Si studi $f(x) = \log\left(\cosh^2 x - \operatorname{senh} x\right)$

La funzione f è definita per

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh} x > 0$$

1°) un modo è sostituire $\cosh^2 x$ con $1 + \operatorname{senh}^2 x$ (usando: $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$)

e risolvere poi la disequazione

$$1 + \operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh} x > 0$$

Volendo si può sostituire $\operatorname{senh} x$ con un'altra variabile s e risolvere

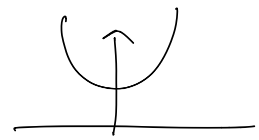
$$s^2 - s + 1 > 0$$

$$s^2 - s + 1 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 3/4$$

quindi f è definita su $\mathbb{R}$.

2°) l'altro modo, più sbrigativo, è:

osservate che $\cosh x \geq 1$



$\Rightarrow \cosh^2 x \geq \cosh$

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

? $\cosh^2 x > \operatorname{senh} x$

OSS: $\cosh x > \operatorname{senh} x$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x \geq \cosh x > \operatorname{senh}$$

f è definita $\forall\, x$ reale

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh} x = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{2e^x - 2e^{-x}}{4}$$

$$= e^{2x} \underbrace{\frac{1 + e^{-4x} + 2e^{-2x} - 2e^{-x} + 2e^{-3x}}{4}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

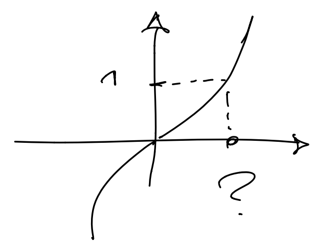
$f(x) = 0$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh} x = 1$$

$$1 + \operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh} x = 1$$

$$\operatorname{senh} x \left(\operatorname{senh} x - 1 \right) = 0$$

$x = 0$ $\qquad$ $\operatorname{senh} x = 1$



$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \overset{\geq 1}{\cosh t} = \sqrt{\cosh^2 t}$$

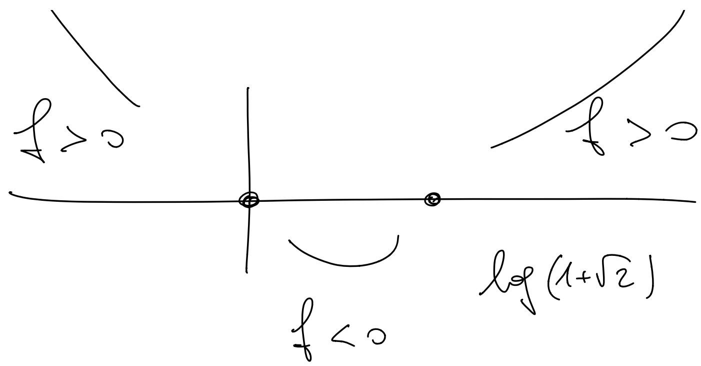
$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{senh} t$$

Sommate

$$e^t = \operatorname{senh} t + \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 t}$$

$$t = \log\left(\operatorname{senh} t + \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 t} \right)$$

$\operatorname{senh} x = 1$ $\qquad$ per $x = \log\left(1 + \sqrt{2}\right)$



per ora sappiamo

Vediamo se ci sono asintoti:

Cominciamo con il calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh} x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4} - \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} =$$

$$= e^{2x}\,\frac{1+e^{-4x}+2e^{-2x}-2e^{-x}+2e^{-3x}}{4}$$

quindi

$$f(x) = 2x + \log\left(\frac{1+e^{-4x}+2e^{-2x}-2e^{-x}+2e^{-3x}}{4}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - 2x\right] = \log\frac{1}{4} = -2\log 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \ldots$$ questa volta si raccoglie e^{-2x} $(-2x>0!)$

e si ottiene
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$$
$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)+2x] = \log\frac{1}{4} = -2\log 2$$

quindi f ha un asintoto a $+\infty$ che è $2x-2\log 2$

e un asintoto a $-\infty$ che è $-2x-2\log 2$

Studiamo f':

$$f'(x) = \frac{2\cosh x \,\mathrm{senh}\, x - \cosh x}{\cosh^2 x - \mathrm{sen}\, x}$$

si è già visto all'inizio che $\cosh^2 x - \mathrm{senh}\, x > 0$

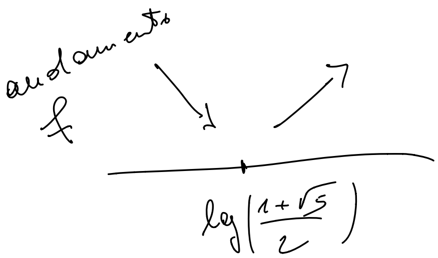
segno num.
$$\cosh x\,(2\,\mathrm{senh}\, x - 1) > 0 \quad \left(\begin{matrix} = 0 \\ < 0 \end{matrix}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2\,\mathrm{senh}\, x - 1 > 0$$
$$\mathrm{senh}\, x > 1/2$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2} \iff x = \log\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1+\frac{1}{4}}\right) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

c)
$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x < \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ = 0 & \text{per } x = \text{''} \\ > 0 & \text{per } x > \text{''} \end{cases}$$

$\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ punto stazionario

è di minimo perché prima f è decrescente
poi f è crescente



Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

f è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

e non ci sono altri punti stazionari

$\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ è di minimo assoluto!

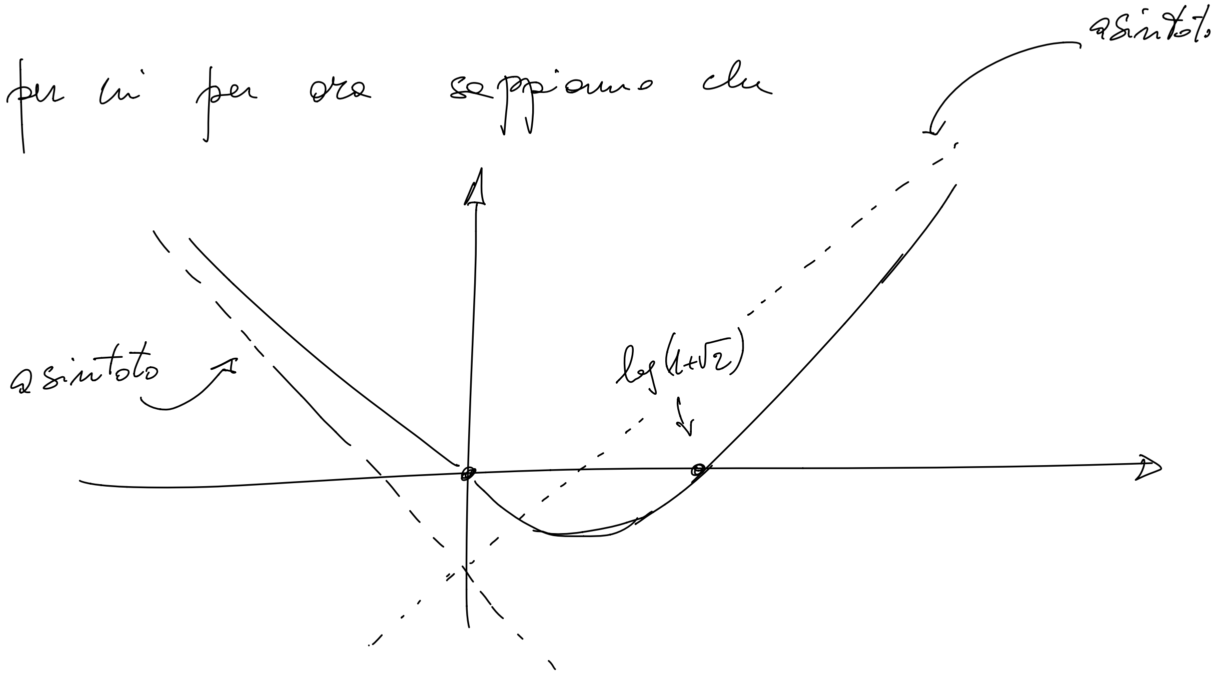
Si osservi che

f si annulla per $x = \log(1+\sqrt{2})$

$2x - 2\log 2$ si annulla per $x = \log 2$

$$\log 2 < \log(1+\sqrt{2})$$

per cui per ora sappiamo che



Pbm: concavità e convessità ?

proviamo a studiare f''. Dopo qualche calcolo (ma non troppi)

$$f''(x) = \frac{-\operatorname{senh}^3 x + 2\operatorname{senh}^2 x + \operatorname{senh} x + 1}{(\cosh^2 x - \operatorname{senh} x)^2}$$

il denominatore è sempre positivo

per studiare il segno del numeratore cosa si può fare ?

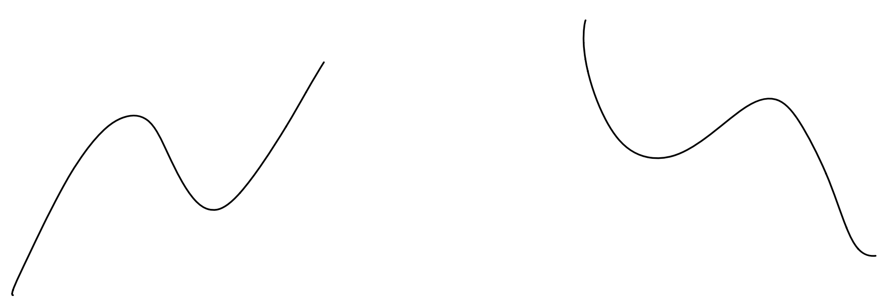
Non è facile (= qualche volta impossibile !)

però in questo caso qualcosa si può dire .

Il numeratore è un polinomio di terzo grado nella variabile $s = \operatorname{senh} x$

$$p(s) = -s^3 + 2s^2 + s + 1$$

I polinomi di terzo grado hanno grafici fatti così (in generale)

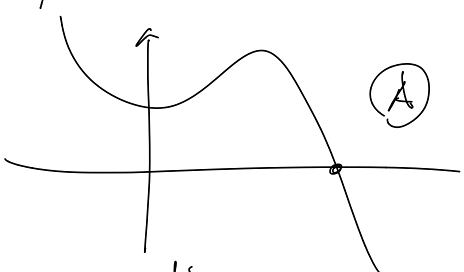


perché possono avere 1, 2, 3 radici reali e ne hanno <u>sempre</u> almeno <u>una</u>

Nel nostro caso $p(s) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$

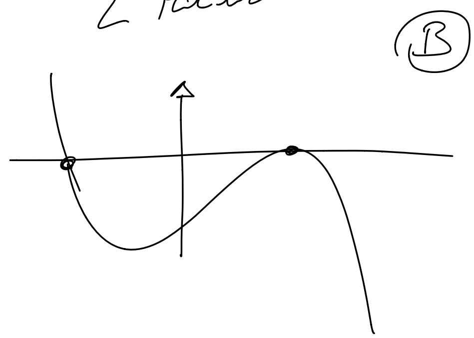
$p(s) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

quindi siamo in uno dei seguenti casi:

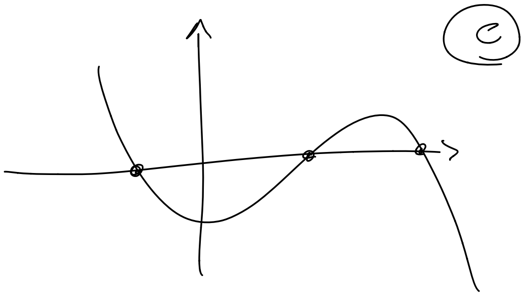


1 radice

2 radici



3 radici



1° fatto) f'' è definitivamente negativa a $+\infty$

$\Rightarrow$ f " concava (a $+\infty$)

mentre f'' è definitivamente positiva $(a-\infty)$

$\Rightarrow$ f " convessa $(a-\infty)$

Ma si può dire di più. Per capire in quale delle situazioni (A), (B), (C) siamo possiamo studiare p:

$$p'(s) = -3s^2 + 4s + 1$$

che si annulla in $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{28}}{6}$ e in $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{28}}{6}$

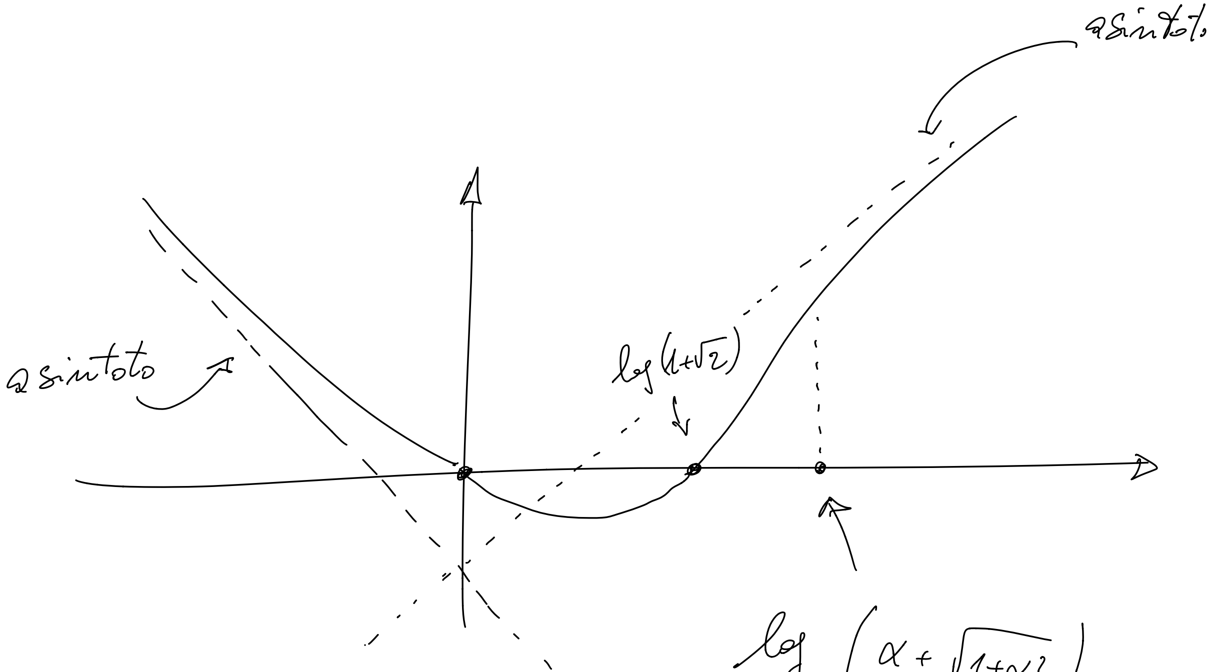
Valutando p in questi due valori si ottiene che p assume valori positivi in entrambi.

Questo significa che siamo nel caso (A)

$\Rightarrow$ esiste solo un punto in cui f cambia concavità, che non so quale sia, ma è maggiore di

$$\operatorname{senh} x = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{28}}{6} = \alpha$$

Il grafico di f allora è



$$\log\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right)$$

$$\alpha = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{28}}{6}$$

punto di flesso