Università degli Studi di Lecce

Eserciziario di Analisi Matematica I
Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi"

M. Miranda & F. Paronetto

23 novembre 2005

In queste dispense viene distribuito del materiale che riteniamo possa essere utile allo studente che si avvicina allo studio del corso di Analisi Matematica I. Vengono forniti i testi di alcuni esercizi relativi agli argomenti del corso di Analisi Matematica I per la Facoltà di Ingegneria di Lecce, con alcune proposte di soluzione. Teniamo a sottolineare che la nostra è solo *una* proposta di risoluzione, ricordando che una qualsiasi soluzione alternativa, *se corretta*, è del tutto equivalente.

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo $(\star)$ sono da ritenersi *facoltativi*, nel senso che, *solitamente*, non sono ritenuti necessari per il superamento dell'esame scritto di Matematica I della Facoltà di Ingeneria di Lecce, fermo restando che almeno un tentativo di risoluzione da parte dello studente è quantomeno auspicabile.

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo $(\star\star)$ sono da ritenersi *difficili*; per la risoluzione di tali esercizi non è comunque richiesta altra conoscenza al di fuori di quella fornita durante le lezioni, ma solo un po' più di gusto e buona volontà da parte dello studente.

Sottolineiamo infine che con il presente eserciziario non si intende assolutamente sostituire un qualsiasi testo teorico di Matematica I; consigliamo anzi di avere ben chiari i concetti di teoria *prima* di apprestarsi ad affrontare gli esercizi.

In ultimo, chiediamo scusa per eventuali errori esistenti nel presente eserciziario, e invitiamo chiunque trovi delle inesattezza, a segnalarcele prontamente in modo da provvedere alla loro correzione.

Lecce, 26 settembre 2003,

Michele Miranda
michele.miranda@unile.it

Fabio Paronetto
fabio.paronetto@unile.it

Preliminari

In questo capitolo viene fornita una piccola proposta di esercizi da considerarsi di riscaldamento, nel
Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni e disequazioni:

1. $-x > 0\,;\quad 3x - 6 \geq 0\,;\quad 4 - 8x < 0$
2. $x^2 + x - 6 > 0\,;\quad -x^6 + 7x^3 - 12 > 0$
3. $x^2 + 1 \geq 0\,;\quad (x-1)^2 \geq 0\,;\quad \sqrt{x^2} \geq 0$
4. $x^8 - 2x^7 - 3x^6 \leq 0$
5. $x^{10} - x^6 < 0$
6. $\sqrt{|x|} \geq 0$
7. $(x-1)^3 \geq 0$
8. $2x^3 + 2x^2 - 28x - 48 = 0$
9. $27x^{3/2} - \sqrt{x} \geq 0$
10. $-9x^2 + 12x - 4 \geq 0\,;\quad x^4 - 2x^2 - 8 < 0$
11. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} \geq 0$
12. $\dfrac{10}{x^2+1} > 6 - x^2\,;\quad \dfrac{x^4-9}{x^2+3} > 0\,;\quad \dfrac{7-x}{4-3x} \leq 1$
13. $x^3 + 4 \leq |x + 4^{1/3}|$
14. $|x+2| \geq 2$
15. $\dfrac{4|x|}{x^2 - 2|x| - 3} \leq -1$
16. $2|x^2 - x| \geq |x|\,;\quad |x+3| - 2 > 0\,;\quad (x+1)^2 < |x^2 - 1|$
17. $|2x^2 - 16x + 31| < 1\,;\quad x \geq 2(|x| - 1)$
18. $\left|\dfrac{x-1}{x-7}\right| \geq 1\,;\quad \left|\dfrac{2x-1}{5-x}\right| < 2\,;\quad \big||x+1| - 2\big| > 3$

19. $\sqrt{4x^2-1} < x-3$

20. $\sqrt{2x^2-1} > \sqrt{x^2-3}$

21. $|x|(1-2x^2)^{1/2} > 2x^2-1$

22. Si dimostri, usando la definizione di modulo, che:

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

23. Trovare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui è verificata la seguente diseguaglianza:

$$\frac{x^3-2x^2}{x^3-4x^2+3x} \geq 0.$$

24. Risolvere la seguente diseguaglianza:

$$\big||x-4|-3x\big| \geq 2x.$$

Principali formule trigonometriche:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Ricavare, usando le formule precedenti, le seguenti uguaglianze:

1. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
2. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
3. $\sin 2x = 2 \sin x \cos y$; $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
4. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
5. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
6. $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

7. $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

8. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

9. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

Dire su quali insiemi sono invertibili le seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sin^2 x$ su $[-\pi/2, \pi/2]$, su $[0, \pi/2]$, su $[\pi/4, \pi/2]$
2. $f(x) = \sin x^2$ su $[-\pi/2, \pi/2]$, su $[-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}]$, su $[0, \sqrt{\pi}]$
3. $f(x) = \sin 2x$ su $[-\pi/2, \pi/2]$, su $[-\pi/4, \pi/4]$, su $[\pi/4, \pi/2]$
4. $f(x) = \arcsin \sin x$ su $[-\pi/2, \pi/2]$, su $[0, \pi]$

Disegnare gli insiemi di $\mathbb{R}^2$ soddisfacenti le seguenti equazioni:

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -11$
2. $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 18 = 0$
3. $x^2 - 8y - 14x + 49 = 0$
4. $x^2 + 10x + 7y = -32$
5. $y = \frac{x+4}{x+3}$
6. $5 - 3x - y + xy = 0$
7. Determinare i seguenti insiemi:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| + |x| \leq 2\}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x^2} > 2x\right\}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x^2} \leq |x|\right\}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 3x - 27)\sqrt{1 - 2\sin x} > 0\right\}$$

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}.$$

Indice

1 Numeri Reali **9**
1.1 Rappresentazione decimale dei numeri reali. 9
1.2 Esercizi 11
1.3 Soluzioni 13
1.4 La funzione esponenziale 20

2 Numeri complessi **23**
2.1 Soluzioni 24

3 Principio di Induzione **29**
3.1 Soluzioni 31

4 Successioni Numeriche **39**
4.1 Il Numero di Nepero e 39
4.2 Osservazioni sul numero di Nepero 40
4.3 Esercizi 41
4.4 Soluzioni 45

5 Serie Numeriche **55**
5.1 Soluzioni 59

6 Limiti e Funzioni Continue **71**
6.1 Esercizi senza svolgimento 75
6.2 Soluzioni 76

7 Derivate e Problemi di Massimo e Minimo **87**
7.1 Soluzioni 92

8 Sviluppo asintotici e forme indeterminate **101**
8.1 Forme indeterminate e sviluppi asintotici 101
8.1.1 Sviluppi asintotici 102
8.2 Esercizi 103
8.3 Soluzioni 106

9 Grafici di Funzioni **119**
9.1 Soluzioni 120

10 Integrali **143**
10.1 Soluzioni 146

11 Integrali Razionali **153**
11.1 Soluzioni 154

12 Integrali Impropri **157**
12.1 Soluzioni 161

Capitolo 1

Numeri Reali

1.1 Rappresentazione decimale dei numeri reali.

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Consideriamo la parte intera di a (definita come il più grande intero minore od uguale ad a la quale si denota con $[a]$)

$$n_0 := [a] \in \mathbb{N}\,.$$

Si ha che

$$n_0 \leq a < n_0 + 1\,.$$

Definiamo ora $m_0 = a - n_0 \in [0, 1)$ e consideriamo

$$n_1 := [10m_0] \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\,.$$

Si ha che

$$n_1 \leq 10m_0 < n_1 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{n_1}{10} \leq m_0 < \frac{n_1}{10} + \frac{1}{10}$$

e quindi, per definizione di m_0,

$$n_0 + \frac{n_1}{10} \leq a < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{1}{10}\,.$$

Se ora definiamo

$$m_1 = m_0 - \frac{n_1}{10} = a - n_0 - \frac{n_1}{10} \in \left[0, \frac{1}{10}\right)$$

e consideriamo

$$n_2 = [10^2 m_1] \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}\,.$$

otteniamo

$$n_2 \leq 10^2 m_1 < n_2 + 1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{n_1}{10^2} \leq m_1 < \frac{n_1}{10^2} + \frac{1}{10^2}$$

e quindi infine

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} \leq a < n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\,.$$

Continuando a ragionare in modo analogo possiamo costruire due successioni

$$\begin{aligned} A_k &:= n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \\ B_k &:= n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \end{aligned} \qquad \text{con } n_k \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$$

con la proprietà che

$$A_k \le a < B_k \,. \tag{1.1}$$

Si considerino gli insiemi $S = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ e $T = \{B_0, B_1, B_2, \ldots\}$. Da (1.1) si deduce che S è limitato superiormente, per cui ammette estremo superiore finito. Proviamo che l'estremo superiore di S è a.
Fissato $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare un $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$A_k > a - \varepsilon \,.$$

Ma ciò è equivalente a

$$a - n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} < \varepsilon \,.$$

Ma da (1.1) deduciamo che

$$a - n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} < \frac{1}{10^k}$$

quindi è chiaro che è sufficiente scegliere k in modo tale che valga $1/10^k \le \varepsilon$ ($k \ge \log_{10} \varepsilon^{-1}$).
In modo analogo si prova che $\inf T = a$.
Se $a < 0$ si può considerare, ad esempio, la decomposizione di $-a$ e poi cambiare di segno.

Osservazioni - Come prima cosa osserviamo che, per ogni numero reale a, abbiamo costruito una successione (una particolare successione) di numeri *razionali* che approssimano il numero a. Questo mostra che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (vedi dispense di teoria). Si possono costruire infinite successioni di razionali approssimanti il numero a, ma quelle che abbiamo scelto sono quelle che usualmente usiamo (approssimazione decimale per difetto e approssimazione decimale per eccesso).
Per esercizio costruire un'approssimazione in base 8 anziché in base 10.
Altra cosa da osservare è che ogni numero, nella rappresentazione decimale, ha solo un numero finito di n_k non nulli è un numero razionale. Non è vero il viceversa!! Ad esempio i numeri la cui parte decimale è periodica ($a - [a]$). Si consideri ad esempio il numero

$$a = 1,3232323232\ldots.$$

La parte decimale ha periodo 2. Moltiplico allora per 10^2 (l'esponenete è la lunghezza del periodo) e ottengo

$$10^2 a = 100a = 132,32323232\ldots.$$

Sottraendo a a $100a$ si ottiene

$$99a = 131 \qquad \text{da cui} \qquad a = \frac{131}{99} \,.$$

1.2 Esercizi

Esercizio 1.2.1 Dimostrare che se $x^7, x^{12} \in \mathbb{Q}$, allora anche $x \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 1.2.2 Dimostrare che $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, cioè $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Esercizio 1.2.3 Dimostrare che se $p \in \mathbb{N}$ è un numero primo, allora $\sqrt{p}$ è irrazionale.

Esercizio 1.2.4 Dimostrare che $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ o è intero o è irrazionale.

Esercizio 1.2.5 Dimostrare che se $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, allora

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Esercizio 1.2.6 Dati $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuoti, dimostrare che

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B),$$

$$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$$

E per $A \cap B$ che cosa si può dire, nel caso in cui $A \cap B \neq \emptyset$?

Esercizio 1.2.7 Dimostrare che, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ con $A \neq \emptyset$, allora definendo

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+ : 1/x \in A\}$$

vale

$$\sup B = \begin{cases} \frac{1}{\inf A} & \text{se } \inf A > 0 \\ +\infty & \text{se } \inf A = 0, \end{cases}$$

mentre

$$\inf B = \begin{cases} \frac{1}{\sup A} & \text{se } \sup A < +\infty \\ 0 & \text{se } \sup A = +\infty. \end{cases}$$

Esercizio 1.2.8 Date due sezioni A e B di $\mathbb{R}$ (cioè due insiemi disgiunti la cui unione è tutto $\mathbb{R}$ e $A < B$), dimostrare che ammette un unico elemento separatore. Questo è vero pure in $\mathbb{Q}$?

Esercizio 1.2.9 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \mathbb{N}.$$

Esercizio 1.2.10 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = [0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}.$$

Esercizio 1.2.11 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \left\{ \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Esercizio 1.2.12 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = [3, 7).$$

Esercizio 1.2.13 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = [-3, 3) \cup \{5, 11\}.$$

Esercizio 1.2.14 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Esercizio 1.2.15 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \left\{ \frac{|5-n|}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 1.2.16 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{1+n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 1.2.17 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \{ x \in \mathbb{R}_+ : \cos 1/x = 0 \}.$$

Esercizio 1.2.18 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 1.2.19 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \{ a^n : n \in \mathbb{N}^* \}$$

con $a > 0$.

Esercizio 1.2.20 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \left\{ a^{1/n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

con $a > 0$.

Esercizio 1.2.21 Dimostrare che per l'insieme

$$A = \{ a^\varrho : \varrho \in \mathbb{Q}, \varrho > 0 \},$$

si ha che

$$\inf A = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases}$$

mentre

$$\sup A = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

e non si tratta di massimi o minimi, eccetto nel caso $a = 1$ in cui l'insieme si riduce a $A = \{1\}$.

Esercizio 1.2.22 Determinare sup e inf del seguente insieme, indicando se si tratta di max o min;

$$A = \left\{ \frac{n^2 + m^2}{n - m} : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \right\}.$$

Esercizio 1.2.23 Ripetere gli esercizi dall'8. al 20. cercando estremi superiore, inferiore, massimo e minimo in $\mathbb{Q}$ invece che in $\mathbb{R}$.

1.3 Soluzioni

Soluzione 1.3.1 Se $x^7, x^{12} \in \mathbb{Q}$, allora anche

$$x^5 = \frac{x^{12}}{x^7} \in \mathbb{Q},$$

e quindi pure

$$x^2 = \frac{x^7}{x^5} \in \mathbb{Q},$$

$$x^3 = \frac{x^5}{x^2} \in \mathbb{Q},$$

$$x = \frac{x^3}{x^2} \in \mathbb{Q},$$

che era ciò che si voleva dimostrare.

Soluzione 1.3.2 Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale; possiamo allora scrivere $\sqrt{2} = a/b$, con $a, b \in \mathbb{N}$ e $MCD(a, b) = 1$ (massimo comun divisore pari ad 1, cioè la frazione a/b è ridotta ai minimi termini). Ma allora si ha che $2b^2 = a^2$, cioè a^2 è un numero pari e quindi a deve essere un numero pari $a = 2a_1$. Ma allora $b^2 = 2a_1^2$, e ne segue che pure b deve essere pari, ma ciò contraddice il fatto che $MCD(a, b) = 1$.

Soluzione 1.3.3 Con una piccola variazione dell'esercizio precedente, se fosse $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, sarebbe $\sqrt{p} = a/b$ con $a, b \in \mathbb{N}$ primi tra loro. Ma allora si avrebbe, facendo un'analisi dei fattori primi che compongono i numeri a e b, che nell'espressione

$$pb^2 = a^2,$$

il fattore p comparirebbe un numero dispari di volte nel membro di sinistra, mentre comparirebbe un numero pari di volte in quello di destra. E questo non è possibile.

Soluzione 1.3.4 Se decomponiamo n in fattori primi, abbiamo due possibilità; o tutti i fattori compaiono con una potenza pari (in questo caso n sarà un quadrato perfetto), oppure almeno un fattore compare con potenza dispari. Detto n_1 tale fattore, se fosse $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, avremmo

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Quindi $nq^2 = p^2$, da cui il fattore n_1 comparirebbe con una potenza dispari nel membro di sinistra e con una potenza pari nel membro di destra. Ma ciò non è possibile.

Soluzione 1.3.5 Dato $a \in A$, siccome $a \in B$ allora

$$\inf B \leq a \leq \sup B,$$

cioè il numero $\sup B$ è un maggiorante e $\inf B$ è un minorante per A; dalla definizione di estremo superiore e inferiore ne segue quindi che

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Soluzione 1.3.6 Se $a \in A \cup B$ allora o $a \in A$ e quindi $\inf A \leq a \leq \sup A$, oppure $a \in B$ da cui $\inf B \leq a \leq \sup B$. In definitiva, si ha che

$$\min(\inf A, \inf B) \leq a \leq \max(\sup A, \sup B)$$

da cui il fatto che il numero

$$L = \max(\sup A, \sup B)$$

è un maggiorante per $A \cup B$ e

$$l = \min(\inf A, \inf B)$$

è un minorante. Dimostriamo che $L = \sup A \cup B$; abbiamo due possibilità, o $L = \sup A$ oppure $L = \sup B$. Se $L = \sup A$, allora, per definizione di estremo superiore per A, segue che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $a_\varepsilon \in A$ tale che $L - \varepsilon \leq a_\varepsilon$. Ma dato che $A \subset A \cup B$, allora $a_\varepsilon \in A \cup B$ e quindi abbiamo trovato che per ogni $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ non è più un maggiorante per $A \cup B$ da cui $L = \sup(A \cup B)$. Il ragionamento è analogo nel caso in cui $L = \sup B$ e nella discussione di l. Nel caso di $A \cap B$ con $A \cap B \neq \emptyset$, in generale non c'è nessuna relazione tra gli estremi superiore ed inferiore di A e B con quelli di $A \cap B$. Basti ad esempio pensare agli insiemi

$$A = (-1, 1) \cup (3, 4), \quad B = (-4, -3) \cup (0, 2)$$

in cui $A \cap B = (0, 1)$ da cui

$$\inf(A \cap B) = 0, \quad \sup(A \cap B) = 1,$$

$$\inf A = -1, \sup A = 4, \quad \inf B = -4. \sup B = 2.$$

Soluzione 1.3.7 Supponiamo anzitutto che $\inf A > 0$ e che $\sup A < +\infty$; quindi se $b \in B$, allora $1/b \in A$, da cui

$$\inf A \leq \frac{1}{b} \leq \sup A,$$

da cui

$$\frac{1}{\sup A} \leq b \leq \frac{1}{\inf A},$$

e quindi

$$\frac{1}{\sup A} \leq \inf B \leq \sup B \leq \frac{1}{\inf A}.$$

Analogamente, scambiando i ruoli tra A e B si può vedere che

$$\frac{1}{\sup B} \leq \inf A \leq \sup A \leq \frac{1}{\inf B},$$

e quindi in definitiva

$$\frac{1}{\sup A} = \inf B, \quad \sup B = \frac{1}{\inf A}.$$

Vediamo cosa succede se $\sup A = +\infty$ (la dimostrazione nel caso in cui $\inf A = 0$ sarà analoga). Dire che $\sup A = +\infty$ significa dire che per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste $a \in A$ tale che $a \geq M$, cioè che

$$0 < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{M}.$$

Questo prova quindi, dall'arbitrarietà di M, che $\inf B = 0$, dato che $1/a \in B$.

Soluzione 1.3.8 Dal fatto che $A < B$ (cioè $a < b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$), si ha che ogni elemento b di B è un maggiorante per A, cioè $\sup A \leq b$ per ogni $b \in B$. Quindi $\sup A$ è un minorante per B, cioè $\sup A \leq \inf B$. Dobbiamo dimostrare che $\sup A = \inf B = \alpha$, in modo che α sia l'unico elemento separatore; se così non fosse, si dovrebbe avere $\sup A < \inf B$, e quindi potremmo trovare un elemento $x \in \mathbb{R}$ con $\sup A < x < \inf B$. Ma allora si avrebbe $x \notin A$ e $x \notin B$, ma ciò contraddice il fatto che $\mathbb{R} = A \cup B$.

Soluzione 1.3.9 Si ha chiaramente che $0 \leq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $0 \in \mathbb{N}$, quindi $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$. Inoltre, siccome per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste, per la proprietà Archimedea dei numeri reali applicata alla coppia $(1, n)$, un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq x$, segue subito che $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato, cioè $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Soluzione 1.3.10 Siccome $0 \in A$ e $0 \leq a$ per ogni $a \in A$, si ha che $0 = \inf A = \min A$. Per quanto riguarda l'estremo superiore, siccome

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q < \sqrt{2}\},$$

si ha chiaramente che $\sup A \leq \sqrt{2}$. Inoltre, siccome il numero irrazionale $\sqrt{2}$ può essere approssimato con numeri razionali (cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in A$ tale che $\sqrt{2} - \varepsilon < q < \sqrt{2}$), si ha che $\sup A = \sqrt{2}$.

Soluzione 1.3.11 Siccome $1 - 1/n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, si ha che

$$\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \sqrt{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

cioè $a < \sqrt{3}$ per ogni $a \in A$. Inoltre, siccome per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tale che

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_0},$$

ne segue che $\sqrt{3} = \sup A$. Tale sup non è un min, in quanto per nessun $n \in \mathbb{N}^*$ si ha che $1 - 1/n = 1$. Per quanto riguarda l'inf, siccome $1 - 1/n \geq 0$ con uguaglianza se e solo se $n = 1$, si trova che $\inf A = \min A = 0$.

Soluzione 1.3.12 L'insieme A è dato da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 7\}.$$

È chiaro quindi che 3 è un minorante di A e 7 un maggiorante. Siccome poi $3 \in A$, allora $3 = \min A = \inf A$; invece $7 \notin A$, quindi 7 non è il massimo. Per vedere se esso è l'estremo superiore, dobbiamo verificare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in A$ con $7-\varepsilon < x_\varepsilon$. Basta quindi scegliere ad esempio $x_\varepsilon = 7 - \varepsilon/2$ e (se $\varepsilon \leq 8$) si ha che

$$7 - \varepsilon < x_\varepsilon < 7,$$

e quindi $x_\varepsilon \in A$ e quindi $7 = \sup A$.

Soluzione 1.3.13 Siccome

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 3\} \cup \{5, 11\},$$

abbiamo che -3 è un minorante e 11 è un maggiorante; inoltre $-3, 11 \in A$, quindi $-3 = \min A = \inf A$ e $11 = \max A = \sup A$.

Soluzione 1.3.14 Se poniamo

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{2n},$$

abbiamo che $|a_n| \leq 1/2$ per ogni $\mathbb{N}^*$, cioè

$$-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}.$$

Quindi $1/2$ è un maggiorante e $-1/2$ è un minorante. Inoltre $a_1 = -1/2$ e quindi

$$-\frac{1}{2} = \min A = \inf A.$$

Notanto ora che per n pari $a_n > 0$ e per n dispari $a_n < 0$, per determinare il sup ci concentriamo sugli n pari. Ma se n è pari, possiamo scrivere $n = 2k$ con $k \in \mathbb{N}^*$, e quindi

$$a_n = a_{2k} = \frac{1}{4k} \leq \frac{1}{4}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}^*$. Quindi $1/4$ è un maggiorante e siccome $a_2 = 1/4$, concludiamo che

$$\frac{1}{4} = \max A = \sup A.$$

Soluzione 1.3.15 Possiamo scrivere

$$A = \left\{\frac{5}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, 0\right\} \cup \left\{\frac{n-5}{n+3} : n \in \mathbb{N}, n > 5\right\}.$$

Notando che poi, posto

$$a_n = \frac{|5-n|}{n+3} \geq 0$$

e $a_5 = 0$, se ne ricava che

$$0 = \min A = \inf A.$$

Inoltre per $n > 5$, si ha che

$$a_n = 1 - \frac{8}{n+3} < 1$$

si conclude che

$$\frac{5}{3} = \max A = \sup A.$$

Soluzione 1.3.16 Posto
$$a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2},$$
si ha che $a_n > 0$ per n pari e $a_n < 0$ per n dispari. Inoltre per n dispari $a_n \geq -1/2$ e $a_1 = -1/2$, quindi
$$-\frac{1}{2} = \min A = \inf A.$$
Infine per n pari, $a_n \leq 1$ e $a_0 = 1$, quindi
$$1 = \max A = \sup A.$$

Soluzione 1.3.17 Si noti che
$$A = \left\{ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} \right) : k \in \mathbb{N} \right\}$$
in quanto $\cos 1/x = 0$ se e solo se
$$x = a_k = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k+1} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$
Quindi, siccome $0 < a_k \leq 2/\pi$ e $a_0 = 2/\pi$, si ottiene che
$$\frac{2}{\pi} = \max A = \sup A.$$
Per vedere che $0 = \inf A$, dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un $x_\varepsilon \in A$, cioè un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ con
$$x_\varepsilon = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2k_\varepsilon + 1} \right) < \varepsilon.$$
Ma un tale x_ε lo troviamo se scegliamo k_ε in modo che
$$k_\varepsilon > \frac{1}{\pi\varepsilon} - \frac{1}{2},$$
e quindi
$$0 = \inf A.$$

Soluzione 1.3.18 Notando che $\forall x \in \mathbb{R}$
$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$
e $1 \in A$, si ha subito che
$$1 = \max A = \sup A.$$
Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}$, $1/(1+x^2) > 0$ e quindi $0 \leq \inf A$. Mostriamo che in realtà 0 è l'estremo inferiore. Dobbiamo quindi trovare, per ogni $\varepsilon > 0$ un $a_\varepsilon \in A$ (e quindi un $x_\varepsilon \in R$) tale che
$$a_\varepsilon = \frac{1}{1+x_\varepsilon^2} < \varepsilon.$$

Basta quindi che $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ sia scelto in modo che

$$|x_\varepsilon| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

per concludere che

$$0 = \inf A.$$

Non potrà infine essere un minimo in quanto non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ per il quale $1/(1+x^2) = 0$.

Soluzione 1.3.19 Ci sono tre possibilità; o $a = 1$, o $0 < a < 1$, oppure $a > 1$. Nel primo caso abbiamo che $A = \{1\}$ e quindi

$$1 = \min A = \inf A = \max A = \sup A.$$

Nel caso in cui $a > 1$, notiamo che

$$a^n = aa^{n-1} > a^{n-1} > a > 1, \tag{1.2}$$

e quindi si ha subito che

$$a = \min A = \inf A.$$

Dimostriamo che $\sup A = +\infty$; per dimostrare questo bisogna mostrare che fissato comunque un numero reale $M \in \mathbb{R}$, esiste un elemento $a_M \in A$ tale che $a_M > M$. Bisogna quindi trovare un esponente $n_M \in \mathbb{N}^*$ tale che $a^{n_M} > M$; per far questo, partendo da (1.2), si ricava che

$$\begin{aligned} a^n - a &= a^n - a^{n-1} + a^{n-1} - a \\ &= (a^n - a^{n-1}) + (a^{n-1} - a^{n-2}) + \ldots + (a^2 - a) \\ &= a^{n-1}(a-1) + a^{n-2}(a-1) + \ldots + a(a-1) \\ &> \underbrace{(a-1) + (a-1) + \ldots + (a-1)}_{(n-1)\text{–addendi}} \\ &= (n-1)(a-1) \end{aligned}$$

e quindi

$$a^n > (n-1)(a-1) + a.$$

Per soddisfare la condizione $a^n > M$ basterà quindi prendere

$$n \geq \frac{M-1}{a-1}.$$

Infine, nel caso $0 < a < 1$, si noti che $1/a > 1$ e che

$$a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n},$$

da cui si deduce, grazie all'Esrcizio 1.2.7 che $\inf A = 0$ e non si tratta di un minimo, mentre

$$\sup A = \max A = a.$$

Soluzione 1.3.20 Consideriamo dapprima il caso $a > 1$; notiamo che se $n \leq m$ allora $a^{1/n} \geq a^{1/m}$ e quindi

$$a^{1/n} \leq a, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

e questo prova che

$$\sup A = \max A = a.$$

Inoltre, si può dimostrare che (vedi Esercizio 3.1)

$$a^{1/n} \leq 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Difatti, dato che $a > 1$, anche $a^{1/n}$ deve essere maggiore di 1, e quindi possiamo scrivere

$$a^{1/n} = 1 + h_n,$$

o analogamente

$$a = (1 + h_n)^n.$$

Usando quindi la disuguaglianza (3.1), si ottiene che

$$a \geq 1 + nh_n,$$

da cui $h_n \leq (a-1)/n$, e quindi

$$1 \leq a^{1/n} \leq 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Questo mostra che, siccome per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ con $(a-1)/n < \varepsilon$,

$$1 = \inf A.$$

Nel caso $a \in (0, 1)$, grazie all'Esercizio 1.2.7, si avrà che

$$\sup A = 1, \quad \inf A = a.$$

Soluzione 1.3.21 Iniziamo con il considerare il caso $\varrho \in \mathbb{Q}_+$; notiamo che se $\varrho_1 > \varrho_2$, cioè, scritto $\varrho_1 = p_1/q_1$, $\varrho_2 = p_2/q_2$ ($p_1, p_2, q_1 q_2 \in \mathbb{N}$), se $p_1 q_2 > p_2 q_1$, allora

- se $a < 1$, allora $a^{\varrho_1} < a^{\varrho_2}$ in quanto $a^{p_1 q_2} < a^{p_2 q_1}$;
- se $a > 1$, allora $a^{\varrho_1} > a^{\varrho_2}$ in quanto $a^{p_1 q_2} > a^{p_2 q_1}$.

Quindi, dato che per ogni $\varrho \in \mathbb{Q}_+$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \leq \varrho < n + 1$ se $\varrho > 1$, mentre $1/n \leq \varrho < 1/(n-1)$ se $0 < \varrho < 1$, il risultato dell'esercizio seguirà identicamente da quello dell'esercizio precedente. Infine, se $\varrho \in \mathbb{Q}_-$, avremo che

$$a^{\varrho} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\varrho},$$

e possiamo ancora concludere grazie all'esercizio precedente.

Soluzione 1.3.22 Notiamo che l'insieme

$$A_0 = \{n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset A$$

in quanto basta porre $m = 0$ nell'espressione

$$\frac{n^2 + m^2}{n - m}.$$

Quindi, dato che $\sup A_0 = +\infty$, si ha che pure $\sup A = +\infty$. Inoltre, siccome pure

$$B_0 = \{-m : m \in \mathbb{N}^+\} \subset A,$$

avremo che $\inf A = -\infty$ in quanto $\inf B_0 == \infty$.

Soluzione 1.3.23 I risultati degli esercizi dall'8. al 20. restano gli stessi tranne che;

- negli esercizi 9., 10. e 16. non esiste l'estremo superiore;
- in 19. e 20. bisogna distinguere i casi in cui $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{Q}$. Nel primo caso si ottiene $A \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ e quindi non si hanno estremo inferiore e superiore, mentre nel secondo caso si procede come se fossimo in $\mathbb{R}$.

1.4 La funzione esponenziale

In questa sezione definiamo la funzione esponenziale e dimostriamo le sue principali proprietà.

Definiamo, fissato $a > 1$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ponendo

$$f(x) = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}. \tag{1.3}$$

Vediamo un po' di proprietà della funzione f appena definita; anzitutto, osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}_+$, cioè f è ben definita. Infatti, il fatto che $f(x) > 0$ segue semplicemente dal fatto che per ogni $r \in \mathbb{Q}$ $a^r > 0$, e quindi anche

$$\sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il fatto poi che $f(x) < +\infty$ si dimostra notando che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ con $x \leq n$, e quindi, dato che per ogni $r \in \mathbb{Q}$, $r \leq x$ si ha $r \leq n$ e quindi $a^r \leq a^n$, segue subito che

$$\sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\} \leq a^n.$$

Notiamo poi che se $x \in \mathbb{Q}$, allora $f(x) = a^x$; infatti, dalla monotonia della funzione $\mathbb{Q} \ni r \to a^r$ segue che

$$a^r \leq a^x, \quad \forall r \leq x$$

e quindi

$$\sup\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\} \leq a^x,$$

cioè $f(x) \leq a^x$; notando poi che $a^x \in \{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \leq x\}$ segue quindi che l'estremo superiore è in realtà un massimo e vale $f(x) = a^x$.
Posto

$$g(x) = \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r \geq x\},$$

si ha che $g(x) = f(x)$; infatti, si noti che se $r_1 \leq x \leq r_2$, allora, dalla monotonia di $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$ segue subito che $f(x) \leq g(x)$. Inoltre, grazie all'Esercizio 1.2.21, dato che

$$\inf\{a^r : r \in \mathbb{Q}, r > 0\} = 1,$$

segue che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $r_\varepsilon > 0$ tale che $a^{r_\varepsilon} < 1 + \varepsilon$. Quindi, possiamo prendere per ogni $\varepsilon > 0$ due numeri razionali r_1, r_2 con $r_1 \leq x \leq r_2$ e tali che $r_2 - r_1 \leq r_\varepsilon$; grazie a questo fatto, segue che

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) \leq \varepsilon a^{r_1}, \tag{1.4}$$

e quindi $f(x) = g(x)$.
La funzione f appena definita è monotona crescente; infatti, presi $x < y$, esiste due numeri razionale $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tale che $x \leq r_1 < r_2 \leq y$; grazie alla definizione di f ed al fatto che $f = g$ segue allora che

$$f(x) \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq f(y),$$

da cui la stretta monotonia di f.
La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è suriettiva; per vedere questo si può notare che

$$0 = \inf f, \quad \sup f = +\infty$$

e che grazie a (1.4) f risulta essere una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$ (vedere Esercizio 6.0.7); quindi, grazie al Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue, segue la suriettività di f.
Nel seguito porremo $f(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove per $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si sottointende il procedimento (1.3).

Grazie alle proprietà appena dimostrate, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ è una funzione invertibile in quanto strettamente monotona crescente; definiamo quindi la funzione logaritmo in base a come la funzione inversa di f, cioè la funzione $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definita da

$$\log_a x = f^{-1}(x).$$

Esercizio 1.4.1 Provare a ripetere quanto fatto in questa sezione prendendo $0 < a < 1$.

Capitolo 2

Numeri complessi

Esercizio 2.0.2 Trovare le radici seste del numero complesso

$$w = (\sqrt{3} + i)^9.$$

Esercizio 2.0.3 Risolvere l'equazione $(z - 2)^3 = -i$.

Esercizio 2.0.4 $(\star)$ Risolvere il seguente sistema;

$$\begin{cases} z^2 + z\overline{z} = 1 + 2i \\ \\ (z^2 - 1 + i)(z^2 + 1/i) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2.0.5 Calcolare le soluzioni complesse di

$$|z|^2 - 6z + 1 = 0.$$

Esercizio 2.0.6 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^4 + 6z^2 - 5 = 0.$$

Esercizio 2.0.7 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^4 + 4 = 0.$$

Esercizio 2.0.8 Dato il polinomio

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3,$$

calcolare $p(i)$ e trovare tutte le radici del polinomio.

Esercizio 2.0.9 Calcolare le soluzioni complesse di

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 8i.$$

Esercizio 2.0.10 $(\star)$ Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} z^2\overline{z} - \overline{z}z = -\overline{z} \\ \\ (z^3 + \overline{z})^3 = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2.0.11 Trovare le soluzioni complesse di
$$z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Esercizio 2.0.12 ($\star$) Risolvere il sistema
$$\begin{cases} (\alpha z - \beta\overline{z})(\beta z - \alpha\overline{z}) = 4 \\ \\ z^2 = |z|^2. \end{cases}$$

Esercizio 2.0.13 ($\star$) Risolvere il sistema
$$\begin{cases} z^m = |z|^m \\ \\ z = \dfrac{1+it}{1-it}\overline{z}. \end{cases}$$

Esercizio 2.0.14 Trovare le soluzioni complesse di
$$z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\overline{z} = 0.$$

Esercizio 2.0.15 Dato $w \in \mathbb{C}$, trovare i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che
$$|z - w| = |z + w|.$$

Esercizio 2.0.16 ($\star$) Risolvere il sistema
$$\begin{cases} |z| = |w| \\ \\ z^2 + w^2 = 0 \\ \\ z + w = 1. \end{cases}$$

2.1 Soluzioni

Soluzione 2.1.1 Si tratta di risolvere l'equazione
$$z^6 = w;$$
per fare questo, scriviamo il numero w in coordinate polari; partiamo quindi dal numero complesso
$$w_0 = \sqrt{3} + i.$$
Calcolando modulo e argomento si trova
$$w_0 = 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6).$$
Dalle formule di De Moivre otterremo quindi che
$$w = 2^9 e^{i3\pi/2}.$$
Le radici saranno quindi date dalla formula
$$z_k = 2\sqrt{2}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k),$$
con
$$\theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Soluzione 2.1.2 Facendo la sostituzione $w = z - 2$, si tratta di risolvere l'equazione

$$w^3 = -i;$$

dobbiamo quindi trovare le tre radici cubiche del numero complesso $-i$, che ha mudulo 1 e argomento pari a $3\pi/2$. Quindi le soluzioni saranno

$$w_k = (\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

In definitiva, la soluzione dell'esercizio sarà data dai tre numeri complessi

$$z_k = (2 + \cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Soluzione 2.1.3 La seconda equazione ci da come soluzioni

$$z^2 = 1 - i, \quad z^2 = -\frac{1}{i} = i. \tag{2.1}$$

Vediamo se queste due soluzioni (che diventerebbero quattro passando alle radici quadrate) sono compatibili con la prima equazione. Tenendo presente che $z\overline{z} = |z|^2$ e che $|z|^2 = |z^2|$, dalla prima delle (2.1) si ricava che la prima equazione del sistema diventa

$$1 - i + \sqrt{2} = 1 + 2i,$$

che non è possibile. Dalla seconda delle (2.1), otteniamo

$$i + 1 = 1 + 2i,$$

inammissibile pure questa. Quindi il sistema non ha soluzioni.

Soluzione 2.1.4 Non trattandosi di un polinomio, scriviamo il numero complesso $z = a+ib$, in modo da trovare il sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 6a + 1 = 0 \\ -6b = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzioni i numeri complessi (in realtà reali) $z_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $z_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Soluzione 2.1.5 Trattandosi di un polinomio (biquadratico), usando la formula risolutiva, si ha, ponendo $w = z^2$,

$$w_1 = -3 + \sqrt{14}, \quad w_2 = -3 - \sqrt{14}.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione data saranno quindi le radici quadrate delle due soluzioni date, cioè

$$z_1 = \sqrt{\sqrt{14} - 3}, \quad z_2 = -\sqrt{\sqrt{14} - 3},$$
$$z_3 = i\sqrt{\sqrt{14} + 3}, \quad z_4 = -i\sqrt{\sqrt{14} + 3}.$$

Soluzione 2.1.6 Le soluzioni saranno date dalle quattro radici quarte del numero complesso $w = -4$, e cioè

$$z_k = \sqrt{2}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Soluzione 2.1.7 Notiamo che $p(i) = 0$, quindi, dato che il polinomio ha coefficienti reali, si dovrà avere che anche $-i$ è una radice del polinomio. Avremo quindi che

$$p(z) = (z^2 + 1)q(z),$$

dove $q(z) = z^2 - 4z + 3 = (z-3)(z-1)$ e quindi le radici del polinomio p sono date da i, $-i$, 1 e 3.

Soluzione 2.1.8 Possiamo riscrivere l'equazione nella forma

$$(z + 1)^3 = 8i.$$

Si tratta quindi, posto $w = z + 1$, di trovare le tre radici cubiche del numero complesso $8i$, di modulo 8 e argomento $\pi/2$; avremo quindi che le sue tre radici cubiche sono date da

$$w_k = 2(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2,$$

da cui

$$z_k = (-1 + 2\cos\theta_k + 2i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Soluzione 2.1.9 Notando che il numero $z = 0$ non è soluzione del sistema, possiamo dividere la prima equazione per $\overline{z}$ ed ottenere l'equazione equivalente

$$z^2 - z + 1 = 0,$$

che ha come soluzioni

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Sostituendo questi due valori nella seconda equazione, si trova che il sistema non ha soluzioni.

Soluzione 2.1.10 L'equazione può essere riscritta come

$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4},$$

da cui

$$z_k = -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), \quad \theta_k = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k = 0, 1.$$

Soluzione 2.1.11 Scrivendo $z = a + ib$ la seconda equazione implica che $b = 0$; la prima equazione diventa quindi

$$-(\alpha - \beta)^2 a^2 = 4,$$

che ha le due soluzioni complesse

$$a_{1,2} = \pm\frac{2i}{\alpha - \beta}.$$

Ma dovendo essere a reale, si ricava che il sistema non ha soluzioni.

Soluzione 2.1.12 Scriviamo il numero complesso z nella forma trigonometrica compatta

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}.$$

La prima equazione diventa quindi

$$\rho^m e^{im\theta} = \rho^m,$$

che ha per soluzioni tutti i numeri reali $\rho > 0$ e gli argomenti θ della forma

$$\theta = \frac{2k\pi}{m}.$$

Andando a sostituire nella seconda equazione, troviamo

$$\rho e^{i\theta} = \frac{1+it}{1-it}\rho e^{-i\theta},$$

o equivalentemente

$$e^{2i\theta} = \frac{1+it}{1-it} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2}.$$

Si noti che non ci sono condizioni su ρ. D'altro canto il sistema è omogeneo nella variabile z, cioè se z_0 è una soluzione del sistema, allora pure il numero complesso cz_0 con $c \in R^+$ è soluzione del sistema. Vediamo ora di trovare le soluzioni del nostro sistema. Scrivendo

$$\begin{cases} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\phi, \\ \\ \dfrac{2t}{1+t^2} = \sin\phi, \end{cases}$$

le soluzioni del sistema si hanno quando

$$e^{2i\theta} = e^{i\phi},$$

e cioè quando l'angolo $2\theta - \phi$ è multiplo di 2π,

$$2\theta - \phi = 2h\pi.$$

Mettendo insieme le informazioni ottenute, si ottiene che il sistema ha soluzioni se l'angolo ϕ è della forma

$$\phi = \frac{4k\pi}{m} - 2h\phi,$$

che tradotto in condizioni sul parametro t diventa

$$t = \tan\phi/2 = \tan\left(\frac{2k\pi}{m}\right).$$

Soluzione 2.1.13 Notiamo anzitutto che $z = 0$ è soluzione dell'equazione data. Cerchiamo quindi le soluzioni non nulle; moltiplicando l'equazione per z otteniamo

$$z^2|z|^2 - (1+4\sqrt{3})i|z|^2 = 0,$$

o equivalentemente, dato che $z \neq 0$,

$$z^2 - (1 + 4\sqrt{3})i = 0.$$

Quindi avremo due soluzioni non nulle, che altro non sono che le due radici del numero complesso $(1 + 4\sqrt{3})i$, e cioè

$$z_1 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(1 + i),$$

$$z_2 = \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}(\cos 5\pi/4 + i \sin 5\pi/4) = \sqrt{\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}}(-1 - i).$$

Soluzione 2.1.14 Scrivendo $w = a + ib$ e $z = x + iy$, l'equazione è equivalente all'equazione nelle due incognite reali $x, y \in \mathbb{R}$ (essendo una equazione in due incognite in generale non ci possiamo aspettare una sola soluzione)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2$$

che ha per soluzione il luogo di punti descritto dall'equazione

$$by = -ax$$

che descrive una retta nel piano Oxy. Si poteva arrivare a tale risultato interpretando geometricamente l'equazione data; la quantità $|z - w|$ indica la distanza di z da w, mentre $|z + w|$ rappresenta la distanza di z da $-w$. Quindi le soluzioni dell'equazione saranno esattamente i punti equidistanti da w e $-w$, cioè l'asse del segmento che congiunge w con $-w$. Infatti, indicando sempre con $w = a + ib$, la retta del piano cartesiano passante per w e $-w$ è descritta dall'equazione

$$ay - bx = 0.$$

Tale retta passa per l'origine e ha come retta ortogonale passante per l'origine la retta di equazione

$$by + ax = 0;$$

questa retta descrive esattemente il luogo dei punti equidistanti da w e $-w$, e quindi è l'insieme delle soluzioni dell'equazione data.

Soluzione 2.1.15 Scrivendo il sistema con $z = a + ib$ e $w = c + id$, si trovano le soluzioni

$$z = \frac{1}{2}(1 + i), \quad w = \frac{1}{2}(1 - i)$$

$$z = \frac{1}{2}(1 - i), \quad w = \frac{1}{2}(1 + i).$$

Capitolo 3

Principio di Induzione

Esercizio 3.0.1 Dimostrare che, fissato $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, vale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la seguente formula

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Esercizio 3.0.2 [Disuguaglianza di Bernoulli] Dimostrare che, fissato $h > -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh. \tag{3.1}$$

Esercizio 3.0.3 Dimostrare che, fissato $h > 0$ e per ogni $n \geq 1$ naturale,

$$(1 + h)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)h^2}{2}.$$

Esercizio 3.0.4 Verificare le seguenti identità:

i)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

ii)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

iii)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

iv) ($\star$) Indicato con

$$N_h(n) = \sum_{k=1}^{n} k^h,$$

dimostrare che

$$N_h(n) = \frac{1}{h+1}\left((n+1)^{h+1} - 1 - \sum_{i=0}^{h-1}\binom{h+1}{i} N_i(n)\right).$$

v) $(\star)$

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha + k\beta) = \frac{n}{2}(\beta n + 2\alpha + \beta);$$

vi) $(\star)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)\sqrt{k}}.$$

Esercizio 3.0.5 Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

i) $2^n \leq n!$

ii) $(2n)! \geq 2^n (n!)^2$

iii) $n^2 \leq 2^n, \forall n \geq 4$

iv) $2^n + 4^n \leq 5^n, \forall n \geq 2$

v) $n^n > 2^n n!, \forall n \geq 4$

vi) $(\star)$ $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=0}^{n} x_k^2, \forall (x_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$

vii) $(\star)$ $y^n - x^n \leq (y+x)^{n-1}(y-x), \forall 0 \leq x \leq y, n \geq 1$

viii) $(\star)$ $(2n)! \leq 2^n n^n n!$

ix) $(\star)$ $(1-x)^n \leq \dfrac{1}{1+nx}, \forall x \in (0,1)$

x) $(\star)$ $((n+1)!)^n \leq \prod_{k=0}^{n}(2k)!$

xi) $(\star)$ $(2n)! \leq 2n^{2n}$

xii) $(\star)$ $2n \leq 2^n$

Esercizio 3.0.6 Data la successione dei numeri di Fibonacci

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

dimostrare che

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Esercizio 3.0.7 Dimostrare la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{3.2}$$

Esercizio 3.0.8 ($\star$) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}.$$

Esercizio 3.0.9 ($\star$) Dimostrare che dati comunque n numeri reali positivi

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

tali che $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$, allora

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1$$

e l'uguaglianza vale se e solo se gli n numeri x_i sono tutti uguali ($x_i = 1$ per ogni $i = 1, \ldots n$). Ricavarne come corollario che se si prendono n numeri reali positivi, allora la media geometrica è più piccola della media artimetica, cioè se $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, allora

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \tag{3.3}$$

Esercizio 3.0.10 Dimostrare che $\forall h \geq 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

usando prima la formula del binomio di Newton (3.2), poi la (3.3). Rendersi conto che in generale vale

$$(1+h)^n \geq 1 + \binom{n}{k} h^k.$$

3.1 Soluzioni

Soluzione 3.1.1 La dimostrazione può essere fatta in due differenti modi; o dimostrando direttamente la formula oppure procedendo per induzione. La dimostrazione diretta procede come segue;

$$\begin{aligned}
1 + x + x^2 + \ldots + x^n &= \frac{(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1-x)}{1-x} \\
&= \frac{1 + x + \ldots + x^n - x - x^2 + \ldots x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.
\end{aligned}$$

Per la dimostrazione per induzione, la formula è chiaramente vera per $n = 0$; supposta vera per n, vediamo se questo implica la formula per $n + 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.\end{aligned}$$

Soluzione 3.1.2 La formula è chiaramente vera per $n = 0$. Vediamo il passo induttivo;

$$\begin{aligned}(1 + h)^{n+1} &= (1 + h)^n (1 + h) \geq (1 + nh)(1 + h) \\ &= 1 + nh + h + \underbrace{nh^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n + 1)h.\end{aligned}$$

Soluzione 3.1.3 Per $n = 1$ la formula è vera in quanto h è positivo. Per il passo induttivo, bisogna dimostrare che

$$(1 + h)^{n+1} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}\left(h^2 + h^3\right) + h \geq 1 + \frac{(n+1)n)}{2} h^2.$$

L'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che

$$h\left(\frac{n(n-1)}{2} h^2 - nh + 1\right) \geq 0,$$

essendo h e il membro all'interno delle parentesi positivi. Tale membro è infatti un polinomio di secondo grado in h con discriminante

$$\Delta = 2n - n^2.$$

Tale discriminante è definitivamente negativo per $n > 2$, quindi il polinomio sarà sempre positivo per $n > 2$; da qui segue il passo induttivo.

Soluzione 3.1.4 Nel punto i), per $n = 1$ la formula si riduce a

$$1 = 1,$$

chiaramente vera. Per il passo induttivo abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Nel punto ii), per $n = 1$ la formula è chiaramente vera. Passo induttivo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n + 1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n + 1)^2 \\ &= (n + 1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n + 1)\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

che è la formula desiderata.

In iii), per $n = 1$ la formula è ovvia. Per il passo induttivo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1) \right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda iv), notiamo che

$$(k+1)^{h+1} = \sum_{i=0}^{h+1} \binom{h+1}{i} k^i = k^{h+1} + hk^h + \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h+1}{i} k^i.$$

Quindi

$$hk^h = (k+1)^{h+1} - k^{h+1} - \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h+1}{i} k^i$$

da cui

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} hk^h &= \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{h+1} - k^{h+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h+1}{i} k^i \\ &= (n+1)^{h+1} - 1 - \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h+1}{i} \sum_{k=1}^{n} k^i.\end{aligned}$$

Abbiamo quindi scritto che

$$hN_h(n) = (n+1)^{h+1} - 1 - \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h+1}{i} N_i(n),$$

che è quanto volevamo dimostrare.

In v), si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (\alpha + k\beta) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha + \sum_{k=1}^{n} \beta k = n\alpha + \beta \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n}{2}(\beta n + 2\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Nel caso vi), per $n = 1$ la formula si riduce a

$$\sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 1,$$

chiaramente vera. Per il passo induttivo abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} + \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\sqrt{k}} \\
&\quad + \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} - 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)\sqrt{k}} + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} - 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)\sqrt{k}}.
\end{aligned}$$

Soluzione 3.1.5 Vediamo i);

$$2^{n+1} = 22^n \leq 2n! \leq (n+1)!$$

dove l'ultima disuguaglianza segue per $n \geq 1$. Per quanto riguarda la base chiaramente $2 = 2!$. Per il punto ii),

$$\begin{aligned}
(2(n+1))! &= (2n+2)(2n+1)(2n)! \geq 2(n+1)(2n+1)2^n(n!)^2 \\
&\geq 2^{n+1}(n+1)(n+1)(n!)^2
\end{aligned}$$

in quanto $2n+1 \geq n+1$. Quindi il passo induttivo. La base induttiva è chiaramente vera per $n = 1$. Per il punto iii),

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1.$$

Quindi il passo induttivo è vero se verifichiamo che

$$2n + 1 \leq 2^n,$$

e questa si dimostra per induzione essere vera se $n \geq 4$. La base, fatta per $n = 4$, si riduce a $4^2 = 2^4$. Per la iv),

$$2^{n+1} + 4^{n+1} = 22^n + 44^n \leq 4(2^n + 4^n) \leq 45^n \leq 5^{n+1}.$$

Per la base, la proprietà è falsa per $n = 0, 1$, mentre è vera per $n = 2$. Quindi è vera per $n \geq 2$. Per la v),

$$(n+1)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n n^n(n+1) > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 2^n n!(n+1) > 22^n(n+1)!$$

che è la disuguaglianza desiderata. Per la base, è chiaramente vera per $n = 4$, mentre è falsa per $n = 1, 2, 3$, quindi la proprietà è vera per $n \geq 4$. Per il punto vi),

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n+1} x_k\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 + x_{n+1}^2 + 2x_{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k \\
&\leq n\sum_{k=0}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 + \sum_{k=0}^{n} 2x_{n+1}x_k \\
&\leq n\sum_{k=0}^{n} x_k^2 + x_{n+1}^2 + \sum_{k=0}^{n}(x_{n+1}^2 + x_k^2) = \sum_{k=0}^{n+1} x_k^2,
\end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio segue dalla disuguaglianza $2ab \leq a^2 + b^2$. Per dimostrare vii), notiamo che per come sono stati presi x e y, si ha che $xy, y^n - x^n \geq 0$ per ogni $n \geq 0$, quindi vale

$$y^{n+1} - x^{n+1} \leq y^{n+1} - x^{n+1} + xy(y^{n-1} - x^{n-1}) = (y + x)(y^n - x^n)$$

da cui, per ipostesi induttiva

$$y^{n+1} - x^{n+1} \leq (y + x)(y + x)^{n-1}(y - x) = (y + x)^n(y - x).$$

Infine, per $n = 1$ la disuguaglianza è facilmente verificata, quindi è dimostrato. Per il punto viii),

$$(2(n + 1))! = 2(n + 1)(2n + 1)(2n)! \leq 2^{n+1}(n + 1)!(2n + 1)n^n.$$

Quindi la disuguaglianza segue se dimostriamo che

$$(2n + 1)n^n \leq (n + 1)^{n+1},$$

o equivalentemente, se

$$2 - \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

disuguaglianza sempre vera. La base è poi chiaramente vera per $n = 1$. Per il punto ix), abbiamo

$$(1 - x)^{n+1} = (1 - x)(1 - x)^n \leq \frac{1 - x}{1 + nx}.$$

Bisogna quindi dimostrare che

$$\frac{1 - x}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + (n + 1)x},$$

o equivalentemente

$$(1 - x)(1 + (n + 1)x) \leq 1 + nx.$$

Ma questa è chiaramente verificata. Per la base, è facilmente verificata per $n = 0$. Per il punto x), si ha

$$\begin{aligned}
((n + 2)!)^{n+1} &= (n + 2)!(n + 2)^n((n + 1)!)^n \\
&\leq (n + 2)!(n + 2)^n \prod_{k=0}^{n}(2k)! \\
&= \frac{(n + 2)^n}{(n + 3)\dots(2n + 2)} \prod_{k=0}^{n+1}(2k)!
\end{aligned}$$

e l'asserto segue in quanto
$$\frac{(n+2)^n}{(n+3)\dots(2n+2)} \leq 1.$$
La base è poi chiaramente vera per $n=0$. Per il punto xi),
$$\begin{aligned}(2(n+1))! &= 2(n+1)(2n+1)(2n)! \leq 2(n+1)(2n+1)2n^{2n} \\ &= 4\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}(n+1)^{2(n+1)},\end{aligned}$$
e quindi l'asserto segue in quanto
$$2\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} \leq 1.$$
La base induttiva poi è immediata. Per l'ultimo punto xxii) si ha
$$2(n+1) = 2n+2 \leq 2^n + 2 \leq 2^{n+1}$$
in quanto $2 \leq 2^n$ se $n \geq 0$. Per $n=0$, ci si riduce a verificare che $0 \leq 1$, sempre vera.

Soluzione 3.1.6 Verifichiamo il passo induttivo:
$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\end{aligned}$$
e l'asserto segue notando che
$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$
La base dell'induzione è immediata.

Soluzione 3.1.7 Vediamo anzitutto il passo induttivo; supponiamo quindi che la formula del binomio di Newton sia vera al passo n e dimostriamo la formula per $(n+1)$, cioè mostriamo che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Tenendo presente che

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1},$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

otteniamo che

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k \\
&\quad + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Per la base dell'induzione, basta notare che

$$(a+b)^0 = 1.$$

Soluzione 3.1.8 Abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n 2^{n-1}$$

per la formula del binomio di Newton.

Soluzione 3.1.9 Per quanto riguarda la base induttiva, abbiamo che se

$$x_1 + x_2 = 2,$$

allora

$$x_1 \cdot x_2 = x_1(2 - x_1) \leq 1,$$

in quanto la precedente disuguaglianza è equivalente a richiedere che $(x_1 - 1)^2 \geq 0$, che è sempre vera. Per il passo induttivo, se $x_1 + \ldots + x_{n+1} = n+1$, allora abbiamo due possibilità; o tutti i numeri sono uguali a 1 (e quindi non abbiamo niente da dimostrare), oppure ce ne è almeno uno più grande di 1 e di conseguenza almeno uno minore di 1. Possiamo supporre che si trattino del primo e del secondo numero, cioè $x_1 = 1 + a$ e $x_2 = 1 - b$ con $a, b \in (0, 1)$. Otteniamo quindi che

$$1 + a + 1 - b + x_3 + \ldots + x_{n+1} = n + 1,$$

o equivalentemente

$$(1 + a - b) + x_3 + \ldots + x_{n+1} = n.$$

Possiamo applicare quindi l'ipotesi induttiva agli n numeri

$$(1 + a - b), x_3, \ldots, x_{n+1}$$

ed ottenere che

$$(1 + a - b) \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} \leq 1.$$

A questo punto la dimostrazione segue in quanto

$$x_1 \cdot x_2 = 1 + a - b - ab \leq 1 + a - b.$$

Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, chiamata M la media aritmetica, abbiamo che

$$M = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

e quindi possiamo applicare il passo precedente sostituendo i numeri x_i con $y_i = x_i/M$.

Soluzione 3.1.10 La dimostrazione usando il binomio di Newton è immediata in quanto i primi due termini del binomio sono proprio 1 e nh, e il resto è una quantità positiva. Per la seconda parte si considerino gli n numeri

$$x_i = 1, \quad i = 1, \ldots, n-1, \qquad x_n = 1 + nh;$$

applicando la formula (3.3), si ottiene quanto desiderato.

Capitolo 4

Successioni Numeriche

4.1 Il Numero di Nepero e

Si consideri $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, e si dimostri che la successione

$$\alpha_n(x) = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n$$

è definitivamente strettamente crescente (suggerimento: usare la disuguaglianza delle medie (3.3). Si studino poi in particolare le due successioni $\alpha_n(1)$ e $\alpha_n(-1)$. È sufficiente considerare $n+1$ numeri $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ definiti da

$$x_1 = \cdots = x_n = 1 + \frac{x}{n}\,,\ x_{n+1} = 1\,.$$

Poiché la media geometrica di k numeri positivi è minore della loro media aritmetica, se $1 + \frac{x}{n} > 0$, e cioè $n > -x$, scrivendo le due medie per $x_1, \ldots x_{n+1}$ si ottiene

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big) \cdot \cdots \cdot \Big(1 + \frac{x}{n}\Big) \cdot 1 < \frac{1}{n+1}\Big(1 + \frac{x}{n} + \cdots + 1 + \frac{x}{n} + 1\Big)$$

e cioè

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n < \Big(1 + \frac{x}{n+1}\Big)^{n+1}\,.$$

Si noti che la disguaglianza è stretta perché $x_1, \ldots x_{n+1}$ non sono tutti uguali. Concludendo: a_n è crescente per ogni $x > 0$ ed è definitivamente crescente per ogni $x < 0$ (crescente per $n > -x$).
Si considerino ora due casi particolari: $x = 1$ e $x = -1$. Si ottiene allora che le due successioni $\alpha_n(1) = (1 + \frac{1}{n})^n$ e $\alpha_n(-1) = (1 - \frac{1}{n})^n$ sono crescenti e quindi

$$\alpha_n(1) = a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \text{ crescente}\,,$$
$$\frac{1}{\alpha_n(-1)} = b_n = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{-n} \text{ decrescente}\,.$$

Di conseguenza esistono $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Vediamo che vale $a_n \leq b_k$ per ogni $n, k \in \mathbb{N}$. Infatti, supponendo che $n \leq k$, si ha dalla monotonia di a_n

$$a_n \frac{1}{b_k} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n \Big(\frac{k-1}{k}\Big)^k \leq \Big(\frac{k+1}{k}\Big)^k \Big(\frac{k-1}{k}\Big)^k = \Big(\frac{k^2-1}{k^2}\Big)^k < 1$$

e quindi $a_n < b_k$. Analogamente si prova la disuguaglianza nel caso in cui $n \geq k$. Da ciò in particolare concludiamo che $A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ è limitato superiormente (dai b_k) e $B = \{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ è limitato inferiormente (dagli a_n). Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$ esistono *finiti*. Inoltre sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Si pone

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Tale numero è compreso tra 2 e 3 (infatti $a_1 < e < b_6$ e $a_1 = 2$ e b_6 è circa $2,98$). Vediamo quant'è il limite di b_n:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato due sucessioni, una crescente ed una decrescente, convergenti allo stesso limite e.
Tornando a $\alpha_n(1) = a_n$ e $\alpha_n(-1) = b_n^{-1}$ possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}\,.$$

Per esercizio dimostrare che, se a_n è una successione con limite $+\infty$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e\,.$$

Dedurne che in generale vale, dato $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = e^x$$

con $(1 + \frac{x}{n})^n$ monotona crescente e $(1 - \frac{x}{n})^{-n}$ monotona decrescente.
Infine, applicando la disuguaglianza (3.3) dell'Esercizio 3.0.9 prima con $h = x/n$ poi con $h = -x/n$ si ottengono le disuguaglianze

$$1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1-x}\,,$$

cioè in particolare

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}\,. \tag{4.1}$$

4.2 Osservazioni sul numero di Nepero

Supponiamo che un capitale C venga investito per un anno. È più conveniente ricevere un interesse j dopo un anno oppure un interesse $j/2$ ogni sei mesi?

Soluzione:
Dopo un anno si ha che il capitale è $C+jC = C(1+j)$ se l'interesse viene dato tutto assieme dopo un anno. Se invece dopo sei mesi si ottiene un interesse di $j/2$ si ha alla scadenza dei sei mesi un capitale pari a

$$C + \frac{j}{2}C = C(1 + j/2)$$

e dopo altri sei mesi

$$[C(1 + j/2)] + [C(1 + j/2)]j/2 = C\Big(1 + \frac{j}{2}\Big)^2 .$$

Si vede facilmente che $1 + j < (1 + j/2)^2$. Se l'interesse maturato venisse pagato, e quindi reinvestito assieme al capitale iniziale, ogni mese si otterrebbe a fine anno

$$C\Big(1 + \frac{j}{12}\Big)^{12} .$$

Analogamente, se l'interesse venisse pagato giornalmente, reinvestendo dopo un anno si avrebbe

$$C\Big(1 + \frac{j}{365}\Big)^{365} .$$

Se l'accredito fosse *istantaneo*, il capitale maturerebbe diventando dopo un anno

$$Ce^j .$$

4.3 Esercizi

Esercizio 4.3.1 Data una successione numerica $(a_n)_n$ con

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

dimostrare i seguenti limiti notevoli:

i)

$$\lim_{n\to+\infty} \sin a_n = 0;$$

ii)

$$\lim_{n\to+\infty} \cos a_n = 1;$$

iii)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Esercizio 4.3.2 Fissato $a \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della successione

$$a_n = a^n.$$

Esercizio 4.3.3 Sfruttando il fatto che, dato $h > 0$ numero reale, vale la relazione

$$(1+h)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Esercizio 4.3.4 Dimostrare che per $|a| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} na^n = 0.$$

Esercizio 4.3.5 $(\star)$ Sia $(a_n)_n$ una successione tale che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L;$$

dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |L|.$$

Quando è vera pure l'implicazione inversa?

Esercizio 4.3.6 Calcolare i limiti $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}$ con $a > 1$.

Esercizio 4.3.7 Studiare la convergenza delle seguenti successioni:

i) $\displaystyle a_n = \frac{n^2}{n^2+1};$

ii) $\displaystyle a_n = \frac{n!}{n^n};$

iii) $\displaystyle a_n = \frac{\alpha^n}{n!}, \quad \alpha > 0;$

iv) $a_n = n - \sqrt{n^2+n};$

v) $\displaystyle a_n = \frac{3n^2-2n+1}{n-n^2};$

vi) $\displaystyle a_n = \frac{2n-5n^3-2}{n^2+1};$

vii) $\displaystyle a_n = \frac{4n+2/n}{1/n^2+5n};$

viii) $a_n = n \arctan n - \sqrt{n};$

ix) $\displaystyle a_n = \frac{n\sqrt{n}-n^2}{n+1};$

x) $\displaystyle a_n = \frac{2^n+1}{3^n+1};$

xi) $\quad a_n = \dfrac{3\sqrt{n}-1}{2\sqrt{n}+\arctan n};$

xii) $\quad a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+2}{n^2+1}};$

xiii) $\quad a_n = \sqrt{n^2+2n+1} - \sqrt{n^2+2};$

xiv) $(\star)$ $\quad a_n = \left(1+\dfrac{1}{n!}\right)^n;$

xv) $(\star)$ $\quad a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^n}\right)^{n!};$

xvi) $(\star)$ $\quad a_n = \dfrac{n^p}{\alpha^n}, \quad \alpha > 0, p \in \mathbb{N};$

xvii) $(\star)$ $\quad a_n = -2^{\sqrt{n}};$

xviii) $(\star)$ $\quad a_n = \dfrac{n^{n/2}}{n!};$

xix) $(\star)$ $\quad a_n = \dfrac{n+1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}.$

Esercizio 4.3.8 Calcolare i seguenti limiti

i)
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right].$$

ii)
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right].$$

iii)
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right].$$

Esercizio 4.3.9 Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+7^n}$.

Esercizio 4.3.10 $(\star)$ Definita per ricorrenza la successione

$$a_0 \geq 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4},$$

studiarne la convergenza in funzione del parametro a_0.

Esercizio 4.3.11 $(\star)$ Dimostrare che;

i) fissato $a \in (0, \pi)$ e posto

$$b = a + \sin a,$$

vale ancora che $0 < b < \pi$ (si usi il fatto che $\sin x = \sin(\pi - x)$);

ii) definita per ricorrenza la seguente successione numerica, con punto iniziale $a_0 \in (0, \pi)$;

$$a_{n+1} = a_n + \sin a_n,$$

essa è una successione monotona crescente contenuta nell'intervallo $(0, \pi)$;

iii)

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \pi.$$

Esercizio 4.3.12 Studiare la convergenza delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

i) $a_0 = k$, $a_{n+1} = a_n^2$ per $n \geq 0$;

ii) $a_0 = k$, $a_{n+1} = ha_n^2$ per $n \geq 0$;

(Sugg: Provare a scrivere il termine generale della successione).

Esercizio 4.3.13 ($\star$) Definita per ricorrenza la successione

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2,$$

dimostrare che la successione è costante per $a = 1$, mentre è crescente per $a \neq 1$. Dedurne quindi che se $a < 1$, allora la successione converge a 1, mentre se $a > 1$ essa diverge a $+\infty$.

Esercizio 4.3.14 ($\star$) Definita per ricorrenza la successione

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2,$$

dimostrare che:

i) se

$$\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}},$$

allora la successione è definitivamente uguale a 2;

ii) se

$$\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

allora la successione è definitivamente pari a -1;

iii) se

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

allora la successione è periodica di periodo 2.

Esercizio 4.3.15 Data una successione $(a_n)_n$, supposto che

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda,$$

dimostrare che:

i) se $\lambda < 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0;$$

ii) se $\lambda > 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty.$$

Cosa succede invece nel caso in cui sia $\lambda = 1$?

Esercizio 4.3.16 ($\star$) Dato un numero reale positivo $B > 0$, dimostrare che:

i) fissato un numero reale $a > 0$, il numero reale

$$b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{B}{a}\right)$$

è sempre un numero reale positivo maggiore di $\sqrt{B}$;

ii) definita per ricorrenza la successione

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{B}{x_n}\right)$$

con punto iniziale un qualsiasi $x_0 > 0$, tale successione è decrescente e maggiore di $\sqrt{B}$;

iii) la successione definita al punto precedente è convergente con limite uguale a $\sqrt{B}$.

Esercizio 4.3.17 Mostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1$$

4.4 Soluzioni

Soluzione 4.4.1 Per dimostrare questi fatti, tutto quello che bisogna sapere è che per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, valgono le seguenti disuguaglianze

$$|\sin x| \le |x| \le |\tan x|. \tag{4.2}$$

Dalla prima segue immediatamente la i); per la ii) si sfrutta l'identità

$$\sin^2 a_n + \cos^2 a_n = 1,$$

e il fatto che per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ il coseno è positivo. Per quanto riguarda la iii), dalla (4.2), se $a_n > 0$ si ha

$$0 < \sin a_n \le a_n \le \tan a_n,$$

da cui
$$1 \leq \frac{a_n}{\sin a_n} \leq \frac{1}{\cos a_n}$$
e l'asserto segue per il punto ii). Se invece $a_n < 0$, pure $\sin a_n$ e $\tan a_n$ sono negativi, e la (4.2) diventa
$$0 > \sin a_n \geq a_n \geq \tan a_n,$$
da cui
$$1 \leq \frac{a_n}{\sin a_n} \leq \frac{1}{\cos a_n}.$$

Soluzione 4.4.2 Dividiamo la discussione in vari casi; se $a > 1$, otteniamo
$$a^{n+1} - a^n = a^n(a-1) > (a-1),$$
da cui $a^n - 1 > n(a-1)$. Quindi la distanza del numero a^n da 1 aumenta sempre di più, e siccome, fissato un qualunque numero $M > 0$, essendo $a > 1$, esisterà un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che
$$n(a-1) > M, \quad \forall n \geq n_0.$$
E quindi
$$a^n > M + 1, \quad \forall n \geq n_0,$$
e quindi la successione diverge a $+\infty$. Per $0 < a < 1$, possiamo scrivere
$$a = \frac{1}{b}, \quad b > 1,$$
da cui otteniamo che la successione converge a 0. Per $-1 < a < 0$ si scrive $a = -b$ con $0 < b < 1$ e si ottiene ancora che la successione converge a 0. Per $a \leq -1$ si ottiene una successione a termini di segno alterno con $|a^{n+1} - a^n| \geq 2$, e quindi la successione non può essere di Cauchy e quindi non può convergere. Infine, per $a = 1$, la successione è costantemente uguale a 1, quindi converge a 1.

Soluzione 4.4.3 Siccome $n \geq 1$ è un numero intero, allora pure la sua radice n–esima sarà un numero maggiore di 1, cioè potremo scrivere
$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$$
dove gli $h_n > 0$ sono numeri reali positivi. Dalla disuguaglianza data, otteniamo quindi, elevando alla n,
$$n = (1 + h_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2,$$
o equivalentemente
$$h_n^2 \leq \frac{2}{n}.$$
Abbiamo quindi che
$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0,$$
da cui $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Soluzione 4.4.4 Cominciamo con l'osservare che, se indichiamo con $a_n = na^n$, allora abbiamo che
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \frac{n+1}{n}a.$$
Quindi
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |a| < 1.$$
Questo vuol dire che, fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esisterà un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$
$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = |a| + \varepsilon,$$
e cioè
$$|a_n| < (|a|+\varepsilon)|a_{n-1}| < (|a|+\varepsilon)^2|a_{n-2}| < (|a|+\varepsilon)^{n-1}|a|.$$
Ma se ε è stato scelto in modo che $|a| + \varepsilon < 1$ (cioè se $\varepsilon < 1 - |a|$), allora abbiamo trovato che, posto $\lambda_\varepsilon = |a| + \varepsilon$,
$$|a_n| < \lambda_\varepsilon^{n-1}|a| \to 0.$$

Soluzione 4.4.5 L'implicazione segue dalla disuguaglianza triangolare
$$||a| - |b|| \leq |a+b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$
Infatti
$$||a_n| - |L|| = ||a_n| - |-L|| \leq |a_n + (-L)| = |a_n - L| \to 0.$$
È facile convincersi che il viceversa non è vero; basta considerare la successione $a_n = (-1)^n$ che in valore assoluto converge a 1 (è sempre uguale a 1), mentre essa non converge essendo indeterminata.

Tuttavia ci sono alcuni casi in cui l'implicazione inversa vale; ad esempio, se $L = 0$, come segue immediatamente dalle definizioni di limite. Inoltre, anche se $L \neq 0$ e la successione ha definitivamente lo stesso segno di L. Difatti, indicata con $\mathrm{sgn}(x)$ la funzione segno del numero reale x, cioè la funzione che vale 1 se $x > 0$, 0 se $x = 0$ e -1 se $x < 0$, si ha chiaramente che $|x| = x \cdot \mathrm{sgn}(x)$; quindi dire che la successione ha definitivamente lo stesso segno di L significa dire che esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathrm{sgn}(a_n) = \mathrm{sgn}(L)$ per ogni $n \geq n_0$. Quindi per ogni $n \geq n_0$
$$\begin{aligned} ||a_n| - |L|| &= |a_n \cdot \mathrm{sgn}(a_n) - L \cdot \mathrm{sgn}(L)| = |a_n \cdot \mathrm{sgn}(L) - L \cdot \mathrm{sgn}(L)| \\ &= |\mathrm{sgn}(L)| \cdot |a_n - L| = |a_n - L| \end{aligned}$$
in quanto $|\mathrm{sgn}(L)| = 1$.

Soluzione 4.4.6 La successione
$$a_n = \frac{\ln n}{n}$$
è positiva e monotona decrescente per $n \geq 3$, in quanto
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n(n+1)} \ln \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} \ln\left(\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &< \frac{1}{n(n+1)} \ln \frac{e}{n}. \end{aligned}$$

Siccome l'argomento del logaritmo è definitivamente minore di 1, si ottiene

$$a_{n+1} - a_n < 0.$$

Abbiamo quindi una successione positiva e monotona decrescente: essa ammette quindi limite $L \geq 0$. Osserviamo inoltre che

$$a_{n^2} = \frac{2}{n} a_n,$$

da cui

$$L = \lim_{n \to +\infty} a_{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} a_n = \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} \right) \left(\lim_{n \to +\infty} a_n \right) = 0 \cdot L,$$

cioè $L = 0$. Si osservi che in maniera analoga si dimostra che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^q} = 0$$

per ogni $p, q \in \mathbb{R}$, $q > 0$.
In maniera analoga si mostra che $a^n/n \to +\infty$ se $a > 1$. Denotata $a_n = a^n/n$ è facile mostrare la crescenza ed è sufficiente considerare questa volta $a_{2n} = a_n a^n/2$ per trovare il limite.

Soluzione 4.4.7 Verifichiamo il punto i); possiamo scrivere

$$a_n = 1 - \frac{1}{n^2},$$

quindi sembra abbastanza intuitivo supporre che $a_n \to 1$. Facciamo la verifica usando la definizione di limite; dobbiamo trovare, per ogni fissato $\varepsilon > 0$ un numero $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$ si abbia

$$|a_n - 1| < \varepsilon.$$

Siccome la condizione diventa

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon,$$

è chiaro che basta prendere $n \geq 1/\sqrt{\varepsilon}$, o come n_0 ad esempio il numero $[1/\sqrt{\varepsilon}] + 1$ (qui $[a]$ è la parte intera inferiore del numero reale a).

Per quanto riguarda il punto ii), notiamo che

$$0 \leq a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n}}_{\leq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n}$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

da cui si ricava che il limite è 0.

Per iii), se $\alpha < 1$, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\lim_{n \to \infty} \alpha^n}{\lim_{n \to \infty} n!} = \frac{0}{\infty} = 0.$$

Se poi è $\alpha = 1$, allora il limite è ancora facilmente uguale a 0. Resta da vedere il caso $\alpha > 1$; indichiamo con $m = [\alpha] \geq 1$ la parte intera del numero α e notiamo che per ogni $n \geq m+1$,

$$\frac{\alpha}{n} < 1, \tag{4.3}$$

mentre per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\alpha}{n} \leq \alpha. \tag{4.4}$$

Quindi riscriviamo, per $n > m + 1$ (m è un numero intero determinato una volta scelto α mentre n può essere preso arbitrariamente grande in quanto si sta facendo il limite per $n \to \infty$) il termine generale della successione come

$$0 \leq \frac{\alpha^n}{n!} = \underbrace{\frac{\alpha}{1}}_{\leq\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{2}}_{\leq\alpha} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{\leq\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{m+1}}_{\leq 1} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{\alpha}{n-1}}_{\leq 1} \cdot \frac{\alpha}{n} \leq \frac{\alpha^{m+1}}{n}.$$

in quanto per i termini da 1 a m abbiamo usato la stima (4.4), mentre per i termini dall'$m+1$ all'$n-1$ la stima (4.3) e l'ultimo termine lo abbiamo lasciato inalterato. Quindi segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0.$$

Per iv); abbiamo

$$a_n = n - \sqrt{n^2+n} = -\frac{n}{n+\sqrt{n^2+n}} = -\frac{1}{1+\sqrt{1+1/n}} \to -\frac{1}{2}.$$

Per risolvere v), notiamo che

$$\frac{3n^2-2n+1}{n-n^2} = \frac{3-2/n+1/n^2}{-1+1/n},$$

quindi il limite deve essere -3. Dobbiamo cioè dimostrare che fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\frac{3n^2-2n+1}{n-n^2} + 3\right| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Ma

$$\left|\frac{3n^2-2n+1}{n-n^2} + 3\right| = \frac{n+1}{n^2-n},$$

quindi la (4.5) si riduce a verificare la disequazione

$$\varepsilon n^2 - (\varepsilon+1)n - 1 > 0,$$

e questa è verificata se ad esempio prendiamo $n_0 = [x_0] + 1$, con

$$x_0 = \frac{(\varepsilon+1) + \sqrt{(\varepsilon+1)^2 + 4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Per vi),

$$a_n = \frac{2/n - 5n - 2/n^2}{1 + 1/n^2} \to -\infty.$$

Per vii),

$$a_n = \frac{4 + 2/n^2}{1/n^3 + 5} \to \frac{4}{5}.$$

Per il punto viii), bisogna tenere presente che

$$\lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2},$$

e quindi

$$a_n = n\left(\arctan n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to +\infty.$$

In ix),

$$a_n = \frac{n(1/\sqrt{n} - 1)}{1/n + 1/n^2} \to -\infty.$$

Per x),

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1 + 1/2^n}{1 + 1/3^n} \to 0.$$

In xi),

$$a_n = \frac{3 - 1/\sqrt{n}}{2 + (\arctan n)/\sqrt{n}} \to \frac{3}{2}.$$

Per xii),

$$a_n = \sqrt{\frac{1 + 2/n^2}{1 + 1/n^2}} \to 1.$$

Per il punto xiii), si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 2} &= \frac{2n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 2}} \\ &= \frac{2 - 1/n}{\sqrt{1 + 2/n + 1/n^2} + \sqrt{1 + 2/n^2}} \\ &\to 1. \end{aligned}$$

In xiv), abbiamo

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n! n/n!} :$$

siccome $(1 + 1/n!)^{n!} \to e$ e $n/n! \to 0$, il tutto tende ad $e^0 = 1$.

In xv),

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n^n n!/n^n} :$$

siccome $(1 + 1/n^n)^{n^n} \to e$ e $n!/n^n \to 0$, il tutto tende ad $e^0 = 1$.

Per risolvere xvi), notiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}.$$

Quindi, nello stesso modo in cui si è affrontato l'esercizio 4., si fa vedere che se $|\alpha|<1$, la successione diverge, mentre se $|\alpha|>1$ la successione tende a 0. Infine, se $\alpha=1$, la successione diverge a $+\infty$, mentre per $\alpha=-1$, la successione è indeterminata.

In xvii), siccome l'esponente tende a $+\infty$, si ottiene immediatamente che $a_n\to-\infty$.

Per affrontare xviii), se n è pari, scriviamo

$$a_n=\frac{n}{n}\dots\frac{n}{n/2}\frac{1}{n/2-1}\dots 1\le\frac{2}{n-2}\to 0.$$

Inoltre si può fare vedere che la successione è monotona decrescente (cioè si dimostra per induzione che $a_{n+1}\le a_n$), quindi segue che $a_n\to 0$.

In xix), possiamo scrivere, siccome $1/(k(k+2))=1/2(1/k-1/(k+2))$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n+1}{2n}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\right.\\ &\qquad\left.\dots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{n+1}{2n}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\to\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Soluzione 4.4.8 i) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$a_n\ge\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n\text{ volte}}=\frac{n}{\sqrt{2n}}\to+\infty\,.$$

ii) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$0\le a_n\le\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(n+1)^2}}_{n\text{ volte}}=\frac{n}{(n+1)^2}\to 0\,,$$

e quindi $a_n\to 0$.

iii) Detto a_n il termine n-esimo della successione si ha

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le a_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\,,$$

e quindi $a_n\to 1$.

Soluzione 4.4.9 Raccogliendo 7^n all'interno della radice si ottiene che

$$\sqrt[n]{3^n+7^n}=7\sqrt[n]{1+(3/7)^n}\to 7\,.$$

Soluzione 4.4.10 Notiamo anzitutto che

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + \frac{1}{4} - a_n = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0,$$

quindi la successione è sempre crescente, indipendentemente dal valore iniziale. Ora, se fosse vero che $a_n \to L \in \mathbb{R}$, si dovrebbe avere, per come è definita la successione

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 + \frac{1}{4} = L^2 + \frac{1}{4},$$

da cui $L = 1/2$. Quindi, se $a_0 > 1/2$, abbiamo una successione crescente che non può convergere ad $1/2$, da cui se ne deduce che $a_n \to +\infty$. Invece, se $a_0 \leq 1/2$, notiamo che

$$a_1 = a_0^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Quindi ogni elemento della successione sarà minore o uguale a $1/2$. Otteniamo quindi una successione monotona crescente limitata superiormente, quindi essa deve convergere ad un qualche numero, che come visto in precedenza, non può che essere $1/2$.

Soluzione 4.4.11 Notiamo che se fissiamo $a \in (0, \pi)$, dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che $|\sin x| < |x|$, deduciamo che

$$\sin a = \sin(\pi - a) < (\pi - a),$$

quindi

$$b = a + \sin a < a + (\pi - a) = \pi.$$

D'altronde, essendo $a > 0$, e quindi anche $\sin a > 0$, la stima $b > 0$ è immediata. Quindi se andiamo alla successione definita per ricorrenza, notiamo anche che

$$a_{n+1} - a_n = \sin a_n > 0,$$

cioè la successione data è monotona crescente. Inoltre è limitata superiormente ($a_n < \pi$), e quindi essa necessariamente converge ad un numero reale $L \in [a_0, \pi]$. Ma per come è definita la successione

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n + \sin a_n) = L + \sin L,$$

cioè $\sin L = 0$. Ma questo può verificarsi solo se $L = \pi$, e quindi la nostra successione converge a π.

Soluzione 4.4.12 Studiamo solo la successione al punto ii), in quanto la i) segue ponendo $h = 1$. Possiamo scrivere

$$a_n = h a_{n-1}^2 = h^2 a_{n-2}^4 = \ldots = h^n k^{2n} = (hk^2)^n.$$

Quindi la successione converge a 0 se $|hk^2| < 1$, diverge per $hk^2 > 1$, è costantemente pari a 1 se $hk^2 = 1$, mentre è indeterminata se $hk^2 \leq -1$.

Soluzione 4.4.13 Dimostriamo anzitutto la monotonia:

$$a_{n+1} - a_n = 1 - 2a_n + a_n^2 = (1 - a_n)^2 \geq 0.$$

Quindi la successione è una successione monotona crescente. Se ammette limite, si deve avere
$$L = 1 - L + L^2,$$
cioè $L = 1$. Quindi, se $a_0 > 1$ la successione deve necessariamente divergere a $+\infty$. Mentre, notando che se $a_n < 1$, allora
$$a_{n+1} = 1 + a_n(a_n - 1) < 1,$$
quindi se $a_0 < 1$, la successione è monotona crescente superiormente limitata, quindi convergente (necessariamente a 1). Infine, se $a_0 = 1$, allora ogni termine della successione è pari ad 1.

Soluzione 4.4.14 Cerchiamo anzitutto se esistono numeri reali L per i quali si abbia
$$L = L^2 - 2.$$
Soluzioni di questa equazione sono
$$L = 2, \quad L = -1.$$
Quindi se per un certo elemento della successione capita che $a_n = 2$ o $a_n = -1$, allora la successione deve necessariamente rimanere costantemente uguale a tale valore. Vediamo cosa succede se
$$a_0 = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}.$$
Abbiamo
$$a_1 = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad a_2 = -\sqrt{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -2, \quad a_5 = 2.$$
Quindi per $n \geq 5$, la successione rimane costantemente uguale a 2. Se invece $a_0 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, allora
$$a_1 = -\sqrt{3}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = -1.$$
Quindi per $n \geq 3$, la successione è costantemente uguale a -1. Infine, se
$$a_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$
allora
$$a_1 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$
Quindi la successione risulta periodica di periodo due, cioè si alterna tra due valori.

Soluzione 4.4.15 Se $\lambda < 1$, allora, preso $\varepsilon > 0$ tale che $\lambda + \varepsilon < 1$, per la definizione di limite, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ per il quale
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \lambda + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$
Quindi
$$|a_{n+1}| < (\lambda + \varepsilon)^n |a_0| \to 0.$$

Se $\lambda > 1$, si prende $\varepsilon > 0$ tale che $\lambda - \varepsilon > 1$ e un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \lambda - \varepsilon.$$

Quindi

$$|a_{n+1}| > (\lambda - \varepsilon)^n |a_0| \to +\infty.$$

Soluzione 4.4.16 Si ha

$$b - \sqrt{B} = \frac{1}{2a}(a - \sqrt{B})^2 \geq 0.$$

Quindi la successione x_n sarà una successione inferiormente limitata, cioè sempre maggiore di $\sqrt{B}$. Inoltre

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2x_n}(B - x_n^2) \leq 0.$$

Quindi la successione deve essere convergente ad un numero L, che però deve soddisfare

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{B}{L}\right),$$

cioè $L = \sqrt{B}$.

Soluzione 4.4.17 Si noti che

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}},$$

da cui il fatto che $a_n^n \to e$ e quindi $a_n \to 1$. Analogamente, se scriviamo

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n^n \frac{n!}{n^n}},$$

tenendo presente che $n!/n^n \to 0$, si deduce che $a_n \to 1$.

Capitolo 5

Serie Numeriche

Esercizio 5.0.1 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-\cos k}{k^2}$$

Esercizio 5.0.2 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$$

Esercizio 5.0.3 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k^k} a^k$$

Esercizio 5.0.4 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k^2 a}{k+a^2}}$$

Esercizio 5.0.5 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{k}\right)$$

Esercizio 5.0.6 ($\star$) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\arctan k\right)^p$$

Esercizio 5.0.7 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{n}{n+1}\right)$$

Esercizio 5.0.8 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{k+\sqrt{k}}{k^3-k+2}\right)$$

Esercizio 5.0.9 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

Esercizio 5.0.10 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k^p}$$

Esercizio 5.0.11 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$$

Esercizio 5.0.12 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Esercizio 5.0.13 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k+k}{3^k-\sqrt{k}}$$

Esercizio 5.0.14 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$$

Esercizio 5.0.15 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)$$

Esercizio 5.0.16 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln k!}$$

Esercizio 5.0.17 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{k^k}$$

Esercizio 5.0.18 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

Esercizio 5.0.19 ($\star$) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k^2+k-1}{k^2+3k+5} \right)^{k^2}$$

Esercizio 5.0.20 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

Esercizio 5.0.21 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 2^{k+1}}{3^k}$$

Esercizio 5.0.22 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{\ln k} \right)$$

Esercizio 5.0.23 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k + \sin k}$$

Esercizio 5.0.24 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(1 - k \arctan \frac{1}{k} \right)$$

Esercizio 5.0.25 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{k!}$$

Esercizio 5.0.26 ($\star$) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1 + \ln k}{\sqrt{k^3+1}} \right)$$

Esercizio 5.0.27 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k$$

Esercizio 5.0.28 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k^{1/k^2}-1)$$

Esercizio 5.0.29 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{k\ln k}{1+k^2}$$

Esercizio 5.0.30 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1+\cos k}{3}\right)^k$$

Esercizio 5.0.31 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos\pi k}{k+2}$$

Esercizio 5.0.32 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k+1}$$

Esercizio 5.0.33 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{(k-3)^k}{k^{k+1}}$$

Esercizio 5.0.34 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k+1}{2k-1}\right)^k$$

Esercizio 5.0.35 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(k-\sin k)\left(\frac{1}{k}-\sin\frac{1}{k}\right)$$

Esercizio 5.0.36 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$$

Esercizio 5.0.37 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^3}{e^k}$$

Esercizio 5.0.38 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{a/2+ka^2}$$

Esercizio 5.0.39 Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\ln \ln k}$$

Esercizio 5.0.40 Si supponga di lasciar cadere una pallina da un'altezza iniziale h_0 e si supponga che la pallina, dopo ogni rimbalzo, risalga ad un'altezza che è proporzionale all'altezza raggiunta prima del rimbalzo (si supponga cioè di aver definito la successione di altezze $h_{n+1} = qh_n$ con $q \in (0,1)$ e $h_0 > 0$ fissato). Stabilire se la pallina smette di rimbalzare in un tempo finito o meno. Calcolare quindi il tempo che ci vuole perché una pallina da ping-pong (che ha come rimbalzo caratteristico all'incirca $q = 0.75$) impiega a fermarsi se lasciata cadere da un'altezza di un metro.

5.1 Soluzioni

Soluzione 5.1.1 Si noti che si ha la seguente stima

$$0 \leq \frac{1-\cos k}{k^2} \leq \frac{2}{k^2};$$

possiamo quindi applicare il criterio del confronto per concludere che la serie data è convergente.

Soluzione 5.1.2 Applicando il criterio del rapporto con $a_k = a^k/k!$, si ottiene che

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|a|}{k+1}$$

e quindi, siccome per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a|}{k+1} = 0,$$

la serie data converge assolutamente per ogni fissato $a \in \mathbb{R}$, e quindi converge anche semplicemente. Si potrebbe dimostrare (non facilmente) che la serie data ha somma

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n.$$

Soluzione 5.1.3 Applicando il citerio del rapporto con $a_k = \frac{k!a^k}{k^k}$, si ottiene

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|a|}{(1+1/k)^k}.$$

Siccome si ha che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a|}{(1+1/k)^k} = \frac{|a|}{e}$$

si avrà convergenza assoluta per $|a| < e$, mentre non si avrà convergenza per $|a| \geq e$ (il caso $|a| = e$ lo si deduce in quanto la successione

$$\frac{e}{(1+1/k)^k}$$

converge in modo monotono decrescente ad 1).

Soluzione 5.1.4 Utilizzando il criterio della radice, si ha che, ponendo $a_k = e^{-\frac{k^2 a}{k+a^2}}$,

$$\sqrt[k]{|a_k|} = e^{-\frac{ka}{k+a^2}}.$$

Quindi, siccome

$$\lim_{k\to+\infty} e^{-\frac{ka}{k+a^2}} = e^{-a},$$

se ne deduce che la serie converge per $a > 0$, mentre diverge per $a \leq 0$ (nel caso $a = 0$ il termine generale è sempre pari a 1).

Soluzione 5.1.5 Usando il limite notevole

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1-\cos a_k}{a_k} = \frac{1}{2},$$

con (a_k) successione infinitesima, se ne deduce che la successione $1 - \cos 1/k$ è a termini positivi e asintoticamente equivalente alla successione $(1/(2k^2))$, e quindi, dato che quest'ultima ha una serie convergente, grazie al criterio del confronto asintotico la serie data sarà convergente.

Soluzione 5.1.6 Si noti che

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \arctan k\right) = \tan\arctan k = k,$$

se ne deduce che

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan k)\right) = \frac{1}{k}.$$

Utilizzando quindi il limite notevole

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tan a_k}{a_k} = 1 \tag{5.1}$$

se (a_k) è una successione infinitesima, se ne deduce che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan k\right)^p$$

è asintoticamente equivalente alla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

e quindi converge se $p > 1$ e non converge per $p \leq 1$.

Soluzione 5.1.7 Proponiamo due soluzioni.

La prima è la seguente. Prima ricordiamo i seguenti fatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \qquad \text{se } a_n \text{ infinitesima}$$

e

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.$$

Usando il primo dei fatti appena ricordati e il criterio del confronto ci possiamo limitare a studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$$

che per il secondo fatto diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\arcsin\frac{n}{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin\frac{n}{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$$

che diverge.
La seconda è meno elegante, ma può essere istruttiva.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x\,.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,.$$

Ora, se si riuscisse a trovare una funzione g tale che

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \tag{5.2}$$

grazie alla regola di de l'Hôpital si concluderebbe che $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Scegliendo $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{(1-x)}}$ si ha chiaramente che le condizioni (5.2) sono soddisfatte. Integrando si ottiene $g(x) = \sqrt{2}\sqrt{1-x}$. Conclusione:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

e quindi, per il criterio del confronto, la serie seguente ha lo stesso carattere di quella di partenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{n}{n+1}} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

Si conlude che la serie diverge (confrontare con quanto ottenuto precedentemente).

Soluzione 5.1.8 Siccome la successione

$$\frac{k+\sqrt{k}}{k^3-k+2}$$

è asintoticamente equivalente alla successione $1/k^2$, utilizzando il limite notevole (5.1) dell'esercizio precedente, se ne deduce che la serie data è asintoticamente equivalente alla serie $\sum 1/k^2$ e quindi convergente.

Soluzione 5.1.9 La serie data è una serie a termini alterni; si nota subito che la serie non è assultamente convergente, e quindi dobbiamo studiare la convergenza semplice. Utilizziamo quindi il criterio di Leibniz; la successione $1/k$ è chiaramente infinitesima, positiva e monotona decrescente in quanto per $k < k+1$ si ha $1/k > 1/(k+1)$. Quindi per il criterio di Leibniz si ha la convergenza semplice.

Soluzione 5.1.10 Il termine generale è infinitesimo solo per $p > 0$ e quindi per $p \le 0$ non si può avere convergenza. Inoltre per $p > 0$, la successione $(1/k^p)$ è monotona decrescente. Quindi grazie al criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente per $p > 0$. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, si ricade nel caso della serie armonica generalizzata, che covnerge per $p > 1$.

Soluzione 5.1.11 La serie non converge assolutamente in quanto per $k \ge 3$

$$\frac{\ln k}{k} \ge \frac{1}{k}$$

e per il criterio del confronto si ha $\sum \ln k/k = +\infty$. Per quanto riguarda la convergenza semplice, trattandosi di una serie a segni alterni, proviamo ad applicare Leibniz. La successione $a_k = \ln k/k$ è monotona se verifichiamo che

$$\frac{\ln(k+1)}{k+1} \le \frac{\ln k}{k}.$$

Ma questa condizione equivale a richiedere che

$$\ln \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \le 0$$

oppure

$$b_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \le 1.$$

Ma

$$b_k = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \frac{e}{k}$$

e quindi per $k \ge 3$ $b_k \le 1$ da cui la monotonia di a_k. Per vedere che (a_k) è infinitesima, si noti che

$$a_{k^2} = \frac{2}{k}a_k \le \frac{2}{k}a_3.$$

Quindi segue che $\lim a_k = 0$. Possiamo allora applicare il criterio di Leibniz e concludere che

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln k}{k} \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 5.1.12 La serie data è a termini negativi in quanto $1 - 1/k^2 < 1$; quindi può essere trattata come una serie a termini positivi solo con il segno meno davanti. Per trattare quasta serie abbiamo bisogno del seguente limite notevole; se (a_n) è una successione infinitesima, allora

$$\lim \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

cioè $\ln(1+a_n)$ è asintoticamente equivalente ad a_n. Tale limite segue in quanto

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \ln(1+a_n)^{1/a_n}.$$

Per trattare questa espressione, supponiamo $a_n > 0$ e scriviamo $a_n = 1/b_n$ con $b_n \to \infty$. Avremo che $[b_n] \leq b_n < [b_n]+1$ con il vantaggio che $[b_n] \in \mathbb{N}$; quindi

$$\left(1 + \frac{1}{[b_n]+1}\right)^{([b_n]+1)\cdot \frac{b_n}{[b_n]+1}} \leq \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \leq \left(1+\frac{1}{[b_n]}\right)^{([b_n])\cdot\frac{b_n}{[b_n]}}.$$

Tenendo presente che per $b_n \to \infty$ si ha che

$$\lim \frac{b_n}{[b_n]} = \lim \frac{b_n}{[b_n]+1} = 1,$$

si ottiene che

$$\lim \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e,$$

da cui l'asserto. Il caso $a_n < 0$ si tratta in modo analogo tenendo presente che

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Abbiamo quindi che la successione $|\ln(1-1/k^2)|$ è asintoticamente equivalente alla successione $1/k^2$ e quindi è assolutamente e semplicemente convergente (qui la convergenza assoluta è la stessa di quella semplice a meno del segno).

Soluzione 5.1.13 Posto

$$a_k = \frac{2^k + k}{3^k - \sqrt{k}} \geq 0,$$

è facile notare che $a_k \sim (2/3)^k$ e quindi la serie è asintoticamente equivalente ad una serie geometrica di ragione minore di 1, e quindi la serie converge.

Soluzione 5.1.14 Si ha che

$$a_k = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k} = \frac{1}{k\sqrt{k}(\sqrt{1+1/k}+1)} \geq 0$$

e quindi $a_k \sim 1/k^{3/2}$ con $3/2 > 1$, e quindi la serie data è asintoticamente equivalente ad una serie convergente.

Soluzione 5.1.15 Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione logaritmo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

si ottiene che la successione

$$a_k = \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq 0$$

è asintoticamente equivalente alla successione $1/(2k^2)$, e quindi la serie data è convergente.

Soluzione 5.1.16 Notando che $k! < k^k$, la serie diverge (confrontare l'esercizio 20.).

Soluzione 5.1.17 Applicando il criterio del rapporto si ottiene che

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{(1+1/k)^k} \to \frac{1}{e}$$

da cui la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

Soluzione 5.1.18 Dal criterio del rapporto si ha che

$$\lim \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{2} < 1$$

e quindi la serie data converge.

Soluzione 5.1.19 Scrivendo

$$\left(\frac{k^2+k-1}{k^2+3k+5}\right)^{k^2} = \left(1 - \frac{2k+6}{k^2+3k+5}\right)^{\frac{k^2+3k+5}{2k+6} \cdot k^2 \cdot \frac{2k+6}{k^2+3k+5}}$$

e tenendo presente che

$$\lim \left(1 - \frac{2k+6}{k^2+3k+5}\right)^{\frac{k^2+3k+5}{2k+6}} = \frac{1}{e}$$

e

$$\frac{2k+6}{k^2+3k+5} \sim \frac{2}{k},$$

ne segue che

$$a_k \sim \frac{1}{(e^2)^k},$$

cioè la serie data è asintoticamente equivalente alla serie geometrica di ragione $1/e^2 < 1$, e quindi si ha convergenza.

Soluzione 5.1.20 Richiamiamo un utile criterio, che può essere usato per dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

non converge.

Teorema 1 (Criterio di Condensazione) *Sia* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione a termini positivi, infinitesima e monotona decrescente; allora la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge se e solo converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Dim. Denotiamo con

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k};$$

possiamo scrivere, grazie alla monotonia di a_k

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n} \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + (a_8 + \ldots a_{15}) + \ldots \\
&\quad + (a_{2^{n-1}} + \ldots + a_{2^n - 1}) + a_{2^n} \\
&\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + a_{2^n} \\
&= \sigma_{n-1} + a_{2^n}.
\end{aligned}$$

Quindi, se la σ_n converge, converge anche la s_n, e se la s_n diverge, diverge pure la σ_n. Notando invece che

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n} \\
&= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + (a_9 + \ldots a_{16}) + \ldots \\
&\quad + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}) \\
&\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \ldots + 2^n a_{2^n} \\
&= a_1 + \frac{1}{2}\sigma_n,
\end{aligned}$$

si ottiene che se s_n converge, allora converge anche σ_n, se σ_n diverge, diverge anche s_n. □

Utilizzando tale criterio, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2},$$

e quindi la serie data non converge.

Soluzione 5.1.21 Applichiamo il criterio del rapporto per ottenere che

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2}{3}\frac{(k+1)^2}{k^2} \to \frac{2}{3} < 1,$$

e quindi la serie converge.

Soluzione 5.1.22 La serie non converge assolutamente in quanto

$$\ln\left(1+\frac{1}{\ln k}\right) \sim \frac{1}{\ln k} \geq \frac{1}{k}.$$

Per la convergenza semplice applichiamo Leibniz; siccome $\ln k \to +\infty$ per $k \to +\infty$, si ha che

$$a_k = \ln\left(1+\frac{1}{\ln k}\right)$$

è infinitesima. Sfruttando la monotonia della funzione logaritmo, si ricava inoltre che la successione è pure monotona, da cui la convergenza della serie data.

Soluzione 5.1.23 La serie non converge assolutamente in quanto il termine generale è asintotico a $1/2k$. La successione

$$a_k = \frac{1}{2k+\sin k}$$

è infinitesima e $a_{k+2} \leq a_k$ in quanto $\sin k - \sin(k+1) \leq 2$; quindi applicando il criterio di Leibniz, la serie converge. Si noti che lo studio della convergenza della serie

$$\sum (-1)^k \frac{1}{k+\sin k}$$

risulta alquanto più complicata; serve una stima del tipo

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

stima che si può dimostrare usando le formule di Prostaferesi.

Soluzione 5.1.24 Dallo sviluppo di Taylor per la funzione arcotangente

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

si ottiene che la successione

$$1 - k\arctan\frac{1}{k}$$

è asintoticamente equivalente alla successione $1/k^2$ e quindi si ha convergenza assoluta e a maggior ragione semplice.

Soluzione 5.1.25 Se applichiamo il criterio del rapporto, si ottiene

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{1}{k+1}\frac{(k+1)^3}{k^3} \to 0$$

e quindi la serie converge.

Soluzione 5.1.26 Vogliamo andare a confrontare (asintoticamente) la nostra serie (che è a termini positivi) con la serie armonica $1/k^p$. Si ha che

$$k^p\left(\frac{1+\ln k}{\sqrt{k^3+1}}\right) = \frac{1+\ln k}{k^{3/2-p}\sqrt{1+1/k^3}}.$$

Si ha quindi che $k^p a_k \to 0$ se $3/2 - p > 0$, cioè se $p < 3/2$. Quindi la serie data è sicuramente definitivamente più piccola della serie con termini $1/k^p$ per $p < 2/3$; se prendiamo poi $p > 1$, otteniamo che la serie data converge.

Soluzione 5.1.27 Usando la formula di Taylor, si può scrivere

$$\sqrt[k]{k} - 1 = e^{\ln k/k} - 1 = \frac{\ln k}{k} + o\left(\frac{\ln k}{k}\right)$$

da cui si ottiene che la serie converge.

Soluzione 5.1.28 Scrivendo

$$k^{1/k^2} - 1 = \frac{\ln k}{k^2} + o\left(\frac{\ln k}{k^2}\right)$$

si ottiene che la serie converge.

Soluzione 5.1.29 Per quanto riguarda la convergenza assoluta, si ha che definitivamente

$$\frac{k \ln k}{k^2+1} > \frac{k}{k^2+1}$$

e quindi niente convergenza assouta. Per la convergenza semplice si applica Leibniz in quanto la successione è infinitesima e monotona (verificarlo per esercizio).

Soluzione 5.1.30 Si noti che

$$0 \leq \frac{1+\cos k}{3} \leq \frac{2}{3}$$

e quindi la serie è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $2/3 < 1$ e quindi converge.

Soluzione 5.1.31 Si noti che $\cos \pi k = (-1)^k$ e quindi la serie diventa

$$\sum \frac{(-1)^k}{k+2}$$

che è convergente grazie al criterio di Leibniz, ma non assolutamente convergente.

Soluzione 5.1.32 Si noti che $\sin 1/(k+1) \sim 1/(k+1)$ e quindi la serie diventa asintoticamente equivalente alla serie

$$\sum \frac{1}{k(k+1)}$$

che è convergente.

Soluzione 5.1.33 Notiamo che

$$a_k = \frac{(k-3)^k}{k^{k+1}} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{3}{k}\right)^k$$

da cui si deduce che

$$a_k \sim \frac{1}{\sqrt[3]{e}k}$$

e quindi la serie data non converge.

Soluzione 5.1.34 Dal criterio della radice si ha

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k+1}{2k-1} \to \frac{1}{2} < 1,$$

e quindi la serie converge.

Soluzione 5.1.35 Dallo sviluppo di Taylor della funzione seno

$$\sin\frac{1}{k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{6k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

si ricava che la successione

$$a_k=(k-\sin k)\left(\frac{1}{k}-\sin\frac{1}{k}\right)$$

è asintoticamente equivalente alla successione $1/k^2$ e quindi converge.

Soluzione 5.1.36 Notare che

$$ka_k=\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\to 1$$

e quindi la serie data è asintotica alla serie con termini $1/k$, quindi la serie non converge.

Soluzione 5.1.37 Dal criterio del rapporto si ottiene che

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{1}{e}\frac{(k+1)^3}{k^3}\to\frac{1}{e}<1,$$

quindi la serie converge.

Soluzione 5.1.38 Scrivendo $a_k=e^{a/2}e^{ka^2}$, dal criterio della radice si ottiene

$$\sqrt[k]{|a_k|}=e^{a/(2k)}e^{a^2}\to e^{a^2}.$$

Siccome per $a\neq 0$ $e^{a^2}>1$, la serie non converge; infine per $a=0$, si ha che $a_k=1$ e quindi ancora non si ha convergenza.

Soluzione 5.1.39 La serie converge semplicemente grazie a Leibniz, in quanto $1/\ln\ln k$ è monotono decrescente e infinitesimo. Per quanto riguarda la convergenza assoluta, dal criterio di condensazione, si ha convergenza se e solo se converge la serie

$$\sum\frac{2^k}{\ln(k\ln 2)},$$

ma il termine generale di tale serie non è infinitesimo, e quindi non si può avere convergenza assoluta.

Soluzione 5.1.40 Se si lascia cadere la pallina, dalla fisica si sa che il tempo che impiega per raggiungere il suolo partendo da un'altezza h_0 è pari a

$$t_0=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Dopo il primo rimbalzo il tempo che impiega per giungere al rimbalzo successivo è dato da

$$t_1=2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}=2t_0\sqrt{q},$$

dove $q \in (0,1)$ rappresenta la percentuale dell'altezza raggiunta, e il numero 2 deriva dal fatto che la pallina deve prima salire fino all'altezza h_1 e poi ridiscendere. In generale per l'ennesimo rimbalzo si ha

$$t_n = \sqrt{q} t_{n-1} = \sqrt{q}^{n-1} t_1$$

e quindi il tempo che impiegherà per smettere di rimbalzare sarà

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} t_k = t_0 + 2t_0 \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{q}^k = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}.$$

Se mettiamo in tale formula i valori di $q = 0.75$ e $h_0 = 1$, si ottiene che

$$T = 6.29s$$

circa.

Capitolo 6

Limiti e Funzioni Continue

Esercizio 6.0.1 Mostrare che la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

è continua in $x = -1$.

Esercizio 6.0.2 Mostrare che la funzione

$$f(x) = ||x^3| - 1|$$

è continua in $x = 1$.

Esercizio 6.0.3 Dire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2} & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è continua.

Esercizio 6.0.4 Dire per quali valori dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ risulta continua la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & x \leq -\dfrac{\pi}{2} \\ \\ a\sin x + b & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \\ \cos x & x \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 6.0.5 Dire per quali valori dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ risulta continua la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} + b & 0 \leq x \leq 1 \\ \\ x^2 + bx + a & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

Esercizio 6.0.6 Dire se la funzione $f : (-1, 2) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x(1 - x)[x]$$

è continua o meno. Ricordiamo che dato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, si indica con $[a]$ la parte intera del numero a, cioè il più grande numero intero $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n \leq a < n + 1$.

Esercizio 6.0.7 Dimostrare che la funzione esponenziale definita nella Sezione 1.4 (1.3) è continua.

Esercizio 6.0.8 Dimostrare i seguenti limiti notevoli

i) $(\star)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0;$

iv) $(\star)$ $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e;$

v) $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$

vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1;$

vii) $\lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln b \qquad b > 0;$

viii) $\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha;$

ix) $(\star)$ $\lim_{x\to +\infty} x^\alpha A^{-x} = 0, \quad A > 1, \forall\alpha > 0;$

x) $\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^\beta x^{-\alpha} = 0 \quad \forall\alpha, \beta > 0;$

xi) $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha(-\ln x)^\beta = 0 \quad \forall\alpha, \beta > 0;$

Esercizio 6.0.9 Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha.$$

Esercizio 6.0.10 Mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 3x} = \frac{1}{18}.$$

Esercizio 6.0.11 Calcolare i seguenti limiti

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x}$;

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{1-\sqrt{2}\sin x}$;

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{1+\sin x}$;

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2\sin 2x^2}$;

v) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$;

vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$;

vii) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$;

viii) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)^2}{x^2(1-\cos x)}$;

ix) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|}$;

x) $\lim_{x\to +\infty} (x^2+x+1)\sin 2/x^2$.

xi) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-2\sin^2 x/2}{\sin x}\right)^{\sin x}$.

xii) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)$.

Esercizio 6.0.12 Mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin^2 x}{x^2} = +\infty.$$

Esercizio 6.0.13 Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 1}{3^x - 1} = \ln_3 5;$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{\sin x};$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x} + 3}{e^{1/x} + 1};$

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + e^{1/(1-x)}};$

v) $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{1 - e^{2x}};$

vi) $\lim_{x\to 0} x^{1/x}.$

vii) $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}.$

viii) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x.$

ix) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arcsin x} - e^{\arctan x}}{\arcsin x - \arctan x};$

x) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x;$

xi) $\lim_{x\to 0} (1 + \sin x)^{1/x};$

xii) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}.$

Esercizio 6.0.14 Calcolare i seguenti limiti;

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + 10x)}{x};$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2};$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{3x + 2};$

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x};$

v) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{1-\cos x};$

vi) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x \sin\left(\ln \frac{x+1}{x+2}\right).$

vii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} x \sin\left(\ln \frac{x+1}{x+2}\right).$

Esercizio 6.0.15 ($\star$) Sapendo che

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0,$$

mostrare che

$$\lim_{n\to +\infty} e^{\frac{1-n^2}{2+n}} = 0, \qquad \lim_{n\to +\infty} e^{\tan(1/n-\pi/2)} = 0.$$

Esercizio 6.0.16 ($\star$) Data l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

cosa succede alle due radici se, tenendo fissati b e c si fa il limite $a \to +\infty$ e $a \to 0$?

Esercizio 6.0.17 ($\star$) Data una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, dimostrare che esiste almento un punto $x_0 \in [0,1]$ tale che $f(x) = x$ (Sugg: considerare la funzione $g(x) = f(x)-x$ e applicare il teorema dell'esistenza degli zeri).

Esercizio 6.0.18 ($\star\star$) Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

dimostrare che $f(x) = f(1)x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (Sugg: calcolare la funzione f nei punti della forma $x = n$, poi nei punti della forma $x = n/m$ e sfruttare quindi la continuità).

Esercizio 6.0.19 ($\star\star$) Data una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) \\ f(1) = a > 0, \end{cases}$$

dimostrare che $f(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Cosa succede se non si richiede la continuità su f.

6.1 Esercizi senza svolgimento

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5\ln(1+x))}{x}$
2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\ln(1+x))}{x^2+\sin^4 3x}$
3. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}}$

4. $\lim_{x \to 4^+} (x-4)^{x^2-16}$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(\sin(x^2+4x))+x}{\ln(1+x)}$

6. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3\sin x)}{\tan x}$

7. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}+e^x+1}{2e^{3x}+2}$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\arctan 5x}$

9. $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{1-x}$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}{x+x^2}$

11. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^7+x^5-3x^2+1}{x^5-x^3+\sin\frac{1}{x}+\cos x}$

12. $\lim_{x \to -\infty} x \sin\frac{1}{x}$

13. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+x^2)}{\ln x}$

14. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

15. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

6.2 Soluzioni

Soluzione 6.2.1 Per svolgere questo esercizio, calcoliamo la funzione nel punto $x_0 = -1$, e verifichiamo che

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1).$$

Ma $f(-1) = 0$, e quindi bisogna trovare, fissato $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tale che se $x+1 < \delta$, allora $|f(x)| < \varepsilon$. Ma

$$|\sqrt[3]{x+1}| < \varepsilon$$

se e solo se $|x+1| < \varepsilon^3$, quindi basta prendere $\delta = \varepsilon^3$.

Soluzione 6.2.2 Siccome $f(1) = 0$, cerchiamo, fissato $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ per il quale $|x-1| < \delta$ si abbia $|f(x)| < \varepsilon$. Ma

$$||x^3|-1| < \varepsilon$$

se e solo se

$$1-\varepsilon < |x^3| < 1+\varepsilon$$

Stiamo verificando la continuità nel punto 1, quindi per δ opportuno, si dovrà avere che x è positivo. Così ad esempio, per $\delta = 1/2$, si ha che $1/2 < x < 3/2$; in tal modo si ha che $|x|^3 = x^3$, e quindi la condizione da verificare diventa

$$-\varepsilon < x^3 - 1 < \varepsilon.$$

A questo punto, scrivendo $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, se $\delta = 1/2$, otteniamo che $1/2 < x < 3/2$, da cui

$$1 < \frac{7}{4} < x^2 + x + 1 < \frac{19}{4} < 5.$$

Quindi

$$x - 1 < x^3 - 1 < 5(x-1),$$

da cui se prendiamo $\delta = \min(1/2, \varepsilon/5)$, otteniamo quanto cercato.

Soluzione 6.2.3 Per verificare la continuità di f basta andare a verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Difatti

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} - \frac{1}{2} &= \frac{2\sqrt{1+x^2} - (x^2+2)}{2x^2} \\ &= \frac{4(1+x^2) - (x^2+2)^2}{2x^2(2\sqrt{1+x^2} + x^2 + 2)} \\ &= -\frac{x^2}{2(2\sqrt{1+x^2} + x^2 + 2)}. \end{aligned}$$

Tenendo quindi presente che $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ e $x^2 \geq 0$, si ottiene che

$$\left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{x^2}{4}.$$

Preso quindi $\varepsilon > 0$, se scegliamo $\delta = \sqrt{\varepsilon}/2$, si ottiene che per $|x| < \delta$

$$\left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon,$$

da cui la continuità.

Soluzione 6.2.4 Per verificare la continuità della funzione data basta andare a verificare la continuità nei punti $-\pi/2$ e $\pi/2$. Cioè, si deve avere

$$\lim_{x\to -\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to -\pi/2^+} f(x),$$

da cui segue che $2 = -a + b$. Inoltre si deve avere

$$\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^+} f(x),$$

da cui $a + b = 0$. Quindi si ottiene $a = -1$ e $b = 1$.

Soluzione 6.2.5 Si deve andare a testare la continuità nei punti 0 e in 1. La condizione di continuità in 0 diventa $1 + b = a$, mentre la condizione di continuità in 1 diventa $\sqrt{2} + b = 1 + b + a$. Otteniamo quindi che $a = \sqrt{2} - 1$ e $b = \sqrt{2} - 2$.

Soluzione 6.2.6 La funzione data è prodotto di tre funzioni, x (continua ovunque), $(1-x)$ (continua ovunque) e $[x]$ (continua in tutti gli intervalli del tipo $(n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$). Quindi potrebbero esserci due discontinuità della funzione data, più precisamente in 0 e 1. Ma

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$

e analogamente

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0.$$

Quindi la funzione f è continua in $(-1, 2)$.

Soluzione 6.2.7 Notando che

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1),$$

basta dimostrare la continuità in $x_0 = 0$, cioè che

$$\lim_{y\to 0} a^y = 1.$$

Ma questo limite è conseguenza dell'Esercizio 1.2.21, in quanto per $y > 0$ esistono due razionali $\varrho_1, \varrho_2 > 0$ tali che $\varrho_1 < y < \varrho_2$, e quindi per la monotonia dell'esponenziale segue la continuità.

Soluzione 6.2.8 Il punto i) segue, analogamente a quanto dimostrato per i limiti notevoli sulle successioni, dalle disuguaglianze

$$|\sin x| \le |x| \le |\tan x|.$$

Per quanto riguarda il punto ii), segue da i) una volta posto $1 - \cos x = 2\sin^2 x/2$. Il punto iii) segue da ii) in quanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} x\frac{1-\cos x}{x^2} = 0 \cdot \frac{1}{2}.$$

Il punto iv) non lo dimostriamo (si potrebbe far vedere, con l'uso delle derivate, che la funzione $(1 + x)^{1/x}$ è monotona, quindi ci si può ricondurre al limite della successione $(1 + 1/n)^n$). Il punto v) segue da iv); ad esempio, facendo la sostituzione $y = 1/x$, abbiamo

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0^+} (1 + y)^{1/y} = e.$$

Per il punto vi), una volta scritto

$$\frac{\ln(1 + x)}{x} = \ln(1 + x)^{1/x},$$

il limite segue da iv) notando che la funzione ln è una funzione continua. Dimostriamo vii) prima nel caso particolare in cui $b = e$: utilizzando la stima (4.1) si ottiene

$$1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{1}{1-x}$$

e passando al limite per $x \to 0$ e utilizzando il teorema dei due carabinieri si conlude.
Nel caso più generale vediamo una dimostrazione differente: poniamo $y = b^x - 1$, da cui

$$x = \log_b(1+y) = \frac{\ln(1+y)}{\ln b}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln b \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \ln b.$$

Per viii), si pone $y = \log(1+x)^\alpha$, da cui

$$x = e^{y/\alpha} - 1,$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{e^{y/\alpha} - 1} = \alpha.$$

Il limite ix) segue dall'analogo limite dimostrato per le successioni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{A^n} = 0,$$

e notando che la funzione $x \to x^\alpha A^{-x}$ è monotona decrescente, almeno per $x > \alpha/\ln A$. Il punto x) segue poi da ix) facendo la sostituzione $y = \log x$.

Soluzione 6.2.9 Abbiamo, se $\alpha \neq 0$ (in caso contrario il limite è ovvio),

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha \lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \alpha.$$

Soluzione 6.2.10 Abbiamo

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 3x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \left(\frac{x}{\sin 3x}\right)^2,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 3x} = \frac{1}{18}.$$

Soluzione 6.2.11 Per il limite i), si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x \frac{\sin x^2}{x^2} = 0.$$

Il limite ii) ha il numeratore che tende a 1, così come il denominatore, quindi il limite è pari a 1. Analogamente per il limite iii). Per il limite iv), abbiamo

$$\frac{x \sin x}{2 \sin 2x^2} = \frac{1}{4} \frac{\sin x}{x} \frac{2x^2}{\sin 2x^2},$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{2 \sin 2x^2} = \frac{1}{4}.$$

Per il limite v), scritto

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x},$$

il limite segue. Nel limite vi), ponendo $y = \arcsin x$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

In vii), si pone $y = \arctan x$, e si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = 1.$$

Per viii), scrivendo

$$\frac{(1-\cos 3x)^2}{x^2(1-\cos x)} = \frac{x^2}{1-\cos x} \left(\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2} \right)^2 \cdot 81,$$

otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)^2}{x^2(1-\cos x)} = \frac{81}{2}.$$

In ix), facendo la sostituzione $y = \sqrt{|x|}$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

In x), facendo la sostituzione $y = 1/x$, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2+x+1)\sin 2/x^2 = \lim_{y\to 0^+} 2(y^2+y+1)\frac{\sin 2y^2}{2y^2} = 2.$$

In xi), studiamo la funzione

$$\sin x \left(\log(1-\sin^2 x/2) - \log\sin x\right).$$

Usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} x\log x = 0$$

otteniamo quindi che

$$\lim_{x\to 0} \sin x \left(\log(1-\sin^2 x/2) - \log\sin x\right) = 0,$$

da cui il limite originario uguale a 1. In xii), si ha che

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3+2x^2} \left(\frac{(x^2+2x)^{1/2}}{(x^3+2x^2)^{1/3}} - 1 \right) &= x(1+\frac{2}{x})^{1/3} \left((1+\frac{2}{x})^{1/2-1/3} - 1 \right) \\ &= 2(1+\frac{2}{x})^{1/3} \frac{(1+\frac{2}{x})^{1/6}-1}{\frac{2}{x}} \\ &\to 2\cdot 1\cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Soluzione 6.2.12 Abbiamo
$$\frac{1+\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2},$$
quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin^2 x}{x^2} = +\infty.$$

Soluzione 6.2.13 Per i), scrivendo
$$\frac{5^x-1}{3^x-1} = \frac{5^x-1}{x}\frac{x}{3^x-1},$$
otteniamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{3^x-1} = \frac{\log 5}{\log 3} = \log_3 5.$$
Per ii), scritto
$$\frac{1-e^x}{\sin x} = \frac{1-e^x}{x}\frac{x}{\sin x},$$
otteniamo che
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\sin x} = -1.$$
Per iii), calcoliamo separatamente limite destro e limite sinistro. Sostituendo $y = 1/x$, abbiamo
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x}+3}{e^{1/x}+1} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1+3e^{-y}}{1+e^{-y}} = 1,$$
mentre
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x}+3}{e^{1/x}+1} = \lim_{y\to-\infty}\frac{e^{y}+3}{e^{y}+1} = 3.$$
Quindi il limite non esiste. Per iv),
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{1/(1-x)}} = \frac{1}{1+e}.$$
In v),
$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{1-e^{2x}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-e^{2x}} = -\frac{3}{2}.$$
In vi), scrivendo
$$x^{1/x} = e^{\log x/x},$$
si ha che
$$\lim_{x\to 0} x^{1/x} = 0.$$
Mentre in vii), si usa il limite notevole x), per ottenere
$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1.$$
In viii), scriviamo
$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = \left(1-\frac{1}{x+2}\right)^{-(x+2)(-x/(x+2))},$$

ottenendo quindi che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x = e^{-1}.$$

In ix), scrivendo

$$\frac{e^{\arcsin x}-e^{\arctan x}}{\arcsin x-\arctan x} = e^{\arctan x}\frac{e^{\arcsin x-\arctan x}-1}{\arcsin x-\arctan x},$$

segue che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{arcsinx}-e^{\arctan x}}{\arcsin x-\arctan x} = 1.$$

In x), ponendo $y = x/2$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y} = e^2.$$

In xi), abbiamo

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{(1/\sin x)(\sin x/x)} = e.$$

In xii), si ha che

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^{x/(x+1)} = e^{\frac{-3x}{x+1}\ln x} \to 1,$$

in quanto si utilizza il limite notevole $x\ln x \to 0$ per $x \to 0$.

Soluzione 6.2.14 In i), scritto

$$\frac{\log(1+10x)}{x} = 10\frac{\log(1+10x)}{10x},$$

si ottiene che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x} = 10.$$

In ii), scrivendo $\cos x = 1-2\sin^2 x/2$, otteniamo

$$\frac{\log\cos x}{x^2} = \frac{\log(1-2\sin^2 x/2)}{-2\sin^2 x/2}\,\frac{-2\sin^2 x/2}{x^2},$$

da cui si ottiene che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

In iii), il numeratore tende a 0 mentre il denominatore tende a 2, quindi il limite è 0. In iv) scriviamo

$$\frac{\log(1+\sin x)}{x} = \frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\,\frac{\sin x}{x},$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{x} = 1.$$

In v), scriviamo

$$\frac{\log\cos x}{1-\cos x} = \frac{\log(1-\sin^2 x/2)}{-2\sin^2 x/2}\frac{-2\sin^2 x/2}{(x/2)^2}\frac{x^2/4}{1-\cos x},$$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{1-\cos x} = -1.$$

Ponendo $y = 1/x$, il punto iv) diventa

$$x\sin\left(\log\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\sin\left(\log\frac{1+y}{1+2y}\right)}{\log\frac{1+y}{1+2y}}\frac{\log\left(1-\frac{y}{1+2y}\right)}{-y/(1+2y)}\left(-\frac{1}{1+2y}\right)$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\log\frac{x+1}{x+2}\right) = -1.$$

Per vii), si ha

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\log\frac{x+1}{x+2}\right) = 0.$$

Soluzione 6.2.15 Eseguendo la divisione tra polinomi, abbiamo

$$\frac{1-n^2}{2+n} = 2-n-\frac{3}{2+n}.$$

Quindi

$$e^{\frac{1-n^2}{2+n}} = e^2e^{-n}e^{-3/(2+n)}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1-n^2}{2+n}} = 0.$$

Per il secondo limite, si noti che

$$\tan(1/n-\pi/2) = -\frac{\cos(1/n)}{\sin(1/n)} = -\frac{\cos(1/n)}{1/n}\frac{1/n}{\sin(1/n)}.$$

Quindi il limite sarà 0.

Soluzione 6.2.16 Le radici sono date da

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a} = -\frac{b}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}};$$

si noti che per esistere queste due radici deve essere $4ac < b^2$. Quindi se $c > 0$, per $a > b^2/4c$ non si avranno radici, mentre se $c < 0$ avremo due radici distinte e le due radici tendono a 0 per $a \to +\infty$. Nel caso $a \to 0$, supponiamo dapprima $b \neq 0$, quindi ad esempio $b > 0$; allora le due radici sono date da

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -b\left(\frac{\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}+1}{2a}\right)$$

e

$$x_2 = b\left(\frac{\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}-1}{2a}\right) = -\frac{2c}{b}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}-1}{-\frac{4ac}{b^2}}\right).$$

Quindi, se $a \to 0^+$, allora $x_1 \to +\infty$ e se $a \to 0^-$ $x_1 \to -\infty$, mentre, indipendentemente dal segno di a, $x_2 \to -c/b$, che è lo zero della retta $bx + c = 0$. Infine, se $b = 0$, allora

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{-4ac}}{2a},$$

da cui per $a \to 0$, uno dei due tra x_1 e x_2 tende a $+\infty$ e l'altro a $-\infty$.

Soluzione 6.2.17 La funzione $g(x) = f(x) - x$ è tale che $g(0) = f(0) \geq 0$, mentre $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Quindi per il teorema dell'esistenza degli zeri per le funzioni continue, esisterà sempre un punto $x_0 \in [0,1]$ per il quale $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = x_0$.

Soluzione 6.2.18 Dato $n \in \mathbb{Z}$, si ha chiaramente che

$$f(n) = nf(1).$$

Se poi $x \in \mathbb{Q}$, scrivendo $x = n/m$, siccome

$$f(mx) = mf(x) = mf(n/m),$$

otteniamo che

$$f(n/m) = \frac{f(mx)}{m} = \frac{f(n)}{m} = \frac{n}{m}f(1).$$

Quindi abbiamo dimostrato che per $x \in \mathbb{Q}$,

$$f(x) = xf(1).$$

A questo punto sfruttiamo la continuità della funzione f e otteniamo, approssimando ogni $x \in \mathbb{R}$ con una successione di numeri razionali $q_n \in \mathbb{Q}$,

$$f(x) = f(\lim q_n) = \lim f(q_n) = \lim q_n f(1) = xf(1).$$

Soluzione 6.2.19 Analogamente al punto precedente, se $n \in \mathbb{Z}$, otteniamo che

$$f(n) = a^n,$$

quindi per ogni $x = n/m \in \mathbb{Q}$, si ha

$$f(x) = a^{n/m}.$$

Quindi per la continuità della funzione f, otteniamo che

$$f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se non si impone la continuità di f, esistono altre funzioni oltre all'esponenziale; difatti, la condizione $f(1) = a$ ha come conseguenza che sono ben determinati solo i valori su $\mathbb{Q}$, mentre per i numeri in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non si ha alcuna informazione in generale. Ad esempio, siccome $\sqrt{2}$ non è razionale, la funzione definita da

$$f(1) = a, \quad f(\sqrt{2}) = 2a, \quad (f(\sqrt{p}) = pa \text{ con } p \text{ primo})$$

soddisfa la proprietà $f(x+y) = f(x)f(y)$ ma non coincide con l'esponenziale.
Questo esercizio mostra che la funzione esponenziale può essere definita come l'unica funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) \\ f(1) = a > 0. \end{cases}$$

Capitolo 7

Derivate e Problemi di Massimo e Minimo

Esercizio 7.0.1 Calcolare, usando la definizione, la derivata in $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Esercizio 7.0.2 Calcolare, usando la definizione, la derivata in $x_0 = 1$ della funzione

$$f(x) = x\sqrt{x+3}.$$

Esercizio 7.0.3 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = |\sin x|,$$

non è derivabile nei punti della forma $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 7.0.4 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = \sqrt{x}\sin x$;

ii) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$;

iii) $f(x) = \dfrac{\sin e^x}{\ln(x - \tan x^2)}$;

iv) $f(x) = \left(\ln x^2\right)^2$;

v) $f(x) = \arctan \dfrac{x}{1-x^2}$;

vi) $f(x) = |\sin x|(1+\cos x);$

vii) $f(x) = \arctan(\dfrac{\sin x}{1+\cos x});$

viii) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x;$

ix) $f(x) = (\sin x)^{\tan x};$

x) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right);$

xi) $f(x) = \operatorname{arccosh}\sqrt{x^2-1};$

xii) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}};$

xiii) $f(x) = e^{\sqrt{x}}(\sin 2x + \cos 3x);$

xiv) $f(x) = (x^x)^x;$

xv) $f(x) = (\ln x)^{1/\ln x};$

xvi) $f(x) = x|x|;$

xvii) $f(x) = x^2 + \ln x;$

xviii) $f(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$

xix) $f(x) = \sin x \cos x + x;$

xx) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x};$

xxi) $f(x) = \tan x + \dfrac{1}{\cos x};$

xxii) $f(x) = \dfrac{\ln \sin x}{\cos x};$

xxiii) $f(x) = (\arctan x)^{x^2+1}.$

Esercizio 7.0.5 Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x) = x^3 + x^2 - |x| + 2$$

nell'intervallo $[-3, 4]$.

Esercizio 7.0.6 Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \left|x + \frac{1}{2}\right|.$$

Esercizio 7.0.7 Trovare massimi e minimi della funzione

$$f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$$

Esercizio 7.0.8 ($\star$) Dimostrare la seguente identità;

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 7.0.9 ($\star$) Dimostrare la seguente identità:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

per ogni $-1 \leq x \leq 1$.

Esercizio 7.0.10 ($\star$) Dimostrare le seguenti identità:

$$2\arctan(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -\pi & \text{se } x \leq -1 \\ \pi & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Esercizio 7.0.11 ($\star$) Dimostrare le seguenti identità:

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Esercizio 7.0.12 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ ax + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con a e b parametri reali, determinare a e b in modo che la funzione f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.0.13 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{se } x \leq 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con a e b parametri reali, determinare a e b in modo che la funzione f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.0.14 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b & \text{se } x \leq 2 \\ 2ax^3 + 11a & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

con a e b parametri reali, determinare a e b in modo che la funzione f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.0.15 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{se } x \le 0 \\ b\ln(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con a e b parametri reali, determinare a e b in modo che la funzione f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 7.0.16 ($\star$) Data la funzione

$$f(x) = \arctan\frac{x}{a} + \ln(1+x^2),$$

determinare il valore del parametro a in modo che la tangente al grafico di f nel punto 0 formi un angolo di $\pi/4$ con l'asse delle ascisse.

Esercizio 7.0.17 Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 + 3x + 1,$$

dire se è invertibile e calcolare quindi

$$(f^{-1})(1).$$

Esercizio 7.0.18 ($\star$) Data la funzione

$$f(x) = e^x - \sin x - 3x,$$

dimostrare che esiste un punto $x_0 \in [0,1]$ per il quale $f(x_0) = 0$.

Esercizio 7.0.19 ($\star$) Data la funzione

$$f(x) = \sin x + x,$$

dimostrare che esiste un unico punto $x_0 \in [0, \pi/4]$ per il quale $f(x_0) = 1/2$.

Esercizio 7.0.20 Dire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \pi/4 \le x \le \pi/2 \\ \\ \sin x & 0 \le x \le \pi/4 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni del teorema di Rolle.

Esercizio 7.0.21 ($\star$) Usare il teorema di Lagrange per dimostrare che

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.0.22 ($\star\star$) Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}},$$

dire se f è continua e derivabile.

Esercizio 7.0.23 Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato, determinare quello di area massima.

Esercizio 7.0.24 Tra tutte le pentole cilindriche senza coperchio con superficie laterale pari a S, determinare raggio e altezza in modo da massimizzare il volume.

Esercizio 7.0.25 Tra tutti i rettangoli con area fissata, determinare quello che ha la minima diagonale.

Esercizio 7.0.26 Trovare, tra tutti i settori circolari con perimetro fissato, quello di area massima.

Esercizio 7.0.27 Tra tutti i triangoli rettangoli di cateti a e b tali che $a + b = 5$, trovare quello di ipotenusa massima e quello di ipotenusa minima.

Esercizio 7.0.28 Dato un rettangolo di lati a e b fissati, ritagliare nei quattro vertici quattro quadrati di lato r e costruire quindi il parallelipedo di altezza r e base rettangolare di lati $a - 2r$ e $b - 2r$ (vedi figure 7.1 e 7.2). Determinare r in modo che il volume di tale parallelepipedo sia massimo.

Figura 7.1: Costruzione del parallelepipedo

Figura 7.2: Visione tridimensionale

7.1 Soluzioni

Soluzione 7.1.1 In generale, per la derivata in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Quindi, nel punto $x_0 = 1/2$, abbiamo che $f(1) = 1/2$ e dalla definizione

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2+h}{2(2+2h+h^2)} = -\frac{1}{2}.$$

Soluzione 7.1.2 Abbiamo $f(1) = 2$, e quindi

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)\sqrt{h+4} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+6h+9}{(h+1)\sqrt{h+4}+2} = \frac{9}{4}.$$

Soluzione 7.1.3 La funzione $\sin x$ è 2π–periodica e, dalla relazione $\sin(-x) = -\sin x$, segue che la funzione $f(x)$ è π–periodica. Quindi basta dimostrare che la funzione f non è derivabile in 0. Ma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1.$$

Quindi f non può essere derivabile.

Soluzione 7.1.4

i) $f'(x) = \dfrac{\sin x + 2x\cos x}{2\sqrt{x}};$

ii) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2};$

iii) $f'(x) = \dfrac{e^x \cos e^x}{\ln(x - \tan x^2)} - \dfrac{(\sin e^x)(1 - 2x - 2x\tan^2 x^2)}{(x - \tan x^2)\ln^2(x - \tan x^2)};$

iv) $f'(x) = \dfrac{4}{x}\ln x^2;$

v) $f'(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2 + x^4};$

vi) La funzione non è derivabile in $x = 0$; escluso tale punto e tenendo presente che per $x \neq 0$ si ha che $|x|' = x/|x| = |x|/x$ si ricava che $f'(x) = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}(2\cos^2 x + \cos x - 1);$

vii) $f'(x) = \dfrac{1}{2};$

viii) $f'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right);$

ix) $f'(x) = (\sin x)^{\tan x}\left(\dfrac{\ln\sin x}{\cos^2 x} + 1\right);$

x) $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1 + x^2)\sqrt{x^4 + 2x^2}};$

xi) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1};$

xii) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3(x-1)}};$

xiii) $f'(x) = e^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sin 2x + \cos 3x}{2\sqrt{x}} + 2\cos 2x - 3\sin 3x\right);$

xiv) $f'(x) = x(x^x)^x(2\ln x + 1);$

xv) $f'(x) = \dfrac{(\ln x)^{1/log x - 2}}{x}(1 - \ln\ln x);$

xvi) $f'(x) = 2|x|;$

xvii) $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x};$

xviii) $f'(x) = -\dfrac{2}{x(\ln x - 1)^2}$

xix) $f'(x) = \cos 2x + 1;$

xx) $f'(x) = \dfrac{2}{1+\sin 2x};$

xxi) $f'(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x};$

xxii) $f'(x) = \dfrac{1-\sin^2 x(1-\ln\sin x)}{\sin x - \sin^3 x};$

xxiii) $f'(x) = (\arctan x)^{x^2+1}\left(2x\ln\arctan x + \dfrac{1}{\arctan x}\right).$

Soluzione 7.1.5 Dividiamo lo studio della funzione data nello studio delle due funzioni

$$f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 2, \quad x \in [-3, 0],$$

$$f_2(x) = x^3 + x^2 - x + 2, \quad x \in [0, 4].$$

Per trovare i massimi e minimi della funzione f_1 nell'intervallo dato, calcoliamo dapprima i valori della funzione negli estremi dell'intervallo;

$$f_1(-3) = -19, \quad f_1(0) = 2.$$

Vediamo ora se la funzione ha massimi o minimi all'interno. La funzione è derivabile in $(-3, 0)$ e quindi calcoliamo la sua derivata e la poniamo uguale a 0.

$$f_1'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Si nota subito che la derivata non si annulla mai, quindi la funzione f_1 è sempre strettamente crescente, quindi il suo massimo sarà raggiunto in 0 con valore 2, mentre il suo minimo sarà raggiunto in -3 con valore -19.

Passiamo ora allo studio di f_2. I suoi valori agli estremi sono

$$f_2(0) = 2, \quad f_2(4) = 78.$$

Cerchiamo massimi e minimi interni:

$$f_2'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Questa equazione ha due soluzioni, una positiva, $1/3$, e una negativa, -1, che scartiamo in quanto fuori dell'intervallo considerato. Quindi il punto $1/3$ sarà un punto di minimo locale con

$$f_2(1/3) = \frac{49}{27} < 2.$$

In definitiva, la funzione f avrà quindi un massimo in 4 e minimo in -3.

Soluzione 7.1.6 La funzione data è definita, per via della presenza della radice, nell'intervallo $[-1,1]$. Quindi i massimi e i minimi andranno cercati nell'intervallo chiuso e limitato $[-1,1]$. Dividiamo il problema in due problemi, causa la presenza del valore assoluto. Abbiamo le due funzioni

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2} - x - \frac{1}{2}, \quad \text{su } [-1,-1/2],$$

$$f_2(x) = \sqrt{1-x^2} + x + \frac{1}{2}, \quad \text{su } [-1/2,1].$$

Vediamo anzitutto f_1; abbiamo $f_1(-1) = 1/2$, mentre $f_1(-1/2) = \sqrt{3}/2$. La derivata di f_1 è

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

che si annulla unicamente in $-\sqrt{2}/2$; in corrispondenza di tale punto il valore della funzione f_1 è $\sqrt{2} - 1/2$. Quindi,

$$\min_{x\in[-1,-1/2]} f_1(x) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}, \quad \text{assunto per } x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\max_{x\in[-1,-1/2]} f_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{assunto per } x = -\frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda f_2 invece, abbiamo che $f_2(-1/2) = \sqrt{3}/2$, mentre $f_2(1) = 3/2$. Per quanto riguarda la derivata, si ha che

$$f_2'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1$$

che si annulla in $\sqrt{2}/2$, con $f_2(\sqrt{2}/2) = \sqrt{2} + 1/2$. Quindi

$$\min_{x\in[-1/2,1]} f_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{assunto per } x = -\frac{1}{2},$$

$$\max_{x\in[-1/2,1]} f_2(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \quad \text{assunto per } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Quindi il massimo per f sarà assunto in $\sqrt{2}/2$ con valore pari a $\sqrt{2}+1/2$, mentre il minimo sarà assunto in $-\sqrt{2}/2$ con valore $\sqrt{2} - 1/2$.

Soluzione 7.1.7 Siccome

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

sarà chiaro che la funzione non ammette massimo o minimo assoluti. L'unica cosa che si potrà ricercare, sono i massimi e i minimi locali. Per quanto riguarda la derivata di f, che è definita solo per $x \neq 0$, abbiamo

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Tale derivata si annulla in 1 e -1. Siccome la derivata per x compreso tra questi due valori è negativa mentre la derivata è positiva per $|x| > 1$, allora 1 e -1 sono rispettivamente punti di massimo e minimo locale per la f, con $f(-1) = 2$ e $f(1) = -2$.

Soluzione 7.1.8 Considerando la funzione

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right),$$

abbiamo che

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{1+x^2} = 0.$$

Quindi la funzione è costante e in particolare

$$f(x) = f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 7.1.9 Detta

$$f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x),$$

otteniamo che

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

quindi la funzione è costante e in particolare

$$f(x) = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 7.1.10 Facendo la derivata della funzione

$$f(x) = 2\arctan(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

otteniamo

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2}\frac{1-x^2}{|1-x^2|}.$$

Quindi, per $x^2 > 1$, si ha che la derivata si annulla, e quindi la funzione è costante. Siccome

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan(-\infty) + \arcsin(0) = -\frac{\pi}{2},$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan(+\infty) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2},$$

segue la conclusione dell'esercizio. Si noti che si sono ottenute due costanti differenti; questo non è dovuto al fatto che la funzione data è definita su due intervalli disgiunti e la sua derivata è nulla ovunque, da cui la costanza della funzione su ognuno degli intervalli di definizione della funzione.

Soluzione 7.1.11 Dimostreremo la prima identità, le altre due si dimostrano in modo analogo. Ci sono due modi per dimostrare tale identità. Il primo modo consiste semplicemente nel calcolare

$$\sinh(\ln(x + \sqrt{(x^2+1)})).$$

Se questa quantità è pari a x, allora dalla definizione di $\operatorname{arcsin} h$ otteniamo l'identità. Ma

$$\begin{aligned}
\sinh(\ln(x+\sqrt{(x^2+1)})) &= \frac{e^{\ln(x+\sqrt{(x^2+1)})} - e^{-\ln(x+\sqrt{(x^2+1)})}}{2} \\
&= \frac{\ln(x+\sqrt{(x^2+1)}) - \frac{1}{\ln(x+\sqrt{(x^2+1)})}}{2} \\
&= \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{2(x+\sqrt{x^2+1})} = x.
\end{aligned}$$

Il secondo metodo, consiste nell'usare le derivate. Le due funzioni coincidono per $x = 0$ e sono uguali a 0. Se le loro derivate coincidono, allora le due funzioni sono uguali. Ma

$$(\operatorname{arcsin} hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

mentre

$$(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Soluzione 7.1.12 Imponiamo dapprima la condizione di continuità:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0,$$

quindi $b = 0$. Per la derivabilità,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = a = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0,$$

da cui $a = 0$.

Soluzione 7.1.13 Per la continuità,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = b,$$

quindi $b = 1$. Per la derivabilità,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = a,$$

da cui $a = 1$.

Soluzione 7.1.14 La condizione di continuità si riduce a

$$8 + b = 16a + 11a,$$

mentre la condizione di derivabilità

$$4 = 24a + 11a.$$

Gli unici due numeri che soddisfano queste condizioni sono $a = 4/35$ e $b = -172/35$.

Soluzione 7.1.15 La condizione di continuità si riduce a

$$0 = 0,$$

cioè la funzione data è comunque sempre continua indipendentemente dai parametri a e b. Per la derivabilità, otteniamo

$$a = b.$$

Soluzione 7.1.16 L'unica cosa che si sta richiedendo è che la derivata della funzione data sia pari ad 1 in 0. Calcoliamo quindi la derivata prima;

$$f'(x) = \frac{a}{a^2 + x^2} + \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Quindi

$$f'(0) = \frac{1}{a}.$$

Quindi la condizione è verificata se $a = 1$.

Soluzione 7.1.17 Per dimostrare l'invertibilità della funzione data, mostriamo che essa è strettamente monotona. Calcoliamo quindi la derivata prima

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3 > 0.$$

In particolare, la derivata prima non si annullerà mai (è sempre almeno pari a 3). Quindi, dato che f è strettamente monotona crescente, ammetterà una inversa, anch'essa monotona crescente. Tale inversa sarà anche continua ed in virtù della formula

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

la funzione inversa sarà anche derivabile. In particolare, siccome $f^{-1}(1) = 0$, avremo che

$$(f^{-1}(1))' = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}.$$

Soluzione 7.1.18 Siccome $f(0) = 1$ mentre $f(1) = 1 - \sin 1 - 3 < 0$, allora per il teorema dell'esistenza degli zeri di una funzione continua, esisterà un punto $x_0 \in (0, 1)$ per il quale $f(x_0) = 0$.

Soluzione 7.1.19 Siccome $f(0) = 0$ e $f(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \pi/4 > 1/2$, allora tutti i valori tra questi due numeri saranno assunti da f, in quanto funzione continua (corollario del teorema dell'esistenza degli zeri); in particolare esisterà un punto $x_0 \in (0, \pi/4)$ per il quale $f(x_0) = 1/2$. Inoltre, dato che $f'(x) = \cos x + 1$, si ha che su $[0, \pi/4]$ $f'(x) \geq 1 + \sqrt{2}/2$ e quindi f è strettamente monotona crescente, da cui l'unicità di x_0.

Soluzione 7.1.20 La funzione data è tale che $f(0) = 0$ e $f(\pi/2) = 0$, però tale funzione non è derivabile in tutti i punti interni a $(0, \pi/2)$. Infatti si ha un problema in $\pi/4$ in quanto

$$\lim_{x \to \pi/4^-} f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

mentre

$$\lim_{x \to \pi/4^+} f'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Soluzione 7.1.21 Prendendo due punti $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, applichiamo il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x, y]$, per avere l'esistenza di un punto $x_0 \in [x, y]$ per il quale

$$\frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \sin'(x_0) = \cos(x_0).$$

Quindi, siccome $|\cos(x_0)| \leq 1$, segue la tesi.

Soluzione 7.1.22 La funzione limite è data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Quindi la funzione f è continua ma non derivabile.

Soluzione 7.1.23 Supponiamo di avere un rettangolo generico di lati x e y. La condizione che il perimetro sia fissato, diventa

$$2x + 2y = P,$$

con $P \in \mathbb{R}_+$ numero reale fissato. L'area del rettangolo si può quindi scrivere come

$$A(x) = \frac{x(P - 2x)}{2}.$$

Questa è una funzione definita in $[0, P/2]$ e ne cerchiamo il massimo. Valutiamola negli estremi, $A(0) = 0 = A(P/2)$. Per quanto riguarda la derivata, otteniamo

$$A'(x) = \frac{P}{2} - 2x,$$

che si annulla per $x = P/4$ (quindi $y = P/4$) ed in tale punto si ha $A(P/4) = P^2/16$.

Soluzione 7.1.24 Poniamo il raggio della base del cilindro pari a r e l'altezza del cilindro pari a h. La condizione che la superficie laterale sia pari a S diventa

$$\pi r^2 + 2\pi r h = S,$$

da cui

$$h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}.$$

Il volume del cilindro diventa quindi

$$V(r) = \pi r^2 h = \frac{r(S - \pi r^2)}{2}.$$

Tale funzione va studiata nell'intervallo $[0, \sqrt{S/\pi}]$; abbiamo

$$V(0) = V(\sqrt{S/\pi}) = 0.$$

La derivata diventa quindi

$$V'(r)\frac{S - 3\pi r^3}{2}.$$

Tale derivata si annulla per $r = \sqrt{S/(3\pi)}$, dove si avrà quindi un massimo.

Soluzione 7.1.25 La condizione è, detti x e y i due lati del rettangolo, $xy = A$ con A numero reale fissato. La lunghezza al quadrato della diagonale è quindi data da

$$D(x) = x^2 + \frac{A^2}{x^2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} D(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} D(x) = +\infty.$$

Tale funzione è definita su $(0, +\infty)$. La derivata è data da

$$D'(x) = \frac{2(x^4 - A^2)}{x^3},$$

che si annulla per $x = \sqrt{A}$ (da cui $y = \sqrt{A}$).

Soluzione 7.1.26 Di un settore circolare le variabili sono il raggio r del cerchio e l'ampiezza x del settore. Il perimetro del settore circolare è dato da

$$r(x + 2) = P$$

dove P sarà quindi un numero reale fissato. L'area del settore è data da

$$A(x) = \frac{xr^2}{2} = \frac{Px}{2(x+2)^2}.$$

Tale funzione è definita per $x \in [0, 2\pi]$; abbiamo che $A(0) = 0 = A(2\pi)$. La derivata sarà data da

$$A'(x) = \frac{2P(2 - x)}{(x+2)^3}.$$

Tale derivata si annulla per $x = 2$ che sarà quindi un punto di massimo.

Soluzione 7.1.27 Scritto $b = 5 - a$, la lunghezza dell'ipotenusa al quadrato sarà data da

$$I(a) = 2a^2 - 10a + 25,$$

con $a \in [0, 5]$. Si ha che $I(0) = I(5) = 25$, mentre la derivata di I sarà

$$I'(a) = 4a - 10,$$

che si annulla per $a = 5/2$ (e quindi $b = 5/2$), che sarà l'ipotenusa di lunghezza più piccola.

Soluzione 7.1.28 Il volume del parallelepipedo è dato da

$$V(r) = (a - 2r)(b - 2r)r.$$

Tale funzione è definita in $r \in [0, \min(a, b)/2]$. La derivata è data da

$$V'(r) = 12r^2 - 4(a + b)r + ab.$$

Tale derivata si annulla per

$$r = \frac{(a + b) \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6};$$

di queste due soluzioni solo una è contenuta in $[0, \min(a, b)/2]$, e si tratta di

$$r = \frac{(a + b) - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}.$$

Tenendo poi presente che $V(0) = V(\min(a, b)/2) = 0$, il punto trovato sarà un punto di massimo.

Capitolo 8

Sviluppo asintotici e forme indeterminate

8.1 Forme indeterminate e sviluppi asintotici

Vogliamo trattare in questo capitolo il problema delle forme indeterminate, in particolar modo le forme indeterminate in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ della forma $0/0$ (gli altri tipi di indeterminazione sono riconducibili a questo). Supponiamo quindi di avere due funzioni f e g definite in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ con $f(x_0) = g(x_0) = 0$; un Teorema che può essere utile in questi casi è il seguente.

Teorema 2 (de L'Hôpital) *Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a,b) con*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{8.1}$$

forma indeterminata della forma $0/0$ o ∞/∞ e $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Se esiste il limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

allora esiste anche il limite (8.1) e vale

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Il precedente Teorema così enunciato puó essere applicato ai casi $x \to b$, $x \to x_0 \in (a,b)$ e anche nei casi in cui $a = -\infty$ e $b = +\infty$.

Per comodità di calcolo, supporremo nel seguito che $x_0 = 0$; il caso di x_0 generico si potrà ottenere considerando le funzioni $\tilde{f}(x) = f(x + x_0)$ e $\tilde{g}(x) = g(x + x_0)$.

Le forme di indeterminazione più semplici da trattare sono quelle in cui le funzioni f e g sono polinomi; infatti, se f è un polinomio di grado n che si annulla in 0, allora f è divisibile per x. Detta k la molteplicità di x come radice di f, avremo che

$$f(x) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_n x^n.$$

Analogamente, se g, polinomio di grado m ha una radice in 0 di molteplicità h, si avrà che

$$g(x) = b_h x^h + b_{h+1} x^{h+1} + \ldots + b_m x^m.$$

Sottolineiamo che per definizione di molteplicità per i polinomi f e g, $a_k \neq 0$ e $b_h \neq 0$. Notando che, fissato k, $x^p \in o(x^k)$ per ogni $p > k$, si ottiene che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots + a_n x^n}{b_h x^h + b_{h+1} x^{h+1} + \ldots + b_m x^m} \\ &= \lim_{x\to 0} x^{k-h} \frac{a_k}{b_h}.\end{aligned}$$

Si hanno quindi tre possibilità;

1. $k > h$; in questo caso $x^{k-h} \to 0$ per $x \to 0$ e quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

2. $k = h$; si trova quindi che $x^{k-h} = 1$, da cui
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_k}{b_k};$$

3. $k < h$; in tal caso $x^{k-h} \to \pm\infty$ per $x \to 0$, dove il segno è positivo se $h - k$ è pari, altrimenti è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$, da cui
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty,$$
con segno determinato dalla parità o meno di $h - k$ e dal segno del rapporto a_k/b_h.

Quindi, per lo studio delle forme indeterminate nel caso di polinomi, l'unica cosa è determinare la molteplicità di $x = 0$ come radice dei due polinomi, cioè determinare l'ordine di infinitesimo delle funzioni f e g.

8.1.1 Sviluppi asintotici

In questo paragrafo mostriamo come, per funzioni sufficientemente regolari, si possa ricondurre lo studio di una forma indeterminata $0/0$ in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ alla discussione del paragrafo precedente. La questione è se si possano sostituire le funzioni f e g con due polinomi P e Q in modo tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

La risposta è data dal seguente Teorema.

Teorema 3 (Teorema di Taylor) *Data una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$, esiste un unico polinomio P_n di grado n per il quale*

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n); \tag{8.2}$$

tale polinomio è dato da

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots \\
&\quad \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (8.3)
\end{aligned}
$$

La dimostrazione di tale Teorema può essere fatta induttivamente, usando il Teorema di de L'Hôpital; la formula (8.2) viene detta Formula di Taylor con resto di Peano; esistono altre versioni, come la Formula di Taylor con resto di Lagrange e la Formula di Taylor con resto integrale. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange serve che f sia derivabile $n+1$ volte e si scrive nella forma

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(z(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},
$$

essendo $z(x)$ un punto dell'intervallo di estremi x_0 e x (per la dimostrazioni di tale formula si userà in modo induttivo il Teorema di Lagrange).

Per il calcolo quindi dei limiti in forma indeterminata, avremo quindi che se P_n è il polinomio di Taylor non nullo di grado n associato a f e Q_m il polinomio di Taylor non nullo associato a g,

$$
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x) + o((x-x_0)^n)}{Q_m(x) + o((x-x_0)^m)} = \lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.
$$

8.2 Esercizi

Esercizio 8.2.1 Usare il Teorema di de L'Hôpital per dimostrare le seguenti relazioni di limite:

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^n e^{-x} = 0.
$$

Esercizio 8.2.2 Usare il Teorema di de L'Hôpital per dimostrare il seguente risultato.

Proposizione 4 *Data una funzione f continua in un intorno di x_0 e derivabile per $x \neq x_0$, se esiste il*

$$
\lim_{x\to x_0} f'(x) = \lambda,
$$

allora f è derivabile in x_0 e vale $f'(x_0) = \lambda$.

Dimostrare inoltre che la continuità di f è importante.

Esercizio 8.2.3 Dimostrare che la funzione

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}
$$

è derivabile in 0 e calcolarne la derivata.

Esercizio 8.2.4 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in 0 ma la derivata non è continua.

Esercizio 8.2.5 Dimostrare che la funzione

$$e^x - 1 - x$$

è, in $x_0 = 0$, infinitesima di ordine due.

Esercizio 8.2.6 Convincersi che il Teorema di de L'Hôpital non può applicarsi alle seguenti coppie di funzioni;

$$f(x) = x^2 \sin 1/x, g(x) = x, \quad f(x) = \sin x + 1, g(x) = x$$

per $x_0 = 0$.

Esercizio 8.2.7 Rendersi conto con il seguente esempio che non sempre è equivalente per applicare il Teorema di de L'Hôpital vedere una forma indeterminata come $0/0$ o ∞/∞;

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2}.$$

Esercizio 8.2.8 Convincersi con il seguente esempio che non sempre il Teorema di de L'Hôpital semplifica i conti;

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cos(x^2-2x)\sin x}{x\ln(e+\sqrt{3x-\sin x})}.$$

Esercizio 8.2.9 Scrivere il polinomio di Taylor di grado 12 della funzione $f(x) = \sin^2 x^3$ in $x_0 = 0$.

Esercizio 8.2.10 Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x = 0$ di grado 5 della funzione $f(x) = (\cos x)^x$.

Esercizio 8.2.11 Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$ della funzione

$$f(x) = \cos\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}.$$

Esercizio 8.2.12 Determinare l'ordine di infinito per $x \to -\infty$ della funzione

$$f(x) = \sin\left(\arctan x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}$$

e calcolare

$$\lim_{x\to -\infty} x^3 f(x).$$

Esercizio 8.2.13 Determinare l'ordine di infinito per $x \to 0^+$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\ln \cos \sqrt{x}}$$

e calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\pi/2 - \arctan 1/x}{\ln \cos \sqrt{x}}.$$

Esercizio 8.2.14 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - xe^x + x^2 \cos x}{x^3}.$$

Esercizio 8.2.15 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{1 + \ln(1 - x^2/2) - \cos x}.$$

Esercizio 8.2.16 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x^2 - \tan^2 x}{\sqrt{1 - x^2} - \cos x}.$$

Esercizio 8.2.17 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -1} \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right)(x^2 - 2x - 3).$$

Esercizio 8.2.18 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} \tan\left(\frac{\pi}{2} x\right) \ln x.$$

Esercizio 8.2.19 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x \ln x}{\ln(1 + \sqrt{x})}.$$

Esercizio 8.2.20 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{\frac{x^2+x}{2}} - 1}{\ln x}.$$

Esercizio 8.2.21 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{\frac{5x^2-x}{x-1}}.$$

Esercizio 8.2.22 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\ln\left(\cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + e^{1/2x} - 1\right).$$

Esercizio 8.2.23 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos^2(2x)}{1-e^{-3x^2}}.$$

Esercizio 8.2.24 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right) - \ln 2}{1-\cos^2(3x)}.$$

Esercizio 8.2.25 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin x - 1 \cos^2 x}{e^{2x-\pi} - 1 + \pi - 2x}.$$

Esercizio 8.2.26 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - \ln(1+x^2)}{x^3} \cdot \sin\frac{1}{x}.$$

Esercizio 8.2.27 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x\cos x}{x^3} \cdot \ln\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right).$$

Esercizio 8.2.28 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan^2 x - 2x^2 + e^{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + e^{-1/x}} \cdot \sin\frac{1}{x}.$$

Esercizio 8.2.29 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\ln(x^2+3) - 2\ln|x|\right)}{e^{-|x|^{-5/2}} - 1}.$$

Esercizio 8.2.30 Studiare, al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2}.$$

Esercizio 8.2.31 Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = e^x + a\sin x + b\cos x$$

ha in $x = 0$ il massimo ordine di infinitesimo.

8.3 Soluzioni

Soluzione 8.3.1 Il limite si presenta effettiavamente nella forma indeterminate $0/0$ e possiamo quindi applicare il Teorema di de L'Hôpital alle funzioni $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x^3$ in modo da ottenere

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}.$$

Sfruttando quindi il limite notevole (6.0.8), **ii)**, si ricava che

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{6},$$

e quindi esiste anche il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Questo risultato afferma che la funzione $\sin x - x$ è infinitesima in 0 ed ha ordine di infinitesimo pari a 3, cioè $\sin x - x \sim -x^3/6$ in $x = 0$, dove si usa il simbolo $f \sim_{x_0} g$ per dire che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

(nel caso $x_0 = 0$ si usa solitamente il simbolo $\sim$). Dire che una funzione f ha ordine di infinitesimo in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ pari ad un certo numero $\alpha \in \mathbb{R}_+$ significa quindi che $f = o((x-x_0)^a)$ per ogni $a < \alpha$ in quanto

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x^a} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)}{x^\alpha}}_{\to 1} x^{\alpha - a} = 0$$

in quanto l'esponente $\alpha - a$ è positivo. Per quanto riguarda il secondo limite, il risultato si può ottenere per induzione; infatti, per $n = 0$ si ha semplicemente

$$\lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0,$$

mentre se si suppone vero il risultato per $n \in \mathbb{N}$, applicando de L'Hôpital a $f(x) = x^{n+1}$ e $g(x) = e^x$ si ottiene che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = (n+1) \lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Da questo risultato si ricava che la funzione e^{-x} per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine $+\infty$, nel senso che

$$e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o equivalentemente

$$x^n = o(e^x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione 8.3.2 Basta applicare il Teorema alle funzioni $f(x) - f(x_0)$ e $x - x_0$ e si ottiene quindi che esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(x) = \lambda,$$

da cui la derivabilità di f in x_0. Si noti che se si prende la funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

allora la funzione non è continua in 0 e quindi chiaramente anche non derivabile in 0, però f è derivabile per $x \neq 0$ e la derivata è nulla, da cui

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

Soluzione 8.3.3 Per dimostrare la derivabilità della funzione data si potrebbe usare direttamente la definizione di derivata di f in $x = 0$ e utilizzare l'esercizio 8.2.1. Utilizzeremo invece la Proposizione 4 che ha il vantaggio di dimostrare direttamente anche la continuità della derivata in 0. Chiaramente la funzione $x \mapsto \sin x/x$ è derivabile per $x \neq 0$ e si ha

$$f'(x) = x\left(\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{x - \sin x}{x^3}\right)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{x - \sin x}{x^3}\right) = 0,$$

da cui l'esistenza di $f'(0) = 0$.

Soluzione 8.3.4 la funzione data è chiaramente derivabile per $x \neq 0$ e

$$f'(x) = 2x \sin x - \cos\frac{1}{x}.$$

Si noti che

$$\nexists \lim_{x\to 0} f'(x),$$

quindi non si può applicare la Proposizione 4. Ciononostante, la funzione è derivabile in 0 in quanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Soluzione 8.3.5 Tornando all'esercizio, Vogliamo studiare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2};$$

applichiamo quindi il teorema di de L'Hôpital per ottenere che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

grazie al limite notevole 6.0.8, **vii)**, da cui se ne deduce che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

cioè

$$e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Soluzione 8.3.6 Nel caso della prima coppia di funzioni siamo in presenza di una forma intederminata 0/0 ma è facile rendersi conto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x} = 0; \tag{8.4}$$

per quanto riguarda le derivate, si ha che

$$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La non esistenza di questo limite non è in contraddizione con il Teorema in quanto esso afferma che se tale limite esiste, allora coincide con il limite (8.4), ma nulla si può dire se il limite per le derivate non esiste. Per la seconda coppia di funzioni si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

mentre

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1;$$

anche in questo caso non si trova una contraddizione al Teorema, in quanto il limite di partenza non si presenta nella forma indeterminata $0/0$ e l'equivalente forma ∞/∞, ma nella semplice forma $1/0$, che non è indeterminata.

Soluzione 8.3.7 Il limite può essere visto equivalentemente come forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞; conviene in questo caso ricondurla a questo secondo caso di indeterminazione. Applichiamo quindi il Teorema di de L'Hôpital alle funzioni $f(x)=1/x^2$ e $g(x)=e^{1/x}$ per ottenere che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-1/x^2}{1/x^2e^{1/x}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{e^{1/x}}=0,$$

e quindi

$$\exists\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x^2}=0.$$

Provare a vedere cosa succede se si applica il Teorema alle funzioni $f(x)=e^{-1/x}$ e $g(x)=x^2$.

Soluzione 8.3.8 Tenendo presente che per $x\to 0$ si ha che $e^{x^2}\to 1$, $\cos(x^2-2x)\to 1$, $\ln(e+\sqrt{3x-\sin x})\to 1$ e il limite notevole (6.0.8), **i)**, si ricava immediatamente che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos(x^2-2x)\sin x}{x\ln(e+\sqrt{3x-\sin x})}=1.$$

Provare a vedere cosa succede se si cerca di applicare il Teorema di de L'Hôpital.

Soluzione 8.3.9 Dallo sviluppo $\sin y=y-y^3/6+o(y^3)$, ponendo $y=x^3$ che

$$\sin x^3=x^3-\frac{x^9}{6}+o(x^6).$$

Dalla formula del quadrato del trinomio si ottiene quindi che

$$\begin{aligned}\sin^2 x^3 &= \left(x^3-\frac{x^9}{6}+o(x^6)\right)^2\\ &= x^6+\frac{x^{18}}{36}+o(x^9)^2-\frac{x^{12}}{3}+2x^3o(x^9)-\frac{x^9}{3}o(x^9).\end{aligned}$$

Tenendo presente che $2x^3o(x^9)=o(x^{12})$, $o(x^9)^2=o(x^{18})$, $x^{18}/36=o(x^{12})$, $-x^9/3o(x^9)=o(x^{18})=o(x^{12})$, se ne deduce che

$$P_{12}(x)=x^6-\frac{x^{12}}{3}.$$

Soluzione 8.3.10 Si ha che

$$\begin{aligned}
(\cos x)^x &= e^{x\ln\cos x} = e^{x\ln(1-x^2/2+x^4/24+o(x^4))}\\
&= \exp\Big(x\cdot\Big(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big)^2\\
&\quad +o\Big(\Big(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\Big)^2\Big)\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+o(x^5)\Big)\\
&= 1-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+o(x^5)
\end{aligned}$$

e quindi

$$P_5(x) = 1-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+o(x^5).$$

Soluzione 8.3.11 Tenendo presente gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+o(y^2), \qquad \sqrt[3]{1+y} = 1+\frac{y}{3}+o(y)$$

applicati a $y = 1/\sqrt{x}$ per la funzione coseno e $y = 1/x$ per la radice, si ottiene che

$$f(x) = 1-\frac{1}{2x}-1-\frac{1}{3x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big) = -\frac{5}{6x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Quindi per $x \to +\infty$ si ha che $f(x) \sim -5/(6x)$, cioè la funzione è infinitesima di ordine 1.

Soluzione 8.3.12 Una identità utile è la seguente;

$$\arctan x + \frac{\pi}{2} = -\arctan\Big(\frac{1}{x}\Big). \tag{8.5}$$

Difatti, tenendo presente che $\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha$ e $\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha$ si ottiene che

$$\begin{aligned}
\tan\Big(\arctan x + \frac{\pi}{2}\Big) &= \frac{\sin(\pi/2+\arctan x)}{\cos(\pi/2+\arctan x)}\\
&= \frac{\cos(-\arctan x)}{\sin(-\arctan x)}\\
&= -\frac{1}{\tan(\arctan x)} = -\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

da cui la (8.5). Quindi

$$\begin{aligned}
\sin\Big(\arctan x+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\Big)+\frac{1}{x^3} &= \sin\Big(-\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\Big)+\frac{1}{x^3}\\
&= \sin\Big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big)+\frac{1}{x^3}\\
&= \sin\Big(\frac{1}{3x^3}+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big)+\frac{1}{x^3}\\
&= \frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x^3}+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big) = \frac{4}{3x^3}+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).
\end{aligned}$$

e quindi f ha ordine di infinitesimo pari a 3 per $x \to \infty$. Otteniamo in particolare che

$$\lim_{x\to\infty} x^3 f(x) = \frac{4}{3}.$$

Soluzione 8.3.13 Dagli sviluppi di Tayolor del coseno e del logaritmo, si ottiene che

$$\ln\cos\sqrt{x} = \ln\Big(1 - \frac{x}{2} + o(x)\Big) = -\frac{x}{2} + o(x)$$

e quindi per $x \to 0^+$ la funzione f è un infinito di ordine 1, cioè

$$f \sim -\frac{2}{x}.$$

In particolare se ne deduce che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{x}\arctan x = -2.$$

Soluzione 8.3.14 Siamo in presenza di un limite per $x \to 0$ con una forma indeterminata del tipo $0/0$. Possiamo quindi sfruttare i seguenti sviluppi di Taylor:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \cos x = 1 + o(x)$$

da cui si ottiene che

$$\sin x - xe^x + x^2\cos x = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3),$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^x + x^2\cos x}{x^3} = -\frac{2}{3}.$$

Soluzione 8.3.15 Per quanto riguarda il numeratore, sfruttiamo lo sviluppo di Taylor

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3),$$

valido per $y \to 0$, per il primo addendo con $y = x^2$ e per il secondo con $y = x$. Tenendo presente quindi la formula per il quadrato di un trinomio, si ottiene che

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= (\sin x)^2 = \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^2 \\
&= x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^3)^2 - \frac{x^4}{3} + 2xo(x^3) - \frac{x^3}{3}o(x^3).
\end{aligned}$$

Si noti che $o(x^3)^2 = o(x^6)$, $2xo(x^3) = o(x^4)$, $-\frac{x^3}{3}o(x^3) = o(x^6)$; tenuto presente quindi che l'infinitesi di ordine più basso è $o(x^4)$, si ricava che

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Per quanto riguarda il denominatore, utilizziamo gli sviluppi $\ln(1+y) = y - y^2/2 + o(y)$ con $y = -x^2/2$, si ha

$$\ln\Big(1 - \frac{x^2}{2}\Big) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

da cui
$$1+\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-\cos x=-\frac{x^4}{6}+o(x^4).$$
In definitiva si ottiene che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2-\sin^2 x}{1+\ln(1-x^2/2)-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/3+o(x^4)}{-x^4/6+o(x^4)}=-2.$$

Soluzione 8.3.16 Per quanto riguarda il numeratore, ci si comporta come nell'esercizio precedente sfruttando lo sviluppo
$$\tan y=y+\frac{y^3}{3}+o(y^3)$$
con $y=x^2$ e $y=x$ rispettivamente, in modo da trovare
$$\tan x^2-\tan^2 x=-\frac{2}{3}x^4+o(x^4).$$
Per quanto riguarda il denominatore grazie allo sviluppo di Taylor
$$\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2)$$
applicato con $y=-x^2$, si ottiene che
$$\sqrt{1-x^2}-\cos x=-\frac{1}{6}x^4+o(x^4),$$
da cui
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2-\tan^2 x}{\sqrt{1-x^2}-\cos x}=4.$$

Soluzione 8.3.17 L'unica cosa a cui prestare attenzione in questo esercizio è che il limite viene fatto per $x\to -1$ e non $x\to 0$. Possiamo subito notare che
$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$
e che
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\sin(\frac{\pi}{2}(x+1))}.$$
Quindi si può risolvere l'esercizio in vari modi; o facendo lo sviluppo di Taylor della funzione $\cos(\frac{\pi}{2}x)$ intorno al punto $x=-1$, oppure utilizzare lo sviluppo di $\sin y$ in $y=0$ applicandolo poi con $y=\frac{\pi}{2}(x+1)$, oppure con un limite notevole. Si ottiene comunque che
$$\lim_{x\to -1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)(x^2-2x-3)=\frac{8}{\pi}.$$

Soluzione 8.3.18 Come per l'esercizio precedente, l'unica cosa da tener presente è che si sta facendo il limite per $x\to 1$. Tenendo presente che
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))}$$
e che $\ln(x)=\ln(1+x-1)$, si ottiene che
$$\lim_{x\to 1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln x=\lim_{x\to 1}-\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))}\ln(1+x-1)=-\frac{2}{\pi}.$$

Soluzione 8.3.19 Utilizzando gli sviluppi

$$\tan x = x + o(x), \quad \ln(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}),$$

si ottiene che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x \ln x}{\ln(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = 0$$

grazie al limite notevole (6.0.8), **xi)**. Si noti che in questo caso non ha alcun senso fare lo sviluppo di Taylor di $\ln x$ in quanto tale funzione non è neanche definita per $x = 0$.

Soluzione 8.3.20 Questo esercizio si può risolvere direttamente con una razionalizzazione e riconducendolo ad un limite notevole. Volgliamo però applicare gli sviluppi di Taylor centrate in $x = 1$ alle funzioni

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x}{2}}, \quad g(x) = \ln x.$$

Si ha che $f(1) = 1$ e

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2}\sqrt{\frac{2}{x^2+x}}, \quad f'(1) = \frac{3}{2};$$

analogamente $g(1) = 0$ e

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(1) = 1.$$

Si ottiene quindi che

$$f(x) = f(1) + f'(1) + o(x-1) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + o(x-1),$$

$$g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + o(x-1) = (x-1) + o(x-1),$$

da cui

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\frac{x^2+x}{2}} - 1}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}(x-1) + o(x-1)}{x-1+o(x-1)} = \frac{3}{2}.$$

Soluzione 8.3.21 Possiamo scrivere

$$\left(\frac{x+3}{x}\right)^{\frac{5x^2-x}{x-1}} = \left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3(5x^2-x)}{x(x-1)}};$$

tenendo presente che per $x \to +\infty$

$$\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}} \to e$$

e che

$$\frac{3(5x^2-x)}{x(x-1)} \to 15$$

se ne deduce che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{\frac{5x^2-x}{x-1}} = e^{15}.$$

Analogamente si poteva anche scrivere

$$\left(\frac{x+3}{x}\right)^{\frac{5x^2-x}{x-1}} = \exp\left(\frac{5x^2-x}{x-1}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right);$$

quindi dato che per $x \to +\infty$ $3/x \to 0$, possiamo utilizzare lo sviluppo

$$\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ed ottenere lo stesso risultato.

Soluzione 8.3.22 Utilizziamo gli sviluppi

$$\cos\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad e^{1/2x} = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

si ricava quindi che, grazie allo sviluppo $\ln(1+y) = y - y^2/2 + o(y^2)$ applicato con $y = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

In questo passaggio si è tenuto che

$$\frac{1}{48x^3}, -\frac{1}{576x^4} \in o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

oltre al fatto che

$$o\left(\frac{1}{x^4}\right) \in o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad o\left(\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2\right) \in o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

In definitiva si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + e^{1/2x} - 1\right) = \frac{1}{24}.$$

Soluzione 8.3.23 Possiamo scrivere

$$\ln\cos^2(2x) = 2\ln\cos(2x) = 2\ln\left(1 - 2x^2_o(x^2)\right) = -4x^2 + o(x^2)$$

e quindi, grazie al limite notevole (6.0.8), **vii)**, si ricava che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos^2(2x)}{1-e^{-3x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-4x^2+o(x^2)}{-3x^2}\frac{-3x^2}{1-e^{-3x^2}} = -\frac{4}{3}.$$

Soluzione 8.3.24 Possiamo scrivere

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3),$$

da cui

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin(2x)}{x}-\ln 2}{1-\cos^2(3x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(2-\frac{8}{3}x^2+o(x^2)\right)-\ln 2}{1-\cos^2(3x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln 2+\ln\left(1-\frac{4}{3}x^2+o(x^2)\right)-\ln 2}{1-\cos^2(3x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}x^2+o(x^2)}{9x^2}\cdot\frac{9x^2}{1-\cos^2(3x)}\\
&= -\frac{4}{27}\cdot 2=-\frac{8}{27}.
\end{aligned}$$

Soluzione 8.3.25 Per quanto riguarda il denominatore si ha che

$$e^{2x-\pi}=1+(2x-\pi)+\frac{(2x-\pi)^2}{2}+o((2x-\pi)^2),$$

mentre se applichiamo lo sviluppo di Taylor in $x=\pi/2$ alla funzione $\sin x-1$

$$\begin{aligned}
\sin x-1 &= (\sin x-1)_{|x=\frac{\pi}{2}}+(\cos x)_{|x=\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\
&\quad+\frac{(-\sin x)_{|x=\frac{\pi}{2}}}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

mentre per $\cos^2 x$ si ha

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \left(-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+o\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2\\
&= \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1-\cos^2 x}{e^{2x-\pi}-1+\pi-2x} &= \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)}{\frac{1}{2}(2x-\pi)^2+o((2x-\pi)^2)}\\
&= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Soluzione 8.3.26 Sfruttiamo lo sviluppo

$$\sin y=y+o(y)=y+o(y^2)=y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)$$

per dedurne che

$$\frac{\sin x^2-\ln(1+x^2)}{x^3}=\frac{x^2+o(x^4)-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^3}=\frac{x}{3}+o(x),$$

da cui, siccome vale $|\sin 1/x| \leq 1$, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - \ln(1+x^2)}{x^3} \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{3} + o(x)\right) \cdot \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Si noti che qui abbiamo sfruttato solo il fatto che il prodotto di una funzione f con

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

per una funzione g tale che $|g(x)| \leq M$, vale

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0; \tag{8.6}$$

difatti, se è vero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui $|x - x_0| < \delta$ implica $|f(x)| \leq \varepsilon$, allora con lo stesso δ si ottiene che $|f(x)g(x)| \leq M\varepsilon$, cioè la (8.6). Si noti infine che non si è fatto lo sviluppo di $\sin 1/x$, in quanto per $x \to 0$ $1/x \to \pm\infty$, e quindi non ha senso parlare di sviluppo per tale funzione.

Soluzione 8.3.27 Come notato nel precedente esercizio, non ha senso fare lo sviluppo di $\sin 1/x$; notiamo per il momento che

$$0 \leq \ln\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) \leq \ln 3.$$

Inoltre si ha che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x\cos x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo che la funzione

$$f(x) = \frac{\tan x - x\cos x}{x^3}$$

tende al numero reale $5/6 \neq 0$ per $x \to 0$ ed essa viene moltiplicata per la funzione oscillante

$$g(x) = \ln\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right);$$

ci aspettiamo quindi che il prodotto di queste due funzioni non ammetta limite. Per dimostrare questo troviamo due successioni a_n e b_n entrambe convergenti a 0 e per le quali

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)g(a_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(b_n)g(b_n). \tag{8.7}$$

È chiaro che basta trovare due qualsiasi successioni che soddisfino la (8.7); sceglieremo le successioni in modo che

$$\sin\frac{1}{a_n} = -1, \quad \sin\frac{1}{b_n} = 1,$$

cosa che ad esempio succede per le successioni

$$a_n = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi n}, \quad b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Soluzione 8.3.28 Osserviamo anzitutto che $e^{-1/x} \in o_{0^+}(\sqrt[3]{x})$; infatti con il cambio di variabili $y = -1/\sqrt[3]{x}$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{y\to -\infty} -\frac{y}{e^{-y^3}} = 0$$

(l'ultimo passaggio si può ottenere applicando il Teorema di de L'Hôpital). Quindi, siccome

$$\arctan^2 x - 2x^2 + e^{x^2} - 1 = (x + o(x))^2 - 2x^2 + 1 + x^2 + o(x^2) - 1 = o(x^2),$$

se ne deduce che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan^2 x - 2x^2 + e^{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + e^{-1/x}} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} x^{2-1/3}\frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

in quanto l'esponente $2 - 1/3$ è positivo e quindi $x^{2-1/3} \to 0$ per $x \to 0$. Infine, dalla limitatezza di $\sin 1/x$, si conclude che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan^2 x - 2x^2 + e^{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + e^{-1/x}} \cdot \sin\frac{1}{x} = 0.$$

Soluzione 8.3.29 Tenendo presente che per $x \to -\infty$ si ha che $|x|^{-5/2} \to 0$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\ln(x^2+3) - 2\ln|x|\right)}{e^{-|x|^{-5/2}} - 1} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\ln(x^2+3) - \ln x^2\right)}{-|x|^{-5/2}} \cdot \frac{-|x|^{-5/2}}{e^{-|x|^{-5/2}} - 1} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(\ln(1 + 3/x^2)\right)}{-|x|^{-5/2}} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{3}{x} + o(1/x)}{-x^{-2}|x|^{-1/2}} \\
&= \lim_{x\to -\infty} -3x|x|^{1/2} = +\infty.
\end{aligned}$$

Soluzione 8.3.30 Si ha che

$$\begin{aligned}
e^{ax} + e^x - 2 &= 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + 1 + x + \frac{x^2}{2} - 2 + o(x^2) \\
&= (a+1)x + \frac{a^2+1}{2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

e quindi la funzione $e^{ax} + e^x - 2$ è infinitesima di ordine 1 se $a \neq -1$, mentre è infinitesima di ordine 2 per $a = -1$. Quindi, se $a \neq -1$ il limite non esiste in quanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a+1}{x} = \pm\infty.$$

Per $a = -1$ si ha invece che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} + e^x - 2}{x^2} = \frac{a^2+1}{2} = 1.$$

Soluzione 8.3.31 Dato che

$$f(x) = (b+1) + (a+1)x + \frac{1-b}{2}x^2 + o(x^2)$$

si avrà massimo ordine di infinitesimo se $b = -1$ e $a = -1$, nel qual caso si ottiene che $f(x) \sim x^2$ per $x \to 0$.

Capitolo 9

Grafici di Funzioni

Tracciare i grafici delle seguenti funzioni.

Esercizio 9.0.1

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x};$$

Esercizio 9.0.2

$$f(x) = \left| \frac{e^x - 1}{1 + |x|} \right|;$$

Esercizio 9.0.3

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 6}{x + 2};$$

Esercizio 9.0.4

$$f(x) = \arcsin \frac{x}{x + 1};$$

Esercizio 9.0.5

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x};$$

Esercizio 9.0.6

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x};$$

Esercizio 9.0.7

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1};$$

Esercizio 9.0.8

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}};$$

Esercizio 9.0.9

$$f(x) = \ln \frac{1 - x}{1 + x};$$

Esercizio 9.0.10

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x - 1}{x^3}};$$

Esercizio 9.0.11

$$f(x) = \left| \frac{x}{x - 1} \right|;$$

Esercizio 9.0.12

$$f(x) = \min \left(\frac{1}{x^4}, x^2 \right);$$

Esercizio 9.0.13

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x - 1};$$

Esercizio 9.0.14

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x;$$

Esercizio 9.0.15

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{4x + 1};$$

Esercizio 9.0.16

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x};$$

Esercizio 9.0.17

$$f(x) = \sin x + \cos x;$$

Esercizio 9.0.18

$$f(x) = \ln \left| \ln(x^2 - 1) \right| ;$$

Esercizio 9.0.19

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x};$$

Esercizio 9.0.20

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{2}{2 + \cos x} \right) ;$$

Esercizio 9.0.21

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$$

Esercizio 9.0.22

$$f(x) = \min \left(5, \frac{x^2}{|x-1|} \right) ;$$

Esercizio 9.0.23

$$f(x) = xe^{1/(1+x)};$$

Esercizio 9.0.24

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x};$$

Esercizio 9.0.25

$$f(x) = \ln(x - \ln x);$$

Esercizio 9.0.26

$$f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-1};$$

Esercizio 9.0.27

$$f(x) = \sqrt{1 - \ln(1-x)};$$

Esercizio 9.0.28

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x} + \frac{3}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) ;$$

Esercizio 9.0.29

$$f(x) = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}};$$

Esercizio 9.0.30

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+1};$$

Esercizio 9.0.31

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}};$$

Esercizio 9.0.32

$$f(x) = \ln \left(\frac{2|x| - 1}{x + 2} \right)^2 ;$$

Esercizio 9.0.33

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{|x-1|}};$$

Esercizio 9.0.34

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x};$$

Esercizio 9.0.35

$$f(x) = \ln(1 + \sin x + |\sin x|).$$

9.1 Soluzioni

I grafici delle funzioni proposte sono dati in Appendice **??**; diamo qui una piccola traccia dei calcoli che portano a tali grafici.

Soluzione 9.1.1 **i)** Dominio: $D = (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1/e$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \geq 1/e$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

viii) Zeri della derivata: $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq 1$, quindi $x = 1$ è un massimo con $f(1) = 1$.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: $f''(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt{e}$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \geq \sqrt{e}$.

Soluzione 9.1.2 i) Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x = \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x + 1}{(x+1)^2} & \text{per } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{(x-2)e^x + 1}{(1-x)^2} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: $f'(x) = 0$ in un unico punto $x_1 < 0$ (si trova per via grafica).

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq x_1$ e per $x \geq 0$, quindi il punto x_1 è un punto di massimo e 0 è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+1)e^x - 2}{(x+1)^3} & \text{per } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{(4x-5-x^2)e^x + 2}{(1-x)^3} & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: $f''(x) = 0$ in due punti, uno $x_2 < x_1 < 0$ ed uno $x_3 > 0$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x < x_2$ e per $x > x_3$.

Soluzione 9.1.3 i) Dominio: $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = (3 \pm \sqrt{33})/2$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $-2 < x < (3 - \sqrt{33})/2$ e per $x > (3 + \sqrt{33})/2$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x - 5$ è un asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0, -4$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq -4$ e per $x \geq 0$, quindi si ha un massimo in -4 ed un minimo in 0.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x > -2$.

Soluzione 9.1.4 i) Dominio: $D = [-1/2, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \geq 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}},$$

tale derivata è definita in $(-1/2, +\infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{3x+2}{(x+1)^2(2x+1)^{3/2}}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: non si annulla mai in D.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre negativa.

Soluzione 9.1.5 **i)** Dominio: $D = (0, 1/e) \cup (1/e, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $0 < x < 1/e$ e per $x \geq 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to1/e^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to1/e^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva in D.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{\ln x + 3}{x^2(1+\ln x)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = e^{-3}$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $1/e^3 < x \leq 1/e$.

Soluzione 9.1.6 **i)** Dominio: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x > 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x + 1$ è un asintoto obliquo per la funzione sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = \pm 1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq -1$ e per $x \geq 1$.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \geq 0$.

Soluzione 9.1.7 **i)** Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = -\sqrt[3]{3}$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $-\sqrt[3]{3} \leq x < -1$ e per $x > 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x(x^3 - 3x - 6)}{(x^2 - 1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla solo per $x = 0$ e in un secondo punto $x_1 > 0$ (la funzione $x^3 - 3x - 6$ ha massimi e minimi locali entrambi negativi).

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq 0$ e per $x \geq x_1$. Quindi 0 è un punto di massimo e x_1 è un punto di minimo.

Soluzione 9.1.8 **i)** Dominio: $D = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono né simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$, mentre la retta $y = -x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 1}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{x^3 - 1}}$$

tale derivata è definita in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla in $-1/(\sqrt[3]{2})$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq -1/(\sqrt[3]{2})$.

Soluzione 9.1.9 **i)** Dominio: $D = (-1, 1)$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è dispari, ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $-1 < x \leq 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre negativa.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = 0$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $-1 < x \leq 0$.

Soluzione 9.1.10 **i)** Dominio: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono né simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x < 0$ e per $x \geq 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x^3}\right)^{-2/3}\frac{3-2x}{x^4}$$

il dominio della derivata è $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1 + \infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 3/2$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x < 0$ e per $1 < x \leq 3/2$, quindi $3/2$ è un punto di massimo.

Soluzione 9.1.11 **i)** Dominio: $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{per } x \le 0 \text{ e per } x > 1 \\ \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{per } 0 \le x < 1. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \le x < 1$.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-1)^3} & \text{per } x \le 0 \text{ e per } x > 1 \\ \\ -\dfrac{1}{(x-1)^3} & \text{per } 0 \le x < 1. \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $0 \le x < 1$ e per $x > 1$.

Soluzione 9.1.12 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è pari, ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x^5} & \text{per } x < -1 \text{ e per } x > 1, \\ \\ 2x & \text{per } -1 < x < 1, \end{cases}$$

il dominio della derivata è inoltre $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0$.

ix) Segno della derivata: la derivata è crescente per $x < -1$ e per $0 \le x < 1$, quindi i punti -1 e 1 sono punti di massimo mentre 0 è punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{20}{x^6} & \text{per } x < -1 \text{ e per } x > 1, \\ \\ 2 & \text{per } -1 < x < 1, \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre positiva.

Soluzione 9.1.13 **i)** Dominio: $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono né simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = -\sqrt[3]{3}$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \leq -\sqrt[3]{3}$ e per $x > 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 3}{(x-1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: siccome la funzione a numeratore nella derivata ha massimo locale in 0 con valore negativo e minimo locale in 1 con valore sempre negativo, ne segue che esiste un unico punto $x_1 > 1$ tale che la derivata si annulla in x_1.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq x_1$, quindi x_1 è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 6}{(x-1)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: siccome la derivata della funzione a numeratore è pari a $6(x-1)^2$, ne segue che la funzione a numeratore è sempre crescente, quindi, siccome in 0 è positiva, ne segue che esiste un unico punto $x_2 < 0$ per il quale la derivata seconda do f si annulla.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \leq x_2$ e per $x > 1$.

Soluzione 9.1.14 **i)** Dominio: $D = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty. \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = -2x - 1/2$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1,$$

il dominio della derivata è $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x > 0$.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{1}{4(x^2+x)^{3/2}}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre negativa.

Soluzione 9.1.15 i) Dominio: $D = (-\infty, -1/4) \cup (-1/4, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x < -1/4$ e per $x \geq 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1/4^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-1/4^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{(1 - x - 4x^2)e^{-x}}{(4x+1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = (-1 \pm \sqrt{17})/8$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per

$$(-1 - \sqrt{17})/8 \leq x < -1/4$$

e per

$$-1/4 < x \leq (-1 + \sqrt{17})/8.$$

Soluzione 9.1.16 i) Dominio: $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è pari, ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai (si confrontino i grafici delle funzioni $\arctan x$ e $x/(x^2+1)$, andando a notare che la derivata della prima è sempre maggiore della derivata della seconda).

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x < 0$, quindi 0 è un punto di massimo.

Soluzione 9.1.17 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è 2π–periodica, ma non ha simmetrie. Quindi studiamo la funzione nel dominio $[0, 2\pi]$.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 3\pi/4, 7\pi/4$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $0 \leq x \leq 3\pi/4$ e per $7\pi/4 \leq x \leq 2\pi$.

v) Limiti agli estremi del dominio: essendo la funzione periodica e definita in tutta la retta reale, non bisogna fare i limiti agli estremi.

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \cos x - \sin x.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = \pi/4, 5\pi/4$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x \leq \pi/4$ e per $5\pi/4 \leq x \leq 2\pi$, quindi $\pi/4$ è un punto di massimo, mentre $5\pi/4$ è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\sin x - \cos x.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = 3\pi/4, 7\pi/4$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per

$$3\pi/4 \leq x \leq 7\pi/4.$$

Soluzione 9.1.18 **i)** Dominio: $D = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è pari, ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\sqrt{1 + 1/e}$ e $x = \pm\sqrt{1 + e}$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \leq -\sqrt{1 + e}$, per $-\sqrt{1 + 1/e} \leq x < -1$, per $1 < x \leq \sqrt{1 + 1/e}$ e per $x \geq \sqrt{1 + e}$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)} & \text{per } |x| \geq \sqrt{2} \\ -\dfrac{2x}{(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)} & \text{per } -\sqrt{2} \leq x < -1, \\ & \text{e per } 1 < x \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: la derivata prima non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $-\sqrt{2} < x < -1$ e per $x > \sqrt{2}$.

Soluzione 9.1.19 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty) \setminus \{3\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è 2π–periodica ma non simmetrica, quindi la studiamo in $[0, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi]$.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, \pi/2, \pi, 2\pi$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $0 \leq x \leq \pi/2$ e per $\pi \leq x < 3\pi/2$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 3\pi/2^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 3\pi/2^+} f(x) = -\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2(1 - \sin x - \sin^2 x)}{1 + \sin x}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla in due punti $0 < x_1 < \pi/2$ e $\pi/2 < x_2 < \pi$ (in tali punti il seno vale $(\sqrt{5} - 1)/2$).

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x \leq x_1$, per $x_2 \leq x < 3\pi/2$ e per $3\pi/2 < x \leq 2\pi$.

Soluzione 9.1.20 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty) \setminus (\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è 2π–periodica e pari, quindi possiamo studiarla nell'intervallo $[0, \pi/2]$.

iii) Intersezione con gli assi: la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio: non bisogna fare limiti agli estremi.

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2 \sin x}{\sqrt{\cos x (2 + \cos x)^3}},$$

la derivata è definita in $(-\pi/2, \pi/2)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x < \pi/2$, quindi 0 è un punto di minimo.

Soluzione 9.1.21 **i)** Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{(x+1)^2};$$

il dominio della derivata è $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{x}{(x-1)(x+1)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x < -1$.

Soluzione 9.1.22 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 5.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} & \text{per } \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \\[2ex] \dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2} & \text{per } \dfrac{-5-3\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-5+3\sqrt{5}}{2} \\[2ex] 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

il dominio della derivata è dato da $(-\infty, (-5-3\sqrt{5})/2) \cup ((-5-3\sqrt{5})/2, 1) \cup (1, (5+\sqrt{5})/2) \cup ((5+\sqrt{5})/2 + \infty)$.

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0, 2$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \le x < (-5-3\sqrt{5})/2$ e per $2 \le x < (5+\sqrt{5})/2$, quindi 0 e 2 sono punti di minimo.

Soluzione 9.1.23 **i)** Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità:

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \ge 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:
$$f'(x) = e^{1/(x+1)} \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:
$$f''(x) = -e^{1/(x+1)} \frac{x+2}{(x+1)^4}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = -2$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \leq -2$.

Soluzione 9.1.24 i) Dominio: $D = (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = x_1$, con $0 < x_1 < 1$ (questo si può vedere per via grafica).

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \geq x_1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

vii) Derivata:
$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai (questo si può vedere per via grafica).

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:
$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = e^{3/2}$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \geq e^{3/2}$.

Soluzione 9.1.25 i) Dominio: $D = (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ (questo si può vedere per via grafica).

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2 - x\ln x}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq 1$, quindi 1 è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{x^2 - 3x + 1 + \ln x}{(x^2 - x\ln x)^2}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: esiste un solo punto $x_2 > 1$ per il quale la derivata seconda si annulla.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $0 < x \leq x_2$.

Soluzione 9.1.26 **i)** Dominio: $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, 2$

iv) Segno: la funzione è positiva per $x < 1$ e per $x \geq 2$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x}{(x-1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq 0$, quindi 0 è punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{(x-1)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = 2$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x < 1$ e per $x \geq 2$.

Soluzione 9.1.27 **i)** Dominio: $D = [1 - e, 1)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1 - e$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-\ln(1-x)}}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è sempre positiva.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{1-2\ln(1-x)}{4(1-x)^2(1-\ln(1-x))^{3/2}}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = 1 - \sqrt{e}$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \geq 1 - \sqrt{e}$.

Soluzione 9.1.28 **i)** Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: per via grafica, se vede che la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x > 0$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x - 1$ è asintoto obliquo sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x^3+4x^2-3x-3}{2x(x+1)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 1, (-3 - \sqrt{3})/2$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq (-3 - \sqrt{3})/2$ e per $x \geq 1$, quindi $(-3 - \sqrt{3})/2$ è punto di massimo e 1 è punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{10x^2 + 9x + 3}{2x^2(x+1)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x > 0$.

Soluzione 9.1.29 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: la retta $y = x - 9/4$ è asintoto obliquo a $+\infty$, mentre la retta $y = -x + 9/4$ è asintoto a $-\infty$.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{8x^3 + 6x^2 - 8x - 6}{(4x^2 + 2x + 1)^{3/2}}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = -1, -3/4, 1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $-1 \leq x \leq -3/4$ e per $x \geq 1$, quindi -1 e 1 sono punti di minimo, mentre $-3/4$ è punto di massimo.

Soluzione 9.1.30 **i)** Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x > -1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{per } x \geq 1 \\ \\ -\dfrac{2}{(x+1)^2} & \text{per } x \leq 1. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \geq 1$, quindi 1 è punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(x+1)^3} & \text{per } x \geq 1 \\ \\ \dfrac{4}{(x+1)^3} & \text{per } x \leq 1. \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $-1 < x \leq 1$.

Soluzione 9.1.31 **i)** Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è dispari ma non periodica.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $-1 < x \leq 0$ e per $x > 1$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3(x^2-1)^{4/3}}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = \pm\sqrt{3}$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq -\sqrt{3}$ e per $x \geq \sqrt{3}$, quindi $-\sqrt{3}$ è un punto di massimo e $\sqrt{3}$ è un punto di minimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2x(9-x^2)}{9(x^2-1)^{7/3}}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda si annulla per $x = -3, 0, 3$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è positiva per $x \leq -3$, per $-1 < x \leq 0$ e per $1 < x \leq 3$.

Soluzione 9.1.32 **i)** Dominio: $D = (\infty, -2) \cup (-2, -1/2) \cup (-1/2, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1, 3$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $x \leq -1$ e per $x \geq 3$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4, \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1/2^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-1/2^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to1/2^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to1/2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 4.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2(4x + |x|)}{|x|(x+2)(2|x|-1)}.$$

il dominio della derivata è $(\infty, -2) \cup (-2, -1/2) \cup (-1/2, 0, \cup (0, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$

viii) Zeri della derivata: la derivata non si annulla mai.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x < -2$, per $-1/2 < x \leq 0$ e per $x > 1/2$, quindi 0 è un punto di massimo.

Soluzione 9.1.33 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: non ci sono simmetrie né periodicità.

iii) Intersezione con gli assi: la funzione non si annulla mai.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \frac{2x|x-1| - x^3 + x^2 - x + 1}{|x-1|e^{|x-1|}},$$

il dominio della derivata è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

viii) Zeri della derivata: ls derivata si annulla per $x = -1$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $x \leq 1$, quindi il punto 1 è un punto di massimo.

Soluzione 9.1.34 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty) \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è pari e 2π–periodica, quindi la studiamo nell'intervallo $[0, \pi)$.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = \pi/2$.

iv) Segno: la funzione è positiva per $0 \leq x \leq \pi/2$.

v) Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty.$$

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}.$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = 0$.

ix) Segno della derivata: la derivata non è mai positiva in $[0, \pi)$.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{\cos^2 x - \cos x - 2}{(1 + \cos x)^3}.$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai in $[0, \pi)$.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre negativa.

Soluzione 9.1.35 **i)** Dominio: $D = (-\infty, +\infty)$.

ii) Simmetrie e periodicità: la funzione è 2π–periodica ma non simmetrica, quindi la studiamo in $[0, 2\pi]$.

iii) Intersezione con gli assi: $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $\pi \leq x \leq 2\pi$.

iv) Segno: la funzione è sempre positiva.

v) Limiti agli estremi del dominio: non bisogna fare alcun limite.

vi) Asintoti obliqui: non ci sono asintoti obliqui.

vii) Derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\cos x}{1 + 2\sin x} & \text{per } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{per } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

viii) Zeri della derivata: la derivata si annulla per $x = \pi/2$.

ix) Segno della derivata: la derivata è positiva per $0 \leq x \leq \pi/2$, quindi $\pi/2$ è punto di massimo.

x) Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} -2\dfrac{\sin x + 2}{(1 + 2\sin x)^2} & \text{per } 0 \leq x \leq \pi \\ \\ 0 & \text{per } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

xi) Zeri della derivata seconda: la derivata seconda non si annulla mai.

xii) Segno della derivata seconda: la derivata seconda è sempre negativa.

Capitolo 10

Integrali

Esercizio 10.0.1 Trovare le primitive delle seguenti funzioni:

i) $3x^2 \sin x^3$;

ii) $\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$;

iii) $\dfrac{\tan^3 x}{\cos^2 x}$;

iv) $\sin x \cos x$;

v) $\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$;

vi) $\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;

vii) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$;

viii) $\dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

ix) $(\star)$ $\dfrac{1}{\sin x}$;

x) $(\star)$ $\dfrac{1}{\cos x}$.

Esercizio 10.0.2 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

i) $\displaystyle\int x^2 \arcsin x dx$;

ii) $\displaystyle\int x \sqrt[3]{8+x} dx$;

iii) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$;

iv) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} dx$;

v) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2} dx$;

vi) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}$;

vii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$;

viii) $\displaystyle\int \arctan x dx$;

ix) $\displaystyle\int \frac{\arctan(\frac{1}{2}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$;

x) $\displaystyle\int \frac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

xi) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx$;

xii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

Esercizio 10.0.3 Calcolare i seguenti integrali:

i) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx;$

ii) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan x dx;$

iii) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx;$

iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx;$

v) $\displaystyle\int_0^{-2} \frac{x^3+x+1}{x-1}dx;$

vi) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1-\sqrt{1+x}}dx;$

vii) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x dx;$

viii) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;$

ix) $\displaystyle\int_1^e \ln^3 x dx;$

x) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}dx;$

xi) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx;$

xii) $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x+\sqrt{x+2}}dx;$

xiii) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx;$

xiv) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x e^{\sin x}dx;$

xv) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos(x+|x|)dx;$

Esercizio 10.0.4 Calcolare le medie integrali delle seguenti funzioni

i) $|\sin x|$ in $[-\pi,\pi]$;

ii) $\dfrac{2x}{1+3x^2}$ in $[\sqrt{3}/3, 1]$;

iii) $\sin x\sin(\cos x)$ in $[0,\pi]$.

Esercizio 10.0.5 Trovare la funzione F primitiva della funzione

$$f(x) = \arctan x$$

per la quale $F(0) = 1$.

Esercizio 10.0.6 Dimostrare la seguente identità:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))\,dx, \quad \forall a > 0.$$

Utilizzare tale identità per dimostrare le seguenti implicazioni:

$$f \text{ dispari } \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0, \quad \forall a > 0;$$

$$f \text{ pari } \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad \forall a > 0;$$

Esercizio 10.0.7 ($\star$) Dimostrare che se f è una funzione T–periodica, allora

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 10.0.8 ($\star$) Verificare la seguente identità

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x);$$

usare quindi questo fatto per calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx.$$

Esercizio 10.0.9 ($\star$) Calcolare per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ i seguenti integrali:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx;$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx.$$

Esercizio 10.0.10 ($\star\star$) Verificare che, dato $k \in \mathbb{N}$, se k è dispari, allora

$$\int_0^{2\pi} \sin^k x dx = \int_0^{2\pi} \cos^k x dx = 0,$$

mentre se k è pari, cioè della forma $k = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\int_0^{2\pi} \sin^k x dx = \int_0^{2\pi} \cos^k x dx = \frac{n+1}{2n}\pi.$$

Esercizio 10.0.11 ($\star$) Calcolare, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, il seguente integrale:

$$\int e^{\lambda x} \sin(\mu x) dx.$$

Esercizio 10.0.12 ($\star$) Verificare le seguenti identità:

$$\int \frac{a}{x-d} dx = a \ln|x-d| + cost., \quad \forall a, d \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{a}{(x-d)^r} dx = \frac{a}{r-1}(x-d)^{r-1} + cost., \quad \forall a, d, r \in \mathbb{R}, r \neq 1;$$

$$\int \frac{bx+c}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{b}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + \frac{c+\alpha b}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + cost.,$$

$$\forall b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.$$

Esercizio 10.0.13 ($\star$) Dimostrare che se f è una funzione continua tale che

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

con $a < b$, allora esiste $z \in (a, b)$ per il quale $f(z) = 0$.

Esercizio 10.0.14 ($\star$) Dimostrare che l'integrale

$$I = \int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a)+f(b-x)}dx,$$

con $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione continua positiva, è indipendente dalla funzione f. (Porre $t = a + b - x$).

Esercizio 10.0.15 ($\star\star$) Studiare le relazioni tra i seguenti integrali:

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx,$$

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx,$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2x)dx.$$

Esercizio 10.0.16 ($\star\star$) Dimostrare la seguente relazione:

$$\ln(n+1) - \ln 2 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

Dedurne quindi che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1.$$

Esercizio 10.0.17 ($\star$) Dimostrare che se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $f(0) = 0$, allora, se

$$\int_0^1 f(x)dx = 1,$$

il massimo di f in $[0, 1]$ è strettamente maggiore di 1, cioè

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) > 1.$$

10.1 Soluzioni

Soluzione 10.1.1

i) $-\cos x^3 + c;$

ii) $\arctan \ln x + c;$

iii) $\dfrac{\tan^4 x}{4} c;$

iv) $\dfrac{\sin^2 x}{2} + c = -\dfrac{\cos 2x}{4} + c;$

v) $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^2-3}{\sqrt{x}}\right) + c;$

vi) $-\arctan \cos(x) + c;$

vii) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + c;$

viii) $\tan x - \cot x + c;$

ix) $\ln|\tan(x/2)| + c;$

x) $\ln|\tan(x/2 + \pi/4)| + c.$

Soluzione 10.1.2 **i)** Tramite la sostituzione $x = \sin t$, si ottiene

$$\frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{9} + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{9} + c.$$

ii) Effettuando la sostituzione $t = \sqrt[3]{8+x}$, si ottiene il risultato

$$\frac{3}{7}(x-6)(8+x)^{4/3} + c.$$

iii) Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$4\sqrt{x} - x - 4\ln(1+\sqrt{x}) + c.$$

iv) Con la sostituzione $x = \sin t$, si ottiene

$$\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$$

v) Con la sostituzione $x = \sinh t$, si ottiene

$$\frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2}\right) + c.$$

vi) Con la sostituzione $x = \cosh t$ con $t \geq 0$ se $x \geq 1$ (altrimenti si pone $x = -\cosh t$, sempre con $t \geq 0$), si ottiene

$$\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right) + c.$$

vii) Scrivendo $2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$, si ottiene

$$\arcsin(x-1) + c.$$

viii) Integrando per parti, si ottiene

$$x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

ix) Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$(2\sqrt{x} - 1)\arctan(1/2 - \sqrt{x}) + \ln(x - \sqrt{x} + 5/4) + c.$$

x) Ponendo $x = \sin t$, si ha

$$\frac{e^{\arcsin x}}{2}(x - \sqrt{1 - x^2}) + c.$$

xi) Ponendo $t = \ln x$, si ottiene

$$-\frac{2}{27}x^{-3/2}(9\ln^2 x + 12\ln x + 8) + c.$$

xii) Scrivendo $x - x^2 = 1/4 - (x - 1/2)^2$ si ottiene

$$\arcsin(2x - 1) + c.$$

Soluzione 10.1.3 i) Si ha

$$[\ln\ln x]_e^{e^2} = \ln 2.$$

ii) Integrando per parti si ottiene

$$\left[\frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{\ln(x^2+1)}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2}{6} - \frac{1}{6}.$$

iii) Ponendo $t = \sqrt{x}$ si ha

$$\left[2t - \frac{2t^3}{3}\right]_1^2 = -\frac{8}{3}.$$

iv) Si ha

$$[\tan x - 2\ln|\cos x|]_0^1 = \tan 1 - 2\ln\cos 1.$$

v) Si ottiene

$$-\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x-1|\right]_{-2}^0 = 3\ln 3 - \frac{14}{3}.$$

vi) Ponendo $t = \sqrt{x+1}$, si ottiene

$$-\left[\frac{2}{3}t^3 + t^2\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{3} - 1.$$

vii Ponendo $x = \sin t$, si ottiene

$$[t\sin t + \cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

viii) Ponendo $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$4\,[t\ln t - t]_1^{\sqrt{e}} = 4 - 2\sqrt{e}.$$

ix) Integrando per parti, si ricava

$$\left[x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)\right]_1^e = 6 - 2e.$$

x) Ponendo $t = x^4$, si ottiene

$$\left[\frac{\arctan t}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

xi) Ponendo $t = \sqrt{e^x - 1}$, si ricava

$$2\left[\arctan t\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

xii) Ponendo $t = \sqrt{x+2}$, si ottiene

$$\left[\frac{2}{3}\ln(|t+2|^2|t-1|)\right]_2^3 = \frac{2}{3}\ln\frac{25}{8}.$$

xiii Ponendo $x = \sqrt{2}\sin t$, si ottiene

$$\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(4t)}{8}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

xiv) Con la sostituzione $t = \sin x$, si ottiene

$$2[(t-1)e^t]_0^1 = 2$$

xv) Si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x+|x|)dx &= \int_{-\pi/2}^{0} x^2 dx + \int_0^{\pi/2} x^2\cos(2x)dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{2} + \\ &\quad + \left[\frac{(2x^2-1)\sin(2x)}{4}\frac{x\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Soluzione 10.1.4 Si hanno rispettivamente

$$\textbf{i)}\frac{2}{\pi};\quad \textbf{ii)}\frac{\ln 2}{3-\sqrt{3}};\quad \textbf{iii)}\frac{\cos(-1)-\cos(1)}{\pi}.$$

Soluzione 10.1.5 Una primitiva generica per la funzione f è data da

$$F(x) = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$$

Si tratta quindi di determinare la costante in modo da verificare la condizione $F(0) = 1$. Ma

$$F(0) = c.$$

quindi la primitiva cercata sarà data da

$$F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + 1.$$

Soluzione 10.1.6 Si ha che

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Nel primo dei due integrali si effettua la sostituzione $t = -x$ e si ottiene

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

da cui l'asserto. Quindi se la funzione è dispari si ha che $f(-x) = -f(x)$, da cui l'integrale è nullo, mentre se f è pari $f(-x) = f(x)$, da cui la seconda parte dell'esercizio.

Soluzione 10.1.7 Dato $a > 0$, esisterà sicuramente un $k \in \mathbb{N}$ per il quale $a \in [(k-1)T, kT)$. Quindi

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{kT} f(x)dx + \int_{kT}^{a+T} f(x)dx.$$

Nel primo integrale si fa la sostituzione $t = x - (k-1)T$, mentre nel secondo la sostituzione $t = x - kT$, in modo da ottenere, sfruttando la periodicità di f,

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a-(k-1)T}^{T} f(x)dx + \int_{0}^{a-(k-1)T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx.$$

Soluzione 10.1.8 Tramite la sostituzione $x = a - t$, otteniamo

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(a-t)dt = \int_{0}^{a} f(a-x)dx.$$

Da questa, per la seconda parte dell'esercizio, si ottiene

$$2\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Soluzione 10.1.9 Prendiamo in considerazione il primo integrale. Dalle formule di Prostaferesi, abbiamo che

$$\sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x).$$

Quindi

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx = 0.$$

Analogamente, per le altre due otterremo che

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione 10.1.10 Integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \sin^k x dx &= \int \sin x \sin^{k-1} x dx \\
&= -\cos x \sin^{k-1} x + (k-1) \int \cos^2 x \sin^{k-2} x dx + c. \\
&= -\cos x \sin^{k-1} x + (k-1) \int \sin^{k-2} x dx + \\
& \quad -(k-1) \int \sin^k x dx + c.,
\end{aligned}$$

da cui

$$\int \sin^k x dx = -\frac{\cos x \sin^{k-1} x}{k} + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2} x dx.$$

Da questa identità si deduce l'esercizio.

Soluzione 10.1.11 Integrando due volte per parti, otteniamo

$$\int e^{\lambda x} \sin(\mu x) dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda \sin(\mu x) - \mu \cos(\mu x)) + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \int e^{\lambda x} \sin(\mu x) dx + c.,$$

da cui

$$\int e^{\lambda x} \sin(\mu x) dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2 + \mu^2} (\lambda \sin(\mu x) - \mu \cos(\mu x)) + c.$$

Soluzione 10.1.12 Le prime due identità sono immediate. Per l'ultima, scritto

$$\frac{bx + c}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{b}{2} \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{c + \alpha b}{\beta^2} \frac{1}{((x-\alpha)/\beta)^2 + 1},$$

otteniamo l'identità desiderata.

Soluzione 10.1.13 Si tratta di applicare il teorema di Rolle alla funzione

$$F(z) = \int_a^z f(x) dx.$$

Tale funzione è chiaramente nulla in a, così come lo è in b per ipotesi. Quindi esiste un punto interno all'intervallo (a, b) per il quale $F'(z) = 0$. L'esercizio segue in quanto $F'(z) = f(z)$.

Soluzione 10.1.14 Effettuando la sostituzione $t = a + b - x$, troviamo che

$$I = \int_a^b \frac{f(b-x)}{f(b-x) + f(x-a)} dx,$$

da cui

$$\begin{aligned}
b - a &= \int_a^b \frac{f(x-a) + f(b-x)}{f(b-x) + f(x-a)} dx \\
&= \int_a^b \frac{f(b-x)}{f(b-x) + f(x-a)} dx + \int_a^b \frac{f(x-a)}{f(x-a) + f(b-x)} dx = 2I.
\end{aligned}$$

Soluzione 10.1.15 Per quanto riguarda il secondo integrale, tenendo conto che

$$\cos x = \sin(\pi/2 - x),$$

otteniamo che $J = I$. Per quanto riguarda il terzo integrale, tenendo presente che

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

otteniamo che

$$K = 2I + \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

D'altro canto si ha che

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin x dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln \sin(x + \pi/2) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = I. \end{aligned}$$

Quindi i tre integrali sono tutti uguali tra loro e il loro valore è pari a

$$I = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Soluzione 10.1.16 Calcolando l'integrale

$$\int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{1}{x} dx = \ln(k+1) - \ln k,$$

e dalle stime $1/(k+1) \leq x \leq 1/k$ su $[1/(k+1), 1/k]$, sommando su k, otteniamo la stima desiderata. Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, basta tenere conto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1.$$

Soluzione 10.1.17 Supponiamo che il massimo sia minore o uguale a 1. Siccome la funzione in 0 vale 0, esisterà un $\delta > 0$ per il quale, se $x < \delta$, $f(x) < 1/2$. Quindi, otteniamo che

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\delta} f(x)dx + \int_{\delta}^1 f(x)dx \leq \frac{\delta}{2} + (1 - \delta) = 1 - \frac{\delta}{2} < 1,$$

che è una contraddizione.

Capitolo 11

Integrali Razionali

Esercizio 11.0.1 Calcolare i seguenti integrali razionali:

i) $$\int \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)}dx;$$

ii) $$\int_0^{1/2} \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2-1)}dx;$$

iii) $$\int_1^2 \frac{x+2}{x^4+x^3+x^2+x}dx;$$

iv) $$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}dx;$$

v) $$\int \frac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}dx;$$

vi) $$\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}dx;$$

vii) $$\int \frac{x^3+8x+21}{(x^2+4x+5)^2}dx;$$

viii) $$\int \frac{1}{x^2(x^2+2)}dx.$$

Esercizio 11.0.2 Calcolare i seguenti integrali, riconducendosi ad integrali razionali:

i) $$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}dx;$$

ii) $$\int \frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}}dx;$$

iii) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt[3]{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}dx;$

iv) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx;$

v) $(\star)$ $\displaystyle\int x^{1/3}(1+3\sqrt{x})^2dx;$

vi) $(\star)$ $\displaystyle\int (1-x^2)(2-x^2)^{3/2}dx;$

vii) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x-1}dx;$

viii) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-x^2}+x}{2-\sqrt{2x-x^2}}dx;$

ix) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-4x-3}}dx;$

x) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx;$

xi) $(\star)$ $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx.$

Esercizio 11.0.3 Calcolare i seguenti integrali trigonometrici, riconducendosi ad integrali razionali:

i) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}dx;$

ii) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x-3\sin x+2}dx;$

iii) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1+\cos x}{1-\cos x}dx;$

iv) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\cos x}dx.$

Esercizio 11.0.4 Calcolare i seguenti integrali:

i) $\displaystyle\int \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}dx;$

ii) $\displaystyle\int \frac{1}{2\cosh x+\sinh x+1}dx;$

iii) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{e^x}{e^x+e^{-x}}}dx.$

11.1 Soluzioni

Soluzione 11.1.1

i)

$$\ln \frac{|x-1|^2}{|x|^{3/2}|x-2|^{1/2}} + c.$$

ii)

$$\left[\ln \frac{|x+2||x-1|^{1/2}}{|x+1|^{1/2}}\right]_0^{1/2} = \ln \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

iii)

$$\left[\ln \frac{|x|^2|x+1|^{\frac{1}{2}}}{|x^2+1|^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{2}\arctan x\right]_1^2 = \ln\left(\frac{\sqrt[4]{288}}{\sqrt[4]{125}}\right) + \frac{1}{2}\arctan(2) - \frac{\pi}{4}.$$

iv)

$$\frac{x^2-2x-1}{x-1} + \ln(|x||x-1|) + c.$$

v)

$$\ln \frac{|x-1|^{3/2}}{|x-3|^{1/2}} - \frac{13}{x-3} + c.$$

v)

$$\ln \frac{|x-1|}{(x^2-2x+2)^{1/2}} + 3\arctan(x-1) + c.$$

vi)

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \frac{9}{2}\arctan(x+2) + \frac{1}{2}\frac{3x-13}{x^2+4x+5} + c.$$

vii)

$$-\frac{1}{2x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

Soluzione 11.1.2

i) Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$, si ottiene

$$2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)\right) + c.$$

iii) Con la sostituzione $t = \sqrt[6]{x+1}$, si ottiene

$$-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x+1} - 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} +$$

$$-\ln\left|\sqrt[6]{x+1} - 1\right|^2 \left|\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[6]{x+1}\right|^2 +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[6]{x+1} + \frac{1}{2}\right)\right) + c.$$

iv) Con la sostituzione $t = \sqrt[6]{x}$, si ottiene

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c.$$

Soluzione 11.1.3

i) Con la sostituzione $t = \tan(x/2)$, si ottiene

$$[\ln|t|]_{1/\sqrt{3}}^{1} = \ln\sqrt{3}.$$

ii) Con la sostituzione $t = \sin x$, si ottiene

$$\ln\frac{(2-\sin x)^4}{(1-\sin x)^2} + c.$$

iii) Ponendo $t = \tan(x/2)$, si ottiene

$$-2\left[\frac{1}{t} + \arctan t\right]_1^{+\infty} = 1 - \frac{3\pi}{4}.$$

iv) Ponendo $t = \tan(x/2)$, si ottiene

$$\ln\left|\frac{\sin(x/2)+\cos(x/2)}{\sin(x/2)-\cos(x/2)}\right| - \frac{2\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)-\cos^2(x/2)} + c.$$

Soluzione 11.1.4

i) Ponendo $t = e^x$, si ottiene

$$\ln\frac{|e^x-1|^{3/2}}{(e^x+1)^{1/2}} - x + c.$$

ii) Ricordando le definizioni del seno e del coseno iperbolico, ponendo $t = e^x$ si ottiene

$$\sqrt{2}\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\left(e^x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + c.$$

iii) Ponendo $t = e^x$, si ottiene

$$\operatorname{arccosh} e^x + c.$$

Capitolo 12

Integrali Impropri

Esercizio 12.0.1 Calcolare i seguenti integrali;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} dx, \quad \int_0^a \ln x dx \quad (a > 0).$$

Esercizio 12.0.2 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx.$$

Esercizio 12.0.3 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x^2 - 4x + 3|^\alpha} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 12.0.4 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Esercizio 12.0.5 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 12.0.6 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{\ln x} dx.$$

Esercizio 12.0.7 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx.$$

Esercizio 12.0.8 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{1/e}^{1} \frac{1}{1+\ln x} dx.$$

Esercizio 12.0.9 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x/3}}{\sqrt[3]{e^x - e^{-x}}} dx.$$

Esercizio 12.0.10 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) dx.$$

Esercizio 12.0.11 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x - \pi/2}{\sqrt{x}} dx.$$

Esercizio 12.0.12 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{1}^{\infty} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \right) dx.$$

Esercizio 12.0.13 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{0}^{1/2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx.$$

Esercizio 12.0.14 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^x - 1)^2} dx.$$

Esercizio 12.0.15 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{|x|}}{|x| - \sin x} dx.$$

Esercizio 12.0.16 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{\sin(1 - \sqrt{\cos x})}{x^3}} dx.$$

Esercizio 12.0.17 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Esercizio 12.0.18 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_{0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

Esercizio 12.0.19 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$$

Esercizio 12.0.20 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$$

Esercizio 12.0.21 Sapendo che

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

calcolare

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx.$$

Esercizio 12.0.22 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Esercizio 12.0.23 Dimostrare che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile su $[0,+\infty)$, mentre $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ non lo è.

Esercizio 12.0.24 Dire se esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^1 x^{\ln x} dx.$$

Esercizio 12.0.25 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1 + \alpha \sin x}{x^2} dx.$$

Esercizio 12.0.26 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_1^\infty \frac{e^{1/x} - 1}{x^\alpha} dx.$$

Esercizio 12.0.27 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)^\alpha}} dx.$$

Esercizio 12.0.28 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x^2-1)}{(x+1)^\alpha} dx$$

e calcolare esplicitamente l'integrale nel caso $\alpha = 2$.

Esercizio 12.0.29 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{1/2} \frac{(x(1-2x))^{\alpha-5}}{\sin x} dx.$$

Esercizio 12.0.30 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x^{\alpha}}{x^2} dx.$$

Esercizio 12.0.31 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{1} \frac{\arctan x^{2/\alpha}}{x+\sin\sqrt{x}} dx.$$

Esercizio 12.0.32 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}(\sinh x)^{\alpha}}{|\ln x|} dx.$$

Esercizio 12.0.33 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{1} \frac{\arctan x^{1/(2\alpha)}}{x^2+\sin\sqrt[3]{x}} dx.$$

Esercizio 12.0.34 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx.$$

Esercizio 12.0.35 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{\pi/2} \frac{x-\alpha\sin x}{x^3} dx.$$

Esercizio 12.0.36 Dire per quali valori dei parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^{\beta})} dx.$$

Esercizio 12.0.37 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\alpha} dx.$$

Esercizio 12.0.38 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^3-\alpha x^2+x-\alpha} dx.$$

Esercizio 12.0.39 Dire per quali valori dei parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_2^\infty \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx.$$

Esercizio 12.0.40 Dire per quali valori dei parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx.$$

Esercizio 12.0.41 Dire per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_1^\infty \frac{\ln^\alpha x}{(x^2-1)^{1/2}} dx.$$

Esercizio 12.0.42 Dire per quali valori dei parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_1^\infty x^\alpha \sin(x^\beta) dx.$$

Esercizio 12.0.43 Dire per quali valori dei parametri reali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esiste, in senso improprio, il seguente integrale
$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx.$$

12.1 Soluzioni

Soluzione 12.1.1 Per quanto riguarda il primo integrale, notiamo anzitutto che la funzione integranda è pari, è definita su tutto $\mathbb{R}$ (cioè non ha singolarità) e il dominio di integrazione è illimitato. Siamo quindi di fronte ad un integrale improprio di seconda specie, e bisogna quindi vedere se esiste il seguente limite
$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^2} dx.$$
Ma siccome
$$\int_0^R \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan R$$
e
$$\lim_{R\to+\infty} \arctan R = \frac{\pi}{2}.$$
In definitiva, l'integrale improprio esiste e si ha
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 2 \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= 2 \lim_{R\to+\infty} \arctan R = \pi.\end{aligned}$$

Nel caso del secondo integrale, che è sempre di tipo improprio di seconda specie, basta tener presente che

$$\int_0^R e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^R = 1 - e^{-R},$$

e quindi, siccome esiste il limite

$$\lim_{R\to+\infty}(1 - e^{-R}) = 1,$$

allora esiste pure l'integrale improprio e si ha che

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Nel caso del terzo integrale, la funzione integranda non è definita in 0 e quindi si tratta di un integrale improprio di prima specie. La funzione integranda è continua in ogni intervallo $[\varepsilon, a]$ con $\varepsilon > 0$ e quindi è ivi integrabile. Dobbiamo quindi vedere se esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^a \ln x dx.$$

Ma

$$\int_\varepsilon^a \ln x dx = [x\ln x - x]_\varepsilon^a = a\ln a - a - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon,$$

e quindi

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^a \ln x dx = a\ln a - a.$$

Soluzione 12.1.2 Siamo in presenza di un integrale improprio di seconda specie in quanto la funzione interanda è continua in tutto $\mathbb{R}$. Bisogna vedere quindi se esiste il limite

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \sin x dx = \lim_{R\to+\infty}[-\cos x]_0^R = \lim_{R\to+\infty}(1 - \cos R).$$

Si noti che tale limite non esiste in quanto se prendiamo la successione $R_h = 2\pi h$, allora

$$\lim_{h\to+\infty}(1 - \cos R_h) = 0,$$

mentre se si considera $R_k = 2\pi(k + 1)$, allora

$$\lim_{k\to+\infty}(1 - \cos R_k) = 1.$$

Soluzione 12.1.3 Notiamo anzitutto che per $\alpha \le 0$, l'integrale è improprio solo di seconda specie in quanto la funzione integranda è continua su $\mathbb{R}$; in questo caso l'integrale non può esistere in quanto per $|x| \to +\infty$ si ha che

$$\frac{1}{|x^2 - 4x + 3|^\alpha} \ge 1.$$

Nel caso $\alpha > 0$, si nota anzitutto che per $|x| \to +\infty$ si ha

$$\frac{1}{|x^2 - 4x + 3|^\alpha} \sim \frac{1}{|x|^{2\alpha}}$$

e quindi per avere integrabilità ad infinito si deve avere $2\alpha > 1$, cioè $\alpha > 1/2$. Scrivendo inoltre $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$, si nota che si è in presenza di due singolarità , una per $x = 3$ e una per $x = 1$. In entrambe le singolarità (negli intorni di ognuna), ad esempio intorno a $x = 1$, si ha

$$\frac{1}{|x^2 - 4x + 3|^\alpha} \sim \frac{1}{|x-1|^\alpha}$$

e quindi si ha integrabilità per $\alpha < 1$. Mettendo insieme le condizioni trovate, si conclude che l'integrale dato converge per $1/2 < \alpha < 1$.

Soluzione 12.1.4 La funzione integranda è continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi siamo in presenza di un integrale improprio di seconda specie; cioè, l'unica cosa da controllare è l'integrabilità a $+\infty$. Utilizzando il limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} x^p e^{-x^2} = 0, \quad \forall p > 0,$$

se ne deduce che per $x \to +\infty$

$$e^{-x^2} < \frac{1}{x^p}, \quad \forall p > 0.$$

Se si sfrutta questa informazione con $p > 1$, se ne deduce l'integrabilità grazie al criterio del confronto per gli integrali impropri.

Soluzione 12.1.5 Come nel caso dell'esercizio precedente, si ha per $x \to +\infty$ che

$$e^{-x} < \frac{1}{x^p}, \quad \forall p > 0,$$

e quindi anche

$$x^\alpha e^{-x} < \frac{1}{x^{p-\alpha}}.$$

Se si prende quindi $p > \alpha + 1$ se ne deduce l'integrabilità a $+\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione integranda ha poi una singolarità in $x = 0$ se $\alpha < 0$; in questo caso si avrà integrabilità se $\alpha > -1$. In definitiva, la funzione data è integrabile in $[0, +\infty)$ per $\alpha > -1$.

Soluzione 12.1.6 La funzione integranda ha una singolarità per $x = 1$; notando che per $x \to 1$, siccome $x - 1 \to 0$

$$\ln x = \ln(1 + x - 1) = (x-1) + o(x-1),$$

si ricava che per $x \to 1$

$$\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$$

e quindi l'integrale dato non converge.

Soluzione 12.1.7 Tenendo presente che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad \forall p > 0,$$

se ne deduce che per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x^p}, \quad \forall p > 0.$$

Prendendo $p < 1$, si può quindi concludere che l'integrale dato non converge.

Soluzione 12.1.8 Siamo in presenza di una singolarità per $x = 1/e$ si noti che per $x \to 1/e$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln x} &= \frac{1}{1+\ln(1/e+(x-1/e))} = \frac{1}{1+\ln 1/e(1+e(x-1/e))} \\
&= \frac{1}{1+\ln 1/e+\ln(1+(ex-1))} = \frac{1}{\ln(1+(ex-1))} \\
&= \frac{1}{(ex-1)+o(ex-1)} \\
&\sim \frac{1}{ex-1}
\end{aligned}$$

e quindi l'integrale non converge.

Soluzione 12.1.9 Ponendo $t = e^{-x/3}$, l'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{3t}{\sqrt[3]{1-t^6}}dt = \int_0^1 \frac{3t}{\sqrt[3]{(1-t)(t^2+t+1)(t^3+1)}}dt.$$

Ci si rende quindi conto che l'unico problema si ha per $t = 1$; ma intorno a tale punto si ha che

$$\frac{3t}{\sqrt[3]{(1-t)(t^2+t+1)(t^3+1)}} \sim \frac{3}{\sqrt[3]{6(1-t)}}$$

e quindi l'integrale dato converge.

Soluzione 12.1.10 L'unico problema si per $x \to +\infty$; notando che per $x \to +\infty$

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

si deduce che per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{6x^3},$$

da cui la convergenza dell'integrale dato.

Soluzione 12.1.11 Intorno al punto $x = 0$ si ha che

$$\frac{\arctan x - \pi/2}{\sqrt{x}} \sim -\frac{\pi}{2\sqrt{x}},$$

da cui il fatto che in $x = 0$ l'integrale converge. Per $x \to \infty$, si ha invece che

$$\frac{\arctan x - \pi/2}{\sqrt{x}} = -\frac{\arctan 1/x}{\sqrt{x}} \sim -\frac{1}{x^{3/2}},$$

e quindi la convergenza anche per $x \to +\infty$.

Soluzione 12.1.12 L'unico problema si può avere per $x \to +\infty$; ma

$$\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x} \sim \frac{1}{3x^3},$$

e quindi l'integrale converge.

Soluzione 12.1.13 Abbiamo che, dato che l'unico problema si ha in $x = 0$ e la funzione integranda è continua in $[c, 1/2]$ per ogni $c > 0$ con

$$\int_c^{1/2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_c^{1/2} = \frac{1}{\ln c} + \frac{1}{\ln 2},$$

si nota che

$$\exists \lim_{c \to 0} \int_c^{1/2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \frac{1}{\ln 2}.$$

Quindi la funzione data è integrabile in senso improprio in $[0, 1/2]$ e vale

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \frac{1}{\ln 2}.$$

Soluzione 12.1.14 Per quanto riguarda il caso $x = 0$, si noti che $x^x = e^{x \ln x} = 1 + x \ln x + o(x \ln x)$, e quindi

$$\frac{x}{(x^x - 1)^2} \sim \frac{x}{x^2 \ln^2 x} = \frac{1}{x \ln^2 x},$$

da cui la convergenza in $x = 0$ grazie al precedente esercizio. Si ha un'altra singolarità anche per $x = 1$ e

$$\frac{x}{(x^x - 1)^2} \sim \frac{x}{x^2 \ln^2 x} \sim \frac{1}{(x - 1)^2},$$

e quindi in $x = 1$ l'integrale non converge. In definitiva l'integrale dato non converge.

Soluzione 12.1.15 Si è in presenza di un'unica singolarità in $x = 0$; per $x \to 0^-$ si ha che

$$\frac{\sqrt{|x|}}{|x| - \sin x} \sim \frac{\sqrt{-x}}{-2x} = \frac{1}{2\sqrt{-x}},$$

e quindi la convergenza dell'integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{-x}}{-x - \sin x} dx.$$

Per $x \to 0^+$ si ha invece che

$$\frac{\sqrt{|x|}}{|x| - \sin x} \sim \frac{6}{x^{5/2}},$$

da cui la non convergenza di

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x - \sin x} dx.$$

Soluzione 12.1.16 Intorno a $x = 0$ si ha che

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\sin(1 - \sqrt{\cos x})}{x^3}} &= \sqrt{\frac{\sin(1 - \sqrt{1 - x^2/2 + o(x^3)})}{x^3}} \\
&= \sqrt{\frac{\sin(x^2/4 + o(x^3))}{x^3}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4x} + o(1)} \\
&\sim \frac{1}{2\sqrt{x}},
\end{aligned}$$

e quindi l'integrale dato converge.

Soluzione 12.1.17 Abbiamo una singolarità in $x = 0$ e l'integrale è esteso fino a $+\infty$, quindi siamo in presenza di un integrale improprio di entrambe le specie. Per $x = 0$

$$\frac{\ln x}{1 + x^2} \sim \ln x$$

che è integrabile. Inoltre, per $x \to \infty$, si ha che

$$0 \leq \frac{\ln x}{1 + x^2} \leq \frac{1}{x^p}$$

per ogni $p < 2$; prendendo $1 < p < 2$, se ne deduce che l'integrale dato è convergente.

Soluzione 12.1.18 Per $x = 0$, si ha che

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \ln\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\ln x$$

che è integrabile. Invece, per $x \to +\infty$ si ha che

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$$

e quindi non si ha integrabilità.

Soluzione 12.1.19 Con il cambio di variabili $t = 1 + \frac{1}{x}$ e con una integrazione per parti, si ottiene che

$$\int_\varepsilon^1 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = -\int_{1+\frac{1}{\varepsilon}}^2 \frac{\ln t}{(t-1)^2} dt = 2\ln 2 + (1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon) + \varepsilon \ln \varepsilon.$$

Questo dimostra che la funzione data è integrabile in ogni intervallo $[\varepsilon, 1]$ con $\varepsilon > 0$ (fatto che già si doveva notare in quanto in tale intervallo la funzione è continua), e siccome

$$\exists \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = 2\ln 2,$$

se ne conclude che la funzione data è integrabile in $[0, 1]$ con

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = 2\ln 2.$$

Un modo equivialente è quello di scrivere

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(1 + x) - \ln x$$

e scrivere l'integrale come somma di due integrali (in questo caso bisogna motivare il perchè sia lecito scrivere l'integrale della somma come somma di integrali nel caso di integrali impropri, cosa che è possibile fare se si è in presenza di funzioni assolutamente integrabili).

Soluzione 12.1.20 Per $x = 0$ si ha che

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \sim \frac{1}{2},$$

quindi la funzione integranda è estendibile con continuità in 0, da cui se ne deduce che in 0 non siamo in presenza di un integrale improprio. Infine siccome

$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2},$$

si deduce che la funzione data è assolutamente integrabile a $+\infty$.

Soluzione 12.1.21 Siamo in presenza di un integrale improprio di seconda specie; la funzione integranda è continua e quindi si tratta di calcolare l'integrale su $[0, R]$ e vedere se esiste il limite di tali integrali per $R \to +\infty$. Ma con una integrazione per parti si ottiene

$$\int_0^R x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_0^R x(-2x)e^{-x^2} dx = -\left[\frac{x}{2}e^{-x^2}\right]_0^R + \frac{1}{2}\int_0^R e^{-x^2} dx$$

da cui

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R x^2 e^{-x^2} dx = \lim_{R\to+\infty} -\left[\frac{x}{2}e^{-x^2}\right]_0^R + \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Soluzione 12.1.22 Per $x = 0$ si ha che

$$\frac{\sin^2 x}{x} \to 0,$$

quindi la funzione integranda è estendibile con continuità in 0 e quindi in 0 non siamo in presenza di un integrale improprio. Per quanto riguarda l'integrabilità a $+\infty$, dato che la funzione

$$R \to \int_0^R \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

è monotona crescente, si deduce che l'integrale improprio o esiste o diverge a $+\infty$. Sempre grazie alla monotonia, si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx \leq \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Notiamo però che

$$\int_0^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

e che su $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ si ha

$$\frac{1}{2(k+1)\pi} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2k\pi},$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)\pi} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin^2 x dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(k+1)\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.\end{aligned}$$

In definitiva si ottiene che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

da cui la divergenza dell'integrale dato.

Soluzione 12.1.23 La funzione integranda ha in 0 una singolarità eliminabile, e quindi l'integrale è improprio solo di seconda specie. Con una integrazione per parti si ha

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x} dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_1^R + \int_1^R \frac{\cos x}{x^2} dx;$$

quindi, dato che

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2},$$

la funzione $\frac{\cos x}{x^2}$ è intagrabile su $[1, +\infty)$. In definitiva, si ottiene che

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \cos(1) + \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

se ne deduce l'intagrabilità della funzione data. Per quanto riguarda invece la funzione $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$, se scriviamo

$$[0, +\infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n\pi, (n+1)\pi),$$

otteniamo che, dato che su $[n\pi, (n+1)\pi)$ vale $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Quindi dato che la serie finale è non convergente, la funzione data non sarà integrabile.

Soluzione 12.1.24 Ponendo $t = \ln x$, si ottiene

$$\int_0^1 x^{\ln x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{t^2+t} dt.$$

È facile rendersi conto che quest'ultimo integrale non converge in quanto $e^{t^2+t} \to +\infty$ per $t \to -\infty$. Una dimostrazione alternativa si ottiene anche notando che per $x < 1/e$ si ha $\ln x < -1$, da cui
$$\int_0^{1/e} x^{\ln x} dx > \int_0^{1/e} \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

Soluzione 12.1.25 Il problema si presenta solo per $x = 0$; utilizzando gli sviluppi di Taylor, si ottiene che
$$\frac{e^x - 1 + \alpha \sin x}{x^2} = \frac{1 + x + x^2/2 - 1 - \alpha x + o(x^2)}{x^2} = \frac{1-\alpha}{x} + \frac{1}{2} + o(1),$$
e quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha = 1$.

Soluzione 12.1.26 Si ha un integrale improprio di seconda specie; dobbiamo quindi vedere il comportamento della funzione integranda per $x \to +\infty$. Grazie allo sviluppo di Tayolor
$$e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$
si ottiene che
$$\frac{e^{1/x} - 1}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right),$$
e quindi si ha integrabilità se $\alpha + 1 > 1$, cioè $\alpha > 0$.

Soluzione 12.1.27 La funzione integranda ha una singolarità in $x = 0$ e in tale punto
$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)^\alpha}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}},$$
quindi la funzione è integrabile in $x = 0$. Per $x = 1$ si ha una singolarità se $\alpha > 0$: quindi siamo in presenza di un integrale improprio se $\alpha > 0$, mentre la funzione è continua se $\alpha \leq 0$. Inoltre, dato che
$$\frac{1}{\sqrt{x(1-x)^\alpha}} \sim \frac{1}{(1-x)^{\alpha/2}},$$
la funzione sarà integrabile per $\alpha/2 < 1$. cioè $\alpha < 2$.

Soluzione 12.1.28 Per $x = 1$ si ha che
$$\frac{\ln(x^2-1)}{(x+1)^\alpha} = \frac{\ln(x+1)(x-1)}{(x+1)^\alpha} \sim \frac{\ln(2(x-1)}{2^\alpha}$$
e quindi l'integrale converge. Per $x \to +\infty$ si ha che se $\alpha \leq 1$
$$\frac{\ln(x^2-1)}{(x+1)^\alpha} \geq \frac{1}{(x+1)^\alpha}$$
e quindi l'integrale diverge, mentre se $\alpha > 1$, preso $1 < p < \alpha$ si ha che per x sufficientemente grande $\frac{\ln(x^2-1)}{(x+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^p}$ in quanto
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{(x+1)^\alpha} \ln(x^2-1) = 0,$$

e quindi si ha convergenza. Infine, per $\alpha = 2$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{(x+1)^2}dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{\ln(x^2-1)}{(x+1)^2}dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} -\left[\frac{\ln(x^2-1)}{x+1}\right]_{1+\varepsilon}^{R} \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{1+\varepsilon}^{R}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx \\
&= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \Big(-\frac{\ln(R^2-1)}{R+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{R-1}{R+1}\right| \\
&\quad -\frac{1}{R+1}-\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+2)}\ln\varepsilon+\frac{\varepsilon+4}{2(\varepsilon+2)}\ln(\varepsilon+2)-\frac{1}{\varepsilon+2}\Big) \\
&= \ln 2-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Soluzione 12.1.29 Per $x = 0$ si ha

$$\frac{(x(1-2x))^{\alpha-5}}{\sin x} \sim x^{\alpha-6},$$

e quindi si ha integrabilità per $\alpha > 5$. Per $x = 1/2$ si ha invece

$$\frac{(x(1-2x))^{\alpha-5}}{\sin x} \sim \frac{(1-2x)^{\alpha-5}}{2^{\alpha-5}\sin 1/2}$$

che converge per $\alpha > 4$. In definitiva la funzione integranda ha integrale convergente in $[0, 1/2]$ se $\alpha > 5$.

Soluzione 12.1.30 Si hanno due possibilità; per $\alpha \le 0$ e intorno a $x = 0$ si ha

$$\frac{\arctan x^{\alpha}}{x^2} \sim \frac{\pi/2}{x^2}$$

che non converge. Per $\alpha > 0$, sempre intorno a $x = 0$ si ha

$$\frac{\arctan x^{\alpha}}{x^2} \sim x^{\alpha-2}$$

che converge per $\alpha > 1$. Per $x \to \infty$ invece si ha che se

$$\frac{\arctan x^{\alpha}}{x^2} \le \frac{\pi/2}{x^2}$$

e quindi convergenza. In definitiva l'integrale converge per $\alpha < 1$.

Soluzione 12.1.31 Il problema ha senso per $\alpha \ne 0$; per $\alpha < 0$ si ha che intorno a $x = 0$

$$\frac{\arctan x^{2/\alpha}}{x+\sin\sqrt{x}} \sim \frac{\pi/2}{\sqrt{x}}$$

da cui la convergenza, mentre se $\alpha > 0$

$$\frac{\arctan x^{2/\alpha}}{x+\sin\sqrt{x}} \sim x^{2/\alpha-1/2}$$

che converge per $2/\alpha - 1/2 > -1$, cioè per ogni $\alpha > 0$. Si poteva analogamente notare che in $(0,1]$ si ha

$$0 \leq \frac{\arctan x^{2/\alpha}}{x+\sin\sqrt{x}} \leq \frac{\pi/2}{x+\sin\sqrt{x}}$$

e che quest'ultima è una funzione integrabile su $[0,1]$.

Soluzione 12.1.32 Per $x = 0$, ricordando che $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, si ha

$$\frac{\sqrt[3]{1-x^2}(\sinh x)^\alpha}{|\ln x|} \sim \frac{x^\alpha}{|\ln x|}$$

che converge per $\alpha > -1$, mentre per $x = 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{1-x^2}(\sinh x)^\alpha}{|\ln x|} &\sim \sqrt[3]{2}\left(\frac{e-1/e}{2}\right)\alpha\frac{(1-x)^{1/3}}{|\ln x|} \\
&= \sqrt[3]{2}\left(\frac{e-1/e}{2}\right)\alpha\frac{|x-1|}{|\ln(1+x-1)|}\frac{(1-x)^{1/3}}{|x-1|} \\
&\sim \sqrt[3]{2}\left(\frac{e-1/e}{2}\right)\alpha(1-x)^{-2/3}
\end{aligned}$$

che converge. In definitiva si ha convergenza per $\alpha > -1$.

Soluzione 12.1.33 L'unico problema si potrebbe avere per $x = 0$; ma per $\alpha < 0$ si ha che

$$\frac{\arctan x^{1/(2\alpha)}}{x^2+\sin\sqrt[3]{x}} \sim \frac{\pi/2}{\sqrt[3]{x}}$$

che converge, mentre per $\alpha > 0$

$$\frac{\arctan x^{1/(2\alpha)}}{x^2+\sin\sqrt[3]{x}} \sim x^{1/(2\alpha)-1/3}$$

che converge per $\alpha < 3/4$.

Soluzione 12.1.34 Per $x = 0$ si ha

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim x^{1-\alpha}$$

e quindi si ha convergenza per $\alpha < 2$.

Soluzione 12.1.35 Con uno sviluppo di Taylor intorno a $x = 0$ si ottiene che

$$\frac{x-\alpha\sin x}{x^3} = \frac{(1-\alpha)x+\alpha/6x^3+o(x^3)}{x^3} = \frac{1-\alpha}{x^2}+\frac{\alpha}{6}+o(1)$$

da cui si deduce che si ha convergenza se e solo se $\alpha = 1$.

Soluzione 12.1.36 Per $x = 0$ si ha che

$$\frac{1}{x^\alpha}(1 + x^\beta) \sim \frac{1}{x^\alpha},$$

che converge per $\alpha < 1$, mentre per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^\alpha}(1 + x^\beta) \sim \frac{1}{x^{\alpha-\beta}}$$

che converge per $\alpha - \beta > 1$. Le condizioni di convergenza sono in definitiva $\alpha < 1$ e $\beta < \alpha - 1$, che definiscono il piano rappresentato in figura 12.1.

Figura 12.1: Insieme delle soluzioni (α, β)

Soluzione 12.1.37 La funzione integranda è continua su $[0, +\infty)$ quindi l'unica cosa da verificare è il comportamento per $x \to +\infty$. In questo caso si ha che

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^\alpha \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

e quindi si ha integrabilità per $\alpha > 1$.

Soluzione 12.1.38 Per $|x| \to \infty$ si ha

$$\frac{x-2}{x^3 - \alpha x^2 + x - \alpha} \sim \frac{1}{x^2}$$

che converge. Notando poi che

$$\frac{x-2}{x^3 - \alpha x^2 + x - \alpha} = \frac{x-2}{(x^2+1)(x-\alpha)},$$

si nota che la funzione integranda ha una singolarità eliminabile in $x = 2$ se $\alpha = 2$ mentre per $\alpha \neq 2$ e per $x = \alpha$ si ha che

$$\frac{x-2}{x^3 - \alpha x^2 + x - \alpha} \sim \frac{\alpha - 2}{\alpha^2 + 1} \cdot \frac{1}{x - \alpha}$$

che non è integrabile. Quindi in definitiva la funzione integranda è integrabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha = 2$, nel qual caso si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^3 - \alpha x^2 + x - \alpha} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \pi.$$

Soluzione 12.1.39 Dividiamo la discussione in passi; anzitutto, per $\alpha > 1$ e $\beta \geq 0$ si nota che, per $x \to +\infty$ $\ln x \geq 1$ e quindi

$$\frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

da cui la convergenza. Invece, se $\alpha > 1$ e $\beta < 0$, allora

$$\frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \leq \frac{1}{x^p}$$

per $p < \alpha$, da cui, prendendo $1 < p < \alpha$ si ottiene la convergenza. Nel caso $\alpha = 1$ si nota che

$$\frac{1}{x \ln^\beta x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(\beta - 1)\ln^{\beta-1} x}\right), \quad \text{per } \beta \neq 1,$$

mentre

$$\frac{1}{x \ln x} = \frac{d}{dx} \ln \ln x,$$

da cui si ricava la convergenza per $\beta > 1$. Infine, se $\alpha < 1$. allora, nel caso $\beta \leq 0$ si ha

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \geq \frac{1}{x^\alpha}$$

e l'integrale non converge, mentre se $\beta > 0$

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \geq \frac{1}{x^p}$$

per ogni $p > \alpha$ e prendendo $1 > p > \alpha$ si ottiene la non convergenza. Possiamo quindi riassumere come segue:

$$\begin{cases} \alpha > 1 & \beta \in \mathbb{R} \text{ convergenza} \\ \alpha = 1 & \begin{cases} \beta > 1 & \text{convergenza} \\ \beta \leq 1 & \text{non convergenza} \end{cases} \\ \alpha < 1 & \beta \in \mathbb{R} \text{ non convergenza.} \end{cases}$$

Soluzione 12.1.40 Con il cambio di variabili $y = 1/x$, si ottiene che

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx = \int_2^\infty \frac{1}{y^{2-\alpha} |\ln y|^\beta} dy,$$

e quindi si ha il seguente schema

$$\begin{cases} \alpha < 1 & \beta \in \mathbb{R} \text{ convergenza} \\ \alpha = 1 & \begin{cases} \beta > 1 & \text{convergenza} \\ \beta \leq 1 & \text{non convergenza} \end{cases} \\ \alpha > 1 & \beta \in \mathbb{R} \text{ non convergenza.} \end{cases}$$

Soluzione 12.1.41 Intorno al punto $x = 1$ si ha che

$$\frac{\ln^\alpha x}{(x^2 - 1)^{1/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln^\alpha x}{(x - 1)^{1/2}}$$

e quindi l'integrale converge, mentre per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{\ln^\alpha x}{(x^2-1)^{1/2}} \sim \frac{\ln^\alpha x}{x},$$

da cui si deduce la convergenza per $\alpha < -1$.

Soluzione 12.1.42 Dividiamo la discussione in tre parti; supponiamo dapprima che $\beta > 0$; in questo caso, con il cambio di variabili $y = x^\beta$, si ottiene

$$\int_1^\infty x^\alpha \sin(x^\beta)dx = \frac{1}{\beta}\int_1^\infty y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \sin y dy,$$

e quindi si tratta di studiare l'itegrale improprio di seconda specie

$$\int_1^\infty y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \sin y dy.$$

Scriviamo quest'ultimo integrale come segue:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \sin y dy &= \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \sin y dy \\
&= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} |\sin y| dy \\
&= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n.
\end{aligned}$$

Siamo quindi ricondotti allo studio della convergenza di una serie a segni alterni. Si noti che se $\frac{\alpha-\beta+1}{\beta} < -1$, allora dato che su $[n\pi, (n+1)\pi]$ si ha che

$$y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \leq (n\pi)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}},$$

se ne deduce che la serie data è assolutamente convergente. Si può essere peró più precisi nell'analisi; difatti, se $\frac{\alpha-\beta+1}{\beta} < 0$, allora dato che su $[n\pi, (n+1)\pi]$ si ha che

$$((n+1)\pi)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \leq y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \leq (n\pi)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}}$$

se ne deduce che

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} |\sin y| dy \\
&\leq ((n+1)\pi)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin y| dy \\
&= ((n+1)\pi)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin y| dy \\
&\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} |\sin y| dy \\
&= a_n \leq (n\pi)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \int_0^\pi \sin y dy \\
&= 2(n\pi)^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}},
\end{aligned}$$

se ne deduce che la successione (a_n) è monotona decrescente ed infinitesima; siamo quindi nelle condizioni di applicare il Teorema di Leibniz e dedurre la convergenza semplice della serie data. Si noti poi che se $\frac{\alpha-\beta+1}{\beta} > 0$, con un calcolo analogo a quello appena fatto, si dimostra che la successione (a_n) è monotona crescente e quindi non può essere infinitesima, da cui la non convergenza della serie. Infine, se $\frac{\alpha-\beta+1}{\beta} = 0$, si ottiene che

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin y| dy = 2,$$

e quindi ancora che la serie non converge. Nel caso in cui $\beta < 0$, si ottiene, ancora grazie al cambio di variabili $y = x^\beta$,

$$\int_1^\infty x^\alpha \sin(x^\beta) dx = -\frac{1}{\beta} \int_0^1 y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \sin y dy,$$

e questo è un integrale improprio di prima specie con singolarità in $y = 0$. Notando intorno a $y = 0$ si ha che

$$y^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \sin y \sim y^{\frac{\alpha+1}{\beta}},$$

se ne deduce la convergenza per $\frac{\alpha+1}{\beta} > -1$ e la non convergenza altrimenti. Infine, il caso più semplice $\beta = 0$; in questo caso si ha l'integrale

$$\sin 1 \int_1^\infty x^\alpha dx$$

che converge per $\alpha < -1$ e non converge altrimenti. Possiamo riassumere l'esercizio con la seguente tabella:

$$\begin{cases} \beta > 0 & \begin{cases} \frac{\alpha-\beta+1}{\beta} \geq 0 & \text{non convergenza} \\ 0 < \frac{\alpha-\beta+1}{\beta} \leq 1 & \text{convergenza semplice} \\ \frac{\alpha-\beta+1}{\beta} > 1 & \text{convergenza assoluta} \end{cases} \\ \beta < 0 & \begin{cases} \frac{\alpha+1}{\beta} > -1 & \text{convergenza} \\ \frac{\alpha+1}{\beta} \leq -1 & \text{non convergenza} \end{cases} \\ \beta = 0 & \begin{cases} \alpha > -1 & \text{convergenza} \\ \alpha \leq -1 & \text{non convergenza.} \end{cases} \end{cases}$$

Soluzione 12.1.43 È chiaro che la convergenza non dipende dal segno di β; inoltre per $\beta = 0$ si ottiene l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$$

che converge per $\alpha > 0$. Per $\beta > 0$, con un cambio di variabili si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx &= \frac{1}{\beta} \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{\beta} x} \cos x dx \\ &= \frac{1}{\beta} \Big(\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\alpha}{\beta} x} \cos x dx \\ &\quad + \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_{\pi/2+n\pi}^{\pi/2+(n+1)\pi} e^{-\frac{\alpha}{\beta} x} |\cos x| dx \Big) \\ &= \frac{1}{\beta} \left(c_0 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n, \right) \end{aligned}$$

dove
$$c_0 = \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\alpha}{\beta}x} \cos x dx$$
e
$$a_n = \int_{\pi/2+n\pi}^{\pi/2+(n+1)\pi} e^{-\frac{\alpha}{\beta}x} |\cos x| dx.$$
Notiamo subito che se $\alpha/\beta \leq 0$, allora in $[\pi/2 + n\pi, \pi/2 + (n+1)\pi]$ si ha che
$$e^{-\frac{\alpha}{\beta}x} \geq e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\pi/2+n\pi)}$$
e quindi
$$\begin{aligned} a_n &\geq e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\pi/2+n\pi)} \int_{\pi/2+n\pi}^{\pi/2+(n+1)\pi} |\cos x| dx \\ &= e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\pi/2+n\pi)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos x| dx \\ &= 2e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\pi/2+n\pi)} \not\to 0 \end{aligned}$$
per $n \to \infty$, e quindi la non convergenza. Infine, per $\alpha/\beta < 0$ si ottiene che
$$a_n \leq e^{-\frac{\alpha}{\beta}(3\pi/2)} e^{-\frac{\alpha}{\beta}\pi n}$$
da cui la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq e^{-\frac{\alpha}{\beta}(3\pi/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\alpha}{\beta}\pi}\right)^n < +\infty$$
dato che la serie a secondo membro è una serie geometrica di ragione $e^{-\frac{\alpha}{\beta}\pi} < 1$. Quindi la funzione data è assolutamente integrabile.