}\ dx.$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:
$$\sum n = 1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^\alpha$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 9.9.2002

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:
$$f(x) = \frac{x^2 - 3|x-1|}{x-2}.$$

2) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

3) Calcolare modulo e argomento delle radici del polinomio
$$p(z) = z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4.$$

4) Calcolare il seguente integrale:
$$\int_0^1 \frac{16x^4 - 3}{4x^2 + 1}\, dx.$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$
al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 19.7.2002 – **Compito A**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:

$$f(x) = x^{2/3}\big|\log|x|\big| - x.$$

2) Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log^2(1+x) - x^2}{x - \sin x}$$

3) Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 27i.$$

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\, dx.$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arccos\Big(\frac{n-1}{n}\Big).$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 19.7.2002 – **Compito B**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:
$$f(x) = \frac{2+|x|}{1-x^2}.$$

2) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x+x^2) - x\sqrt{1+2x}}{x^3}$$

3) Trovare le soluzioni complesse dell'equazione
$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8i.$$

4) Calcolare il seguente integrale:
$$\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}}\ dx$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(n\pi + \frac{1}{n^\alpha}\Big)$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 5.7.2002 – **Compito A**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:
$$f(x) = |x|(x - x^2)e^{-x}.$$

2) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + 2x^2) + 4\cos x - 4}{\sin^2 x^2}$$

3) Si consideri il polinomio complesso
$$p(z) = z^4 + 3z^3 + 5z^2 + 27z - 36\,.$$
Calcolare $p(3i)$ e trovare tutte le radici del polinomio.

4) Calcolare il seguente integrale:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 - \sin x}\, dx.$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \log n}{100 + n}.$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 5.7.2002 – **Compito B**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:

$$f(x) = \arctan\left(-\left|\frac{x-2}{x+2}\right|^{1/2}\right)$$

2) Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt[3]{1+x^3}}{\sin x}$$

3) Si consideri il polinomio complesso

$$p(z) = z^4 + 5z^3 - 2z^2 + 20z - 24\,.$$

Calcolare $p(2i)$ e trovare tutte le radici del polinomio.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sin \log x \; dx$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^6 \left[2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^4} - 2\right] \cos(n^4 - 2n^2)\,.$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 15.1.2002 – **Compito A**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:

$$f(x) = \frac{\sqrt{|2x^2 - x|}}{x + 1}.$$

2) Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \tan x - \sin x)}{\sqrt{1 + 2x^3} - 1}$$

3) Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^3 - 8i = 0.$$

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1 + e^x}\, dx.$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(1 - \frac{\sin(1/n)}{1/n}\Big).$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 15.1.2002 – **Compito B**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:
$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} + x.$$

2) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\log(1 + \tan^2 x)}$$

3) Trovare le soluzioni complesse dell'equazione
$$z^4 + 4 = 0.$$

4) Calcolare il seguente integrale:
$$\int_0^1 \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - 3e^{6x}}\, dx$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(1 - \sqrt{\cos \frac{1}{n}}\Big).$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 15.1.2002 – **Compito A**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:
$$f(x) = xe^{\frac{x-1}{x-2}}.$$

2) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\sqrt{\cos x} - 1}$$

3) Mostrare che l'equazione $z^3 - 3z^2 + (9 + 5i)z - 2 - 10i = 0$ ammette una soluzione immaginaria pura e calcolarla.

4) Calcolare il seguente integrale:
$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}\, dx.$$

5) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(1 - \frac{\sin(1/n)}{1/n}\Big).$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 18.12.2001 – **Compito A**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:

$$f(x) = 2x - 1 - \log |e^x - 2|.$$

2) Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x) - x}{x \log(1 + x)}.$$

3) Mostrare che l'equazione $z^3 - 3z^2 + (9 + 5i)z - 2 - 10i = 0$ ammette una soluzione immaginaria pura e calcolarla.

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^3} dx.$$

5) Studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{\pi}{2} - \arcsin\Big(\frac{n}{n + 1}\Big)\Big].$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 18.12.2001 – **Compito B**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:
$$f(x) = \frac{x}{x+1}e^{-x}.$$

2) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{x\to -\pi/2} \frac{\arctan\bigl(\log(2+\sin x)\bigr)}{\tan(1+\sin x)}.$$

3) Mostrare che l'equazione $iz^3 + 7iz - 6 = 0$ ammette una soluzione immaginaria pura e calcolarla.

4) Calcolare il seguente integrale:
$$\int_1^2 \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx.$$

5) Studiare la serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}.$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 26.11.2001 – **Compito A**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:
$$f(x) = |3x^2 - 4x|e^{-2x}.$$

2) Studiare il seguente limite:
$$\lim_{x\to+\infty} x^3\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{x}\Big).$$

3) Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione:
$$z^4 + 6z^2 - 5 = 0.$$

4) Calcolare il seguente integrale:
$$\int_0^1 \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$$

5) Studiare la serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\Big(\frac{5}{1+\sqrt{n}}\Big)\Big).$$

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria informatica

Prova scritta di Matematica I

Lecce, 26.11.2001 – **Compito B**

1) Tracciare il grafico della funzione definita dalla seguente espressione analitica:

$$f(x) = 2x - 3\log(1 + x^2).$$

2) Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x^2}\Big).$$

3) Calcolare le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$|z|^2 - 6z + 1 = 0.$$

4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

5) Studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n^2}\alpha^n$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.