Topologia in $\mathbf{R}^n$
Cenni agli spazi metrici

Ultimo aggiornamento: 7 aprile 2020

© Fabio Paronetto

1. Prodotto scalare, norma, distanza

Introduciamo in questo capitolo lo studio dello spazio ambiente a più dimensioni $\mathbf{R}^n$, anche se molte definizioni verranno date in un ambiente più generale. Se scriveremo "$x \in \mathbf{R}^n$" intenderemo che $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_i \in \mathbf{R}$ per $i = 1, 2, \dots n$.
Vediamo ora cosa sono un *prodotto scalare*, una *norma*, una *distanza*.

Nel seguito V denota uno spazio vettoriale.

Un ***prodotto scalare*** è una funzione che denoteremo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definita in $V \times V$ e a valori reali, sinteticamente $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$, che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{positività} & \langle x, x \rangle \geqslant 0 \text{ e } \langle x, x \rangle = 0 \text{ sse } x \text{ è il vettore nullo;} \\
(1) & \text{simmetria} & \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle; \\
 & \text{linearità} & \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \qquad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \,.
\end{array}
$$

Una ***norma*** in V, che denoteremo con $\| \cdot \|$, è una funzione da V a $\mathbf{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{positività} & \|x\| \geqslant 0 \text{ e } \|x\| = 0 \text{ sse } x \text{ è il vettore nullo;} \\
(2) & \text{omogeneità} & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|; \\
 & \text{subadditività} & \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.
\end{array}
$$

Vale anche la seguente proprietà, equivalente alla subadditività:

$$
\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\| \qquad \text{per ogni } x, y \in V \,.
$$

Per mostrare l'equivalenza supponiamo che per ogni $x, y \in V$ valga $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Consideriamo $\xi, \eta \in V$: scrivendo ξ come $(\xi - \eta) + \eta$ si ottiene

$$
\|\xi\| = \|(\xi - \eta) + \eta\| \leqslant \|\xi - \eta\| + \|\eta\|
$$

da cui

$$\|\xi\| - \|\eta\| \leqslant \|\xi - \eta\| \,.$$

Invertendo i ruoli di ξ ed η si ottiene anche che $\|\eta\| - \|\xi\| \leqslant \|(\xi - \eta)\|$, da cui la tesi. Viceversa, supponiamo che valga $|\|\xi\| - \|\eta\|| \leqslant \|(\xi - \eta)\|$ per ogni $\xi, \eta \in V$ e mostriamo che vale la subadditività. Consideriamo $x, y \in V$: si ha che, chiamando ξ il vettore $x + y$,

$$\|x + y\| \leqslant \|x + y - \eta\| + \|\eta\| \qquad \text{per qualunque } \eta \in \mathbf{R}^n \,.$$

Scegliendo $\eta = y$ si conclude.

Una ***distanza*** è una funzione $d : V \times V \to \mathbf{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in V$:

$$\begin{aligned} &d(x,y) \geqslant 0 \text{ e } d(x,y) = 0 \text{ se e solo se } x = y; && \text{(positività)} \\ &d(x,y) = d(y,x); && \text{(simmetria)} \\ &d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y). && \text{(disuguaglianza triangolare)} \end{aligned} \tag{3}$$

Si osservi come da ogni prodotto scalare è possibile definire una norma nel modo seguente, che è detta norma indotta dal prodotto scalare: dato $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiamo

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{4}$$

EX - Si verifichi che l'oggetto così definito è effettivamente una norma.

Osservazione 1.1. - Attenzione! Non tutte le norme sono definite tramite un prodotto scalare. A tal proposito si veda l'Esempio 1.4.

Analogamente data una generica norma è possibile definire una distanza nel modo seguente:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

EX - Si verifichi che l'oggetto così definito è effettivamente una distanza.

Osservazione 1.2. - Attenzione! Non tutte le distanze sono definite tramite una norma. Un esempio di distanza in $\mathbf{R}$ che non è indotta da una norma è $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ (non è omogenea, non soddisfa cioè la proprietà di omogeneità).

EX - Dimostrare che $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ è una distanza su $\mathbf{R}^n$ (suggerimento: usare il fatto che $|\cdot|$ lo è).

EX - Dimostrare che $\delta(x, y) := |x - y|^2$ *non* è una distanza su $\mathbf{R}^n$

© Fabio Paronetto

(suggerimento: in $\mathbf{R}^2$ si considerino $x, y, \frac{x+y}{2}$).
In generale la funzione $\delta_p(x,y) := |x-y|^p$ non è una distanza se $p > 1$.

In $\mathbf{R}^n$, che è uno spazio vettoriale, considereremo implicitamentemente, se non diversamentemente specificato,

- la base euclidea $e_1, e_2, \dots e_n$ dove $e_i = (0, \dots 0, 1, 0, \dots 0)$ e 1 è all'i-esima posizione,
- il prodotto scalare tra $x, y \in \mathbf{R}^n$, che denoteremo con $x \cdot y$ oppure con il simbolo $\langle x, y \rangle$, definito come

$$x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{5}$$

- la norma detta *modulo* o norma euclidea indotta da tale prodotto scalare e definita come

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,, \tag{6}$$

- e la distanza indotta da tale norma definita da

$$d(x,y) := |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,, \qquad x, y \in \mathbf{R}^n\,. \tag{7}$$

Si osservi come il modulo in $\mathbf{R}^n$ altro non sia che un'estensione del già noto modulo in dimensione 1. Infatti se si considera (6) con $n = 1$, cioè $|x|$ con $x \in \mathbf{R}$, si ottiene il modulo del numero reale x.

Disuguaglianza di Schwarz - Verifichiamo che, dati V spazio vettoriale, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare su V e $\| \cdot \|$ norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (si veda (4)), si ha

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\| \qquad \text{per ogni } x, y \in V \tag{8}$$

e vale

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \qquad \text{se e solo se } x = \alpha y \quad \text{per qualche } \alpha \in \mathbf{R}$$
oppure uno dei due vettori è il vettore nullo.

Infatti per ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha che

$$p(t) = \big\langle t\,x + y, t\,x + y \big\rangle \geqslant 0\,. \tag{9}$$

Svolgendo il prodotto scalare si ottiene il polinomio di secondo grado

$$p(t) = \|x\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2$$

© Fabio Paronetto

che, avendo al più una sola radice reale, avrà necessariamente discriminante Δ non positivo, cioè

$$p(t) \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \,.$$

Per la seconda parte della tesi si osservi che se uno dei due vettori è nullo la cosa è ovvia. Diversamente

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad p \quad \text{ha una sola radice}\,.$$

In particolare $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ è equivalente all'esistenza di $t \in \mathbf{R}$ per cui (si veda (9)) $t\,x + y = 0$, cioè

$$y = -t\,x\,.$$

Esempio 1.3. - Verifichiamo che la norma euclidea, cioè la funzione

$$x \mapsto |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

è effettivamente una norma. Che sia positiva e simmetrica è immediato. Rimane da verificare la subadditività. Per far ciò vediamo utilizziamo il fatto che $x \cdot y$ definito in (5) è un prodotto scalare, cosa di facile verifica. A questo punto dalla disuguaglianza di Schwarz si ha che

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot(x+y) + y(x+y) \leqslant \\ \leqslant |x||x+y| + |y||x+y| = \big(|x| + |y|\big)|x+y| \end{aligned}$$

da cui si conclude. Si intuisce come sia immediato verificare, quando si ha uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$, che la quantità $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ sia una norma. Infatti in tal caso

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \leqslant \\ \leqslant \|x\|\|x+y\| + \|y\|\|x+y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)\|x+y\|. \end{aligned}$$

EX - Si dimostri che, dati V spazio vettoriale, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ prodotto scalare su V e $\|\cdot\|$ norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (si veda (4)), si ha

$$\|x\| = \max_{\substack{y \in V,\\ \|y\| = 1}} \big\langle x, y\big\rangle\,.$$

Esempio 1.4. - Vediamo un esempio di norma diversa da quella standard di $\mathbf{R}^n$ vista prima. È sufficiente considerare $\mathbf{R}^2$ con la norma ($x = (x_1, x_2)$), che chiameremo $\|\cdot\|_a$ (il pedice a serve solo ad identificare questa specifica norma, non ha alcun significato particolare)

$$\|x\|_a := \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}\,.$$

© Fabio Tonetto

Questa norma è legata ad un prodotto scalare, come nella formula (4), diverso da quello standard, cioè a

$$\langle x, y\rangle_a := x_1y_1 + 2x_2y_2$$

e tramite questa norma possiamo definire la distanza

$$d_a(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 2(x_2 - y_2)^2}$$

Ma possiamo costruire una norma che non è associata ad alcun prodotto scalare. Ad esempio, sempre su $\mathbf{R}^2$, la famiglia di norme al variare di $p \in [1, +\infty)$ con $p \neq 2$

$$\|x\|_p := \left(|x_1|^p + |x_2|^p\right)^{1/p}$$

alle quali possiamo associare la famiglia di distanze

$$d_p(x, y) = \left(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\right)^{1/p},$$

non sono associate (da credere sulla fiducia) ad alcun prodotto scalare. Con $p = 2$ si ritrova la distanza cosiddetta euclidea e $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$.
La stessa cosa, cioè non è associata a nessun prodotto scalare, vale per la norma

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

alle quale possiamo associare la distanza

$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

EX - Per esercizio si verifichi che norme analoghe a quelle definite nell'Esempio 1.4 possono essere definite anche in $\mathbf{R}^n$ e soddisfano le proprietà elencate in (2).

EX - Si mostri che, dato $x \in \mathbf{R}^2$, vale $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Esercizio 1.5. - Si trovino e si disegnino gli insiemi di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano ($x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$)

$$d(x, 0) = |x| \leqslant 1\,, \qquad d_a(x, 0) = \|x\|_a \leqslant 1\,,$$
$$d_p(x, 0) = \|x\|_p \leqslant 1\,, \qquad d_\infty(x, 0) = \|x\|_\infty \leqslant 1\,,$$

dove tali distanze sono state definite nell'esempio precedente.
Il primo insieme è dato da dai punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 1 \quad \iff \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$$

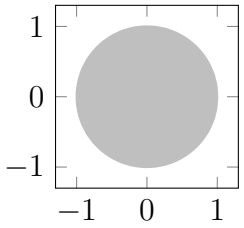
che rappresenta un cerchio di raggio 1. Il secondo insieme è dato da dai punti di $\mathbf{R}^2$ che soddisfano

$$\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2} \leqslant 1 \quad \iff \quad x_1^2 + 2x_2^2 \leqslant 1\,.$$

© Fabio Paglieri

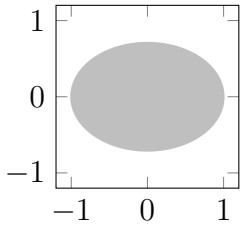
che rappresenta un'ellisse. Alcuni esempi sono rappresentati nelle figure che seguono. Si veda anche la Figura 3 più in basso.

Figura 1.a



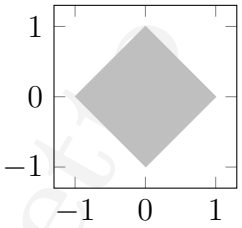
$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| \leqslant 1\}$

Figura 1.b



$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_a \leqslant 1\}$

Figura 1.c



$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_1 \leqslant 1\}$

Esempio 1.6. - Alcuni esempi di spazi normati o metrici. Si verifichi per esercizio che lo sono.

1. $\mathbf{R}^n$ con la norma $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ (si veda Esempio 1.4) è lo spazio dotato dell'usuale distanza, che chiameremo distanza euclidea.

2. $\mathbf{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_a$ o con una delle norme $\|\cdot\|_p$ definite nell'Esempio 1.4 (se $p = 2$ abbiamo l'usuale distanza).

3. L'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi con la norma $\|\cdot\|_2 = |\cdot|$.

4. L'insieme $C([a,b])$ delle funzioni continue dotato della norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

oppure lo stesso spazio dotato di una delle norme

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

sono esempi di spazi normati. Per chiarezza andrebbe specificato l'insieme, cioè andrebbe scritto $\|\cdot\|_{\infty,[a,b]}$ e $\|\cdot\|_{p,[a,b]}$, ma spesso quando è chiaro dal contesto l'insieme si omette per alleggerire la notazione.
Si osservi come la convergenza uniforme vista per successioni e serie di funzioni sia la convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$, cioè f_n converge uniformemente a f in $[a,b]$ equivale a dire

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[a,b]} = 0.$$

Si osservi che la norma $\|\cdot\|_\infty$ induce la distanza

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

© Fabio Paronetto

per cui $C([a,b])$ munito della distanza d_∞ è uno spazio metrico.

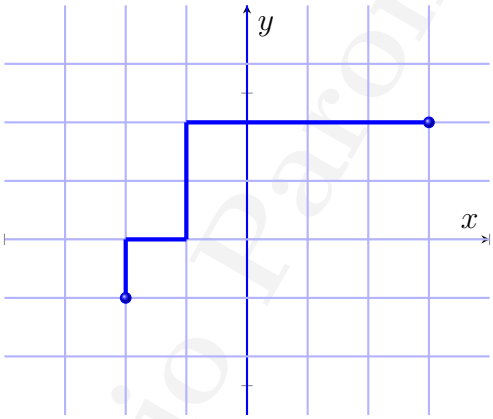
5. Come già osservato $\mathbf{R}$ munito della distanza $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ è uno spazio metrico non normato.

6. Un altro esempio di spazio metrico potrebbe essere il seguente: il reticolato mostrato in Figura 2 con la distanza

$$d_1(x,y) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Si noti che fra due punti in questo caso ci sono molti percorsi che realizzano la distanza minima.

Figura 2



Se non esplicitamente detto, in $\mathbf{R}^n$ considereremo sempre la distanza euclidea.

2. Successioni in $\mathbf{R}^n$

Una successione in $\mathbf{R}^n$ è una funzione $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^n$, dove per convenzione si denota l'elemento $x(h)$ con x_h $(h \in \mathbf{N})$ e solitamente anziché scrivere $x : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^n$ si scrive $(x_h)_{h\in\mathbf{N}}$.

Definizione 2.1. *Una successione $(x_h)_{h\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^n$ si dice:*

1. *limitata se esiste $r > 0$ tale che $|x_h| < r$ per ogni $h \in \mathbf{N}$;*
2. *convergente ad un elemento $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, e scriveremo*

$$\lim_{h\to+\infty} x_h = \bar{x}\,,$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_0 \in \mathbf{N}$ tale che $|x_h - \bar{x}| < \varepsilon$ per ogni $h \geqslant h_0$.

© Fabio Paronetto

Osservazione 2.2. - Si osservi che per $y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$|y_j| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{n} \max_{i=1,\dots n} |y_i| \quad \text{per ogni } j = 1, \dots n\,. \tag{10}$$

Quanto scritto sopra potrebbe essere riscritto come ($\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_2$ definite nell'Esercizio 1.4)

$$\|y\|_\infty \leqslant \|y\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|y\|_\infty\,.$$

Due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ in $\mathbf{R}^n$ (o entrambe definite in uno stesso spazio vettoriale V) si dicono equivalenti se esistono due costanti positive α, β tali che

$$\alpha\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant \beta\|x\|_a \qquad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}^n \quad (\text{o } x \in V).$$

Si mostri che le norme $\|\cdot\|_p$ con $p \in [1, +\infty]$ sono equivalenti tra loro in $\mathbf{R}^n$.

Osservazione 2.3. - L'osservazione precedente ha come conseguenza il seguente fatto: una successione

$$\begin{array}{c} (x_h)_h \quad \text{è convergente a} \quad \bar{x} \\ \Updownarrow \\ (x_h^i)_h \quad \text{è convergente a} \quad \bar{x}^i \qquad \text{per ogni } i \in \{1, \dots n\} \end{array}$$

dove, per evitare confusione, in questo caso denotiamo con y^i la i-esima componente di un punto $y \in \mathbf{R}^n$.
Infatti si supponga che $(x_h)_h$ sia convergente a $\bar{x}$, quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $h_0 \in \mathbf{N}$ tale che $|x_h - \bar{x}| \leqslant \varepsilon$ per ogni $h \geqslant h_0$. Si ha

$$|x_h^i - \bar{x}^i| \leqslant |x_h - \bar{x}| \leqslant \varepsilon \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots n\}$$

e quindi $(x_h^i)_h$ converge a $\bar{x}^i$ per ogni $i = 1, \dots n$. Viceversa si supponga che $(x_h^i)_h$ converga a $\bar{x}^i$ per ogni $i \in \{1, \dots n\}$. Per ogni ε ed ogni $i = 1, \dots n$ esiste $h_i \in \mathbf{N}$ tale che

$$|(x_h^i)_h - \bar{x}_i| \leqslant \varepsilon \quad \text{per ogni } h \geqslant h_i\,, i = 1 \dots n\,.$$

Chiamiamo h_0 il massimo fra $h_1, h_2, \dots h_n$. Allora

$$|(x_h^i)_h - \bar{x}_i| \leqslant \varepsilon \quad \text{per ogni } h \geqslant h_0 \quad \text{per ogni } i = 1 \dots n\,.$$

A questo punto si ha

$$|x_h - \bar{x}| \leqslant \sqrt{n} \max_{i=1,\dots n} |x_h^i - \bar{x}^i| \leqslant \sqrt{n}\,\varepsilon \quad \text{per ogni } h \geqslant h_0$$

il che conclude la dimostrazione.

A questo punto, ragionando componente per componente, molti fatti visti per le successioni a valori reali valgono anche per successioni a valori in $\mathbf{R}^n$. Vediamone alcuni:

© Paolo Paroncello

1. una successione $(x_h)_{h\in\mathbf{N}}$ è limitata se e solo se lo sono le sue componenti;
2. se una successione è convergente allora è limitata;
3. il limite di una successione $(x_h)_h$ è unico;
4. se $(x_h)_h$ converge a x e $(y_h)_h$ converge a y allora $(x_h + y_h)_h$ converge a $x + y$;
5. se $(x_h)_h$ converge a x allora $(\lambda x_h)_h$ converge a λx per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

In particolare vale anche il seguente risultato, analogo al caso unidimensionale.

Teorema 2.4. *Ogni successione di Cauchy in* $\mathbf{R}^n$ *ammette limite in* $\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione - Ragionare componente per componente. □

Esempio 2.5. - Consideriamo le seguenti successioni in $\mathbf{R}^2$:

(1) se definiamo
$$x_h = \left(\frac{1}{h}, \frac{h+1}{h}\right),$$
dato che la prima componente, $\frac{1}{h}$, converge a 0 e la seconda, $\frac{h+1}{h}$, converge ad 1, si avrà che la successione converge al punto $(0, 1) \in \mathbf{R}^2$;

(2) se definiamo
$$x_h = \left((-1)^h, \frac{1}{h}\right)$$
non converge in quanto la successione delle prime componenti, $(-1)^h$, non converge.

Analogamente la definizione di successione estratta sarà data in modo analogo alla definizione di successione estratta in $\mathbf{R}$, e cioè tramite una funzione $k : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ crescente, da cui la successione estratta $(x_{h_k})_{h\in\mathbf{N}}$ è data da $x_{h_k} = x_{k(h)}$.

3. Topologia in $\mathbf{R}^n$

Cominciamo ora a definire alcuni insiemi ed alcune proprietà degli insiemi che ci saranno utili nel seguito.

Definizione 3.1 (Intorno sferico)**.** *Si chiamano intorno sferico aperto ed intorno sferico chiuso del punto* $x_o \in \mathbf{R}$ *di raggio* $r > 0$ *oppure palla*

© Fabio Parcinetto

aperta, o palla chiusa, di centro x_o e raggio r gli insiemi

$$B_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, d(x, x_o) < r\}, \quad \bar{B}_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_o) \leqslant r\}$$

mentre viene detta sfera di centro x_o e raggio $r > 0$ l'insieme

$$S_r(x_o) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, x_o) = r\}.$$

Si noti che $\bar{B}_r(x) = B_r(x) \cup S_r(x)$. Spesso, se chiaro dal contesto, scriveremo solamente B_r, $\bar{B}_r$ e S_r e diremo semplicemente "intorno" o "palla", oppure "intorno aperto" o "palla aperta", per intorno sferico aperto, "intorno chiuso" o "palla chiusa" per intorno sferico chiuso.

Definizione 3.2 (Insieme aperto e chiuso)**.** *Un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ è aperto se per ogni $x_o \in A$ esiste un intorno aperto di centro x_o contenuto in A, cioè esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_o) \subset A$.*
Un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$ è chiuso se il complementare di A, che si denota con A^c, è aperto, dove con complementare di un insieme A indichiamo l'insieme

$$A^c := \mathbf{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, x \notin A\}.$$

Definizione 3.3. *Dato $E \subset \mathbf{R}^n$ e $x \in \mathbf{R}^n$, si dice che:*

1. *x è punto interno ad E se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset E$;*
2. *x si dice esterno ad E se x è interno ad E^c, cioè se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap E = \emptyset$.*

Un punto x che non è né interno né esterno si dice punto di bordo *o di* frontiera*. Denoteremo con:*

3. *$\mathring{E}$ l'insieme dei punti interni ad E;*
4. *∂E l'insieme dei punti di frontiera di E;*
5. *$\bar{E} = E \cup \partial E$ la chiusura di E.*

Osservazione 3.4. - Dato un qualunque insieme E si ha che $\mathring{E}$ è sempre un insieme aperto ed è il più grande insieme aperto contenuto in E; $\bar{E}$ è sempre un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene E.

Osservazione 3.5. - Per ogni $E \subset \mathbf{R}^n$ si ha $\mathring{E} \subset E \subset \bar{E}$. Da ciò di deduce anche che la chiusura di E può essere definita anche come $\bar{E} = \mathring{E} \cup \partial E$.

© Ilaria Paoletti

Osservazione 3.6. - Dato un punto $x_o \in \partial E$ si ha che ogni palla $B_r(x_o)$ soddisfa

$$B_r(x_o) \cap E \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad B_r(x_o) \cap E^c \neq \emptyset.$$

Teorema 3.7. *Sia $E \subset \mathbf{R}^n$. Allora*
- *E è aperto se e solo se $E = \mathring{E}$;*
- *E è chiuso se $\bar{E} = E$.*

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Teorema 3.8. *Un insieme C è chiuso se e solo se ogni successione $\{x_n\}_{n\in N} \subset C$, $\{x_n\}_{n\in N}$ di Cauchy, converge ad un elemento di C.*

Dimostrazione - Sia C chiuso e sia $\{x_n\}_{n\in N}$ una successione di Cauchy. Allora $\{x_n\}_{n\in N}$ converge a $x \in \mathbf{R}^n$. Se x non appartenesse a C allora x apparterrebbe al suo complementare C^c, che è aperto. Di conseguenza esisterebbe $B_r(x) \subset C^c$ e quindi $\{x_n\}_{n\in N}$ non potrebbe convergere a x. Viceversa, supponiamo che ogni successione di Cauchy contenuta in C converga ad un elemento di $x \in C$ e mostriamo che C è chiuso.
Consideriamo $y \in \bar{C}$, cioè $y \in \mathring{C}$ oppure $y \in \partial C$. In entrambi i casi per ogni n esiste $x_n \in C$ tale che

$$|y - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Allora $\{x_n\}_{n\in N}$ è una successione di Cauchy contenuta in C e per ipotesi converge ad un elemento di C. Concludiamo che $y \in C$, e poiché y era stato scelto in $\bar{C}$ ed in maniera arbitraria si conclude che $\bar{C} = C$. □

Definizione 3.9 (punto di accumulazione - punto isolato)**.** *Dato un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$, diremo che un punto $x_0 \in \mathbf{R}^n$ è di* accumulazione *per E se*

$$\textit{per ogni } r > 0 \qquad B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset\,;$$

diremo che $x_0 \in E$ è un punto isolato se

$$\textit{esiste } r > 0 \textit{ tale che} \qquad B_r(x_0) \cap E = \{x_0\}\,.$$

Si osservi che se x_0 è un punto isolato dell'insieme E si ha che per un certo raggio r

$$B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) = \emptyset\,,$$

cioè x_0 è l'unico punto dell'intersezione tra $B_r(x_0)$ ed E. Se invece x_0 è di accumulazione si ha che per ogni $r > 0$ l'insieme $B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\})$

© Fabio Scaletto

non è vuoto. Poiché prima di intersecare con la palla $B_r(x_0)$ priviamo l'insieme E del punto x_0 un punto di accumulazione può appartenere o meno all'insieme E. D'altra parte ci sono anche punti che appartengono ad un insieme, ma che non sono punti di accumulazione (quelli isolati).

Osservazione 3.10. - Si fissi un punto $x_o \in \mathbf{R}^n$ ed un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$:
- se x_o è isolato per E allora $x_o \in \partial E$;
- se $x_o \in \partial E$, ma x_o non è isolato per E, allora x_o è di accumulazione per E;
- se x_o è di accumulazione per E allora $x_o \in \mathring{E}$ oppure $x_o \in \partial E$, ma non è isolato per E.

Esempio 3.11. - Consideriamo l'insieme $E = (0, 1] \cup \{2\}$. L'insieme dei punti di accumulazione di E è $[0, 1]$, e si noti che $0 \notin E$; 2 è un punto isolato di E e non è di accumalzione per E.

Definizione 3.12 (Insiemi limitati e insiemi compatti)**.** *Diremo che un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è* limitato *se esiste $r > 0$ tale che $E \subset B_r(0)$, o equivalentemente se esiste $r > 0$ tale che $|x| < r$ per ogni $x \in E$.*
Un insieme $K \subset \mathbf{R}^n$ viene detto compatto *se è chiuso e limitato.*
Un insieme $K \subset \mathbf{R}^n$ è compatto per successioni *se da ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset K$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$.*

Teorema 3.13 (Heine-Borel)**.** *Un insieme $K \subset \mathbf{R}^n$ è compatto se e solo se è compatto per successioni.*

Dimostrazione - Dimostrazione analoga a quella in dimensione 1 (si ragiona componente per componente). □

Proposizione 3.14. *Un punto $x \in \mathbf{R}^n$ è un punto di accumulazione per $E \subset \mathbf{R}^n$ se e solo se esiste una successione $(x_h)_{h\in\mathbf{N}} \subset E$ con $x_h \neq x$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e tale che x_h converge a x.*

Attenzione! Non ci sono solamente insiemi aperti o chiusi, ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi (come mostrato in qualcuno degli esempi che seguono).

Esempio 3.15. - Vediamo alcuni esempi.

1. Se fissiamo $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$, allora (a, b) è aperto, $[a, b]$ è chiuso, $(a, b]$ e $[a, b)$ non sono né aperti né chiusi; in tutti i casi l'insieme dei punti di frontiera è dato da $\{a, b\}$; in tutti i casi la parte interna è data da (a, b); in tutti i casi la chiusura è data da $[a, b]$;

© Mario Merola

2. $E = \mathbf{R}^n$ è aperto, così come $E^c = \emptyset$ è aperto. Si osservi che $\partial E = \emptyset$. Quindi $\mathbf{R}^n$ è sia aperto che chiuso; questo è l'unico insieme di $\mathbf{R}^n$ con tale proprietà.
3. $E = \mathbf{Q}$ visto come sottoinsieme di $\mathbf{R}$: abbiamo che $\mathring{E} = \emptyset$, $\bar{E} = \partial E = \mathbf{R}$; quindi $\mathbf{Q}$ non è né aperto né chiuso.
4. Sia $E = B_r(x)$ oppure $E = \bar{B}_r(x)$: in entrambi i casi si ha che $\mathring{E} = B_r(x)$, $\bar{E} = \bar{B}_r(x)$ e $\partial E = S_r(x)$.
5. Gli insiemi in Figura 1 sono tutti chiusi e hanno come frontiera rispettivamente gli insiemi $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| = 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_a = 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_p = 1\}$ con $p \in [1, +\infty]$, che sono le curve blu evidenziate in Figura 3.
   Gli insiemi (dove la disuguaglianza è stretta!) $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_a < 1\}$, $\{x \in \mathbf{R}^2 : \|x\|_p < 1\}$ con $p \in [1, +\infty]$ sono aperti.
6. Si consideri l'insieme

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x \in [2, 5]\}$$

   cioè un intervallo di $\mathbf{R}$. Di questo sappiamo che la parte interna è $(2, 5)$, che la frontiera è $\{2, 5\}$, la chiusura $[2, 5]$ (si veda l'esempio al punto 1.). Consideriamo il segmento, evidenziato in Figura 4.a

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \in [2, 5]\,, y = 0\}.$$

   Apparentemente è lo stesso segmento di prima, ma questa volta è visto come sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$. Tale insieme ha come parte interna l'insieme vuoto $\emptyset$, come frontiera esattamente l'insieme S e come chiusura ancora S ed è un insieme chiuso. L'insieme

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x \in (2, 5)\,, y = 0\}$$

   non è né aperto né chiuso.
7. In generale, data una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continua (vedremo la definizione di continuità più avanti) ed una costante $c \in \mathbf{R}$ gli insiemi

$$\{x \in \mathbf{R}^n \,|\, f(x) > c\} \qquad \text{e} \qquad \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, f(x) < c\}$$

   sono aperti, mentre gli insiemi

$$\{x \in \mathbf{R}^n \,|\, f(x) \geqslant c\} \qquad \text{e} \qquad \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, f(x) \leqslant c\}$$

   sono chiusi. Ad esempio, gli insiemi al punto 5. nei quali f è una delle norme. Altro esempio, data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si consideri

© Fabio Paroscelo

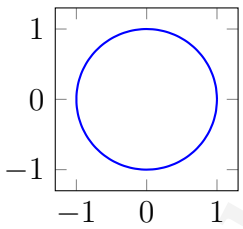
la funzione $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $g(x, y) = y - f(x)$; allora gli insiemi

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, g(x, y) \leqslant 0\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \leqslant f(x)\},$$
$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, g(x, y) \geqslant 0\} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \geqslant f(x)\},$$

rispettivamente sottografico e sopragrafico di f, sono chiusi. Analogamente i corrispondenti insiemi con le disuguaglianze strette sono aperti.

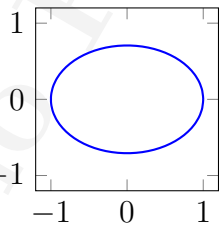
8. L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 - y < 0\}$ (in Figura 4.b è la parte tratteggiata di cerchio che sta anche nel sopragrafico della parabola) non è né aperto né chiuso, perché la frontiera non è tutta contenuta in E (e questo fa sì che non sia chiuso), ma lo è in parte (e questo fa sì che non sia aperto).
9. L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x^2 - y = 0\}$ mostrato in Figura 5 è chiuso.

Figura 3.a



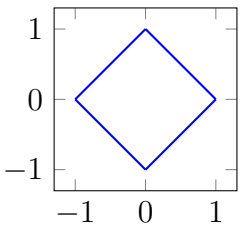
$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, |x| = 1\}$

Figura 3.b



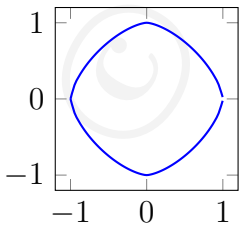
$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_a = 1\}$

Figura 3.c



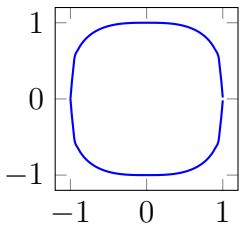
$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_1 = 1\}$

Figura 3.d - $p < 2$



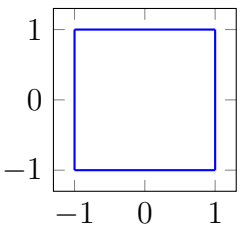
$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_p = 1\}$

Figura 3.e - $p > 2$



$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_p = 1\}$

Figura 3.f



$\{x \in \mathbf{R}^2 \,:\, \|x\|_\infty = 1\}$

© Fabio Paroscio

Figura 4.a

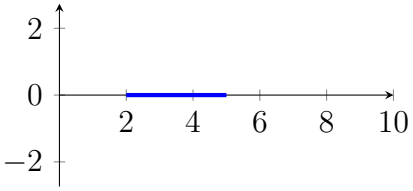


Figura 4.b

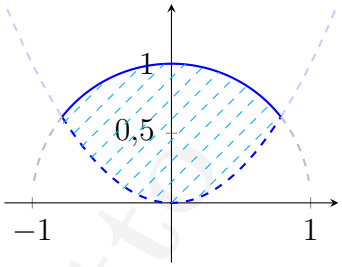
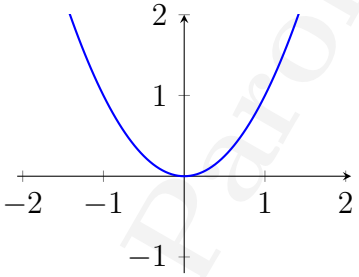


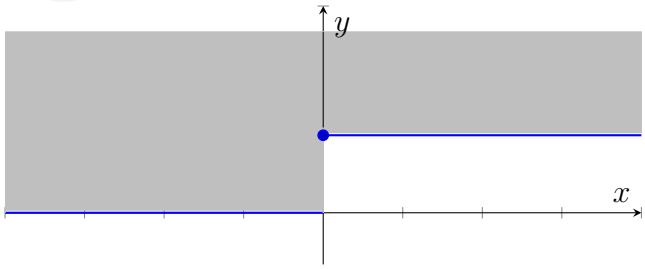
Figura 5



Osservazione 3.16. - Si osservi che se f non è continua (anche se non abbiamo ancora visto la definizione) non vale quanto detto nell'Esempio 3.15.7. Ad esempio, presa la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = 0$ per $x < 0$ e $f(x) = 1$ per $x \geqslant 0$ si ha che

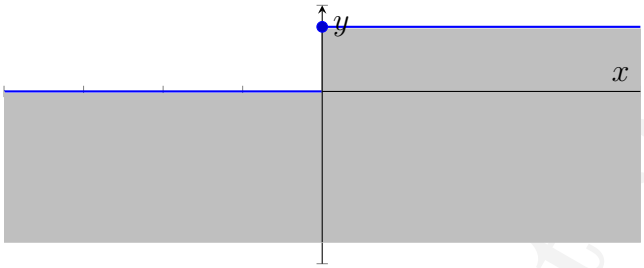
$$D = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, y \geqslant f(x)\} \qquad \text{non è chiuso,}$$
$$B = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, y < f(x)\} \qquad \text{non è aperto.}$$

Figura 6.a - Insieme D



© Fabio Paronetto

Figura 6.b - Insieme B



Nella seguente proposizioni sono elencate le principali proprietà degli aperti e dei chiusi sotto le operazioni di unione e intersezione.

Proposizione 3.17. *Supponiamo di avere due famiglie, una $\mathcal{A}$ fatta di insiemi aperti e una $\mathcal{C}$ fatta di insiemi chiusi. Allora*

1. *l'insieme*

   $$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, x \in A \text{ per qualche } A \in \mathcal{A}\} \qquad \text{è aperto,}$$

   l'insieme

   $$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, x \in C \text{ per ogni } C \in \mathcal{C}\} \qquad \text{è chiuso;}$$

2. *dato un numero finito di insiemi $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ e $C_1 \ldots, C_m \in \mathcal{C}$, l'insieme*

   $$A_1 \cap \ldots \cap A_k \qquad \text{è aperto,}$$

   l'insieme

   $$C_1 \cup \ldots \cup C_m \qquad \text{è chiuso.}$$

Dimostrazione - Senza dimostrazione. □

Esempio 3.18. - Si osservi che l'intersezione arbitraria di insiemi aperti non è in genere aperta; si considerino, ad esempio, gli insiemi aperti

$$A_n = (-1/n, 1/n) \subset \mathbf{R}\,.$$

Si ha che

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} A_n = \{0\}$$

e quest'ultimo è un insieme chiuso.
Analogamente l'unione arbitraria di insiemi chiusi non è in genere chiusa; si considerino, ad esempio, gli insiemi chiusi

$$C_n = [-1 + 1/n, 1 - 1/n] \subset \mathbf{R}\,.$$

© Fabio Paronetto

Si ha che

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} C_n = (-1,1)$$

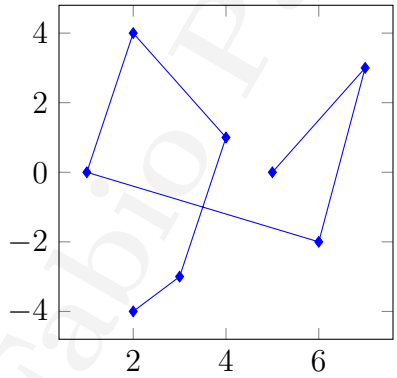
e quest'ultimo è un insieme aperto.

Segmento e poligonale - Dati due punti $x, y \in \mathbf{R}^n$ si dice segmento, e si denota con $[x,y]$, l'insieme

$$[x,y] = \{z \in \mathbf{R}^n \,|\, z = (1-t)x + ty\,, t \in [0,1]\}\,.$$

Dati k punti (ordinati) $x_0, x_1, \ldots, x_k$ in $\mathbf{R}^n$ chiamiamo poligonale l'unione (ordinata) dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots k$ e la denoteremo con $P(x_0, x_1, \ldots x_k)$. Ad esempio, dati i punti nel piano $x_0 = (2,-4), x_1 = (3,-3), x_2 = (4,1), x_3 = (2,4), x_4 = (1,0), x_5 = (6,-2), x_6 = (7,3), x_7 = (5,0)$, la poligonale che unisce, nell'ordine, $x_0, x_1, \ldots x_7$ è la curva il cui sostegno è nella figura che segue.

Figura 7 - Esempio di poligonale



Insieme connesso per poligonali - Diremo che un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è *connesso per poligonali* se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ esiste una poligonale di vertici $x_0, x_1, \ldots x_k$ dove $x_0 = x$, $x_k = y$, tutta contenuta in E.
Se un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ è connesso per poligonali ed è aperto diremo semplicemente che è *connesso*. Si può dimostrare che ogni aperto di $\mathbf{R}^n$ può essere scritto come unione, disgiunta, di aperti connessi. Ciascuno di questi aperti viene detto componente connessa. Chiaramente se E è aperto e connesso ha una sola componente connessa.
Si osservi che per essere connesso per poligonali non è necessario che un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ sia aperto. Ad esempio $\{x \in \mathbf{R}^n \,:\, |x|^2 \leqslant 1\}$ è chiuso e connesso per poligonali.

© Fabio Paronetto

Insieme convesso - Diciamo che un insieme E è *convesso* se per ogni coppia di punti $x, y \in E$ il segmento $[x, y]$ è contenuto in E.

Insieme stellato - Diciamo che un insieme E è *stellato rispetto ad un punto* $x_0 \in E$ se per ogni punto $x \in E$ il segmento $[x_0, x]$ è contenuto in E.
Ovviamente un insieme stellato è anche connesso per poligonali.

Esempio 3.19. - Gli insiemi in Figura 1 sono insiemi connessi, convessi e stellati.
L'insieme in Figura 8.a è connesso, stellato, ma non convesso.
L'insieme in Figura 8.b non è connesso (ha due componenti connesse).

Figura 8.a

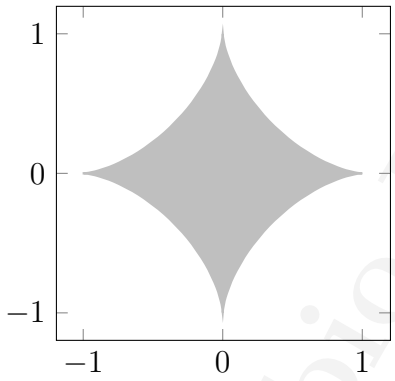
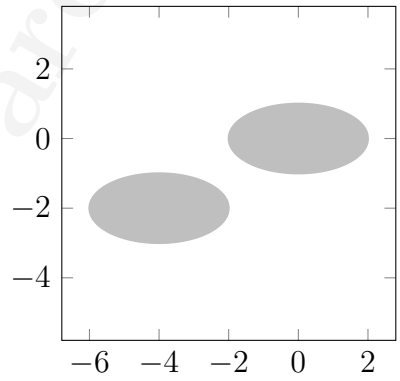


Figura 8.b



© Fabio Paronetto

4. Limiti

Veniamo ora allo studio delle funzioni di più variabili, e più precisamente alla definizione di limite e continuità per funzioni di più variabili.

Definizione 4.1. *Data una funzione* $f : E \to \mathbf{R}^k$ *con* $E \subset \mathbf{R}^n$ *e* x_0 *punto di accumulazione per* E*, diremo che* $f(x)$ *tende ad un vettore* $l \in \mathbf{R}^k$ *per* x *che tende ad* x_0*, in simboli*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = \lim_{\substack{|x - x_0| \to 0 \\ x \in E}} f(x) = l \in \mathbf{R}^k \tag{11}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che se* $x \in E$ *è tale che* $0 < |x - x_0| < \delta$, *allora* $|f(x) - l| < \varepsilon$; *equivalentemente*

$$x \in E \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \in B_\varepsilon(l).$$

Diremo inoltre, nel caso in cui f *è a valori scalari* (*e non vettoriali!*) *che*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che se* $x \in E$ *soddisfa* $0 < |x - x_0| < \delta$, *allora* $f(x) > M$.
In maniera analoga si definisce il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Come nel caso di limiti per successioni, anche in questo caso avremo che la validità di (11) è equivalente a

$$\lim_{x \to x_0} f_j(x) = l_j \qquad \text{per ogni } j = 1, \ldots, n.$$

Poiché il calcolo dei limiti di funzioni vettoriali si riduce a fare il calcolo componente per componente, anche gli enunciati spesso possono essere ridotti al caso di funzioni a valori scalari e non vettoriali.
Possiamo definire il limite anche per x che "va all'infinito", nel caso l'insieme sia illimitato. Se $f : E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, E illimitato (come ad esempio in Figura 9), possiamo definire

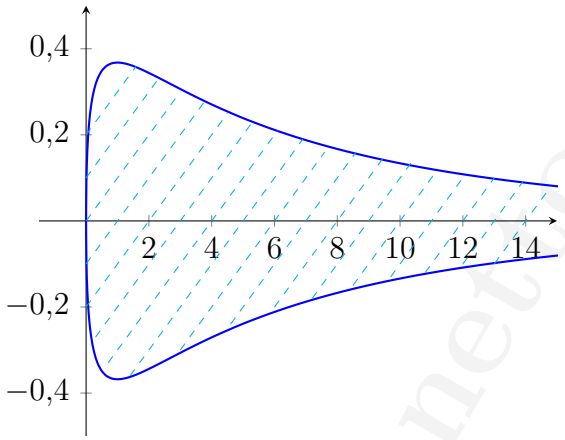
$$\lim_{\substack{|x| \to +\infty \\ x \in E}} f(x) = l \in \mathbf{R}$$

dicendo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N > 0$ tale che

$$\text{se } |x| > N \text{ e } x \in E \quad \text{allora} \quad |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

© Fabio Paronetto

Figura 9



Ciò significa che se $x \notin \bar{B}_N(0)$, ma $x \in E$, allora $f(x) \in B_\varepsilon(l)$.
Vale la seguente utile proposizione, che riduce lo studio dei limiti allo studio di limiti di successioni.

Proposizione 4.2. *Data $f : E \to \mathbf{R}^k$ e x_0 punto di accumulazione per E, abbiamo che*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = l \tag{12}$$

se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbf{N}}$ convergente a x_0, la successione $f(x_h)_{h\in\mathbf{N}}$ converge ad l, cioè

$$\lim_{h\to+\infty} f(x_h) = l\,.$$

Come visto per le successioni, anche per il limite di funzioni valgono le seguenti proprietà;

1. $f(x) \to l \in \mathbf{R}^k$ se e solo se per ogni $j = 1, \dots k$ si ha che $f_j(x) \to l_j$;
2. se $f(x) \to l$ e $g(x) \to l'$, allora $f(x) + g(x) \to l + l'$ (a meno di forme indeterminate);
3. se $f(x) \to l$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, allora $\lambda f(x) \to \lambda l$.

Analogamente al caso unidimensionale si definiscono estremo superiore, estremo inferiore, massimo e minimo per funzioni $f : E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ (attenzione! solo per funzioni f a valori scalari e non vettoriali).

© Fabio Paronetto

5. Spazi metrici e teorema delle contrazioni

In questo paragrafo accenniamo a qualche risultato in un ambiente più generale di $\mathbf{R}^n$, un generico spazio dotato di una distanza (definita in (3)).

Definizione 5.1 (Spazio metrico)**.** *Uno spazio metrico è una coppia (X, d), X è un insieme e $d : X \times X \to [0, +\infty)$ è una distanza.*

Si sono già visti alcuni esempi di spazio metrico nell'Esempio 1.6.

Definizione 5.2 (Spazio metrico completo)**.** *Uno spazio metrico (X, d), X si dice* completo *se ogni successione di Cauchy è convergente in X.*

Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ in (X, d) è di Cauchy se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \qquad \text{per ogni } n, m \geqslant \nu.$$

Si osservi che non sempre le successioni di Cauchy in uno spazio (X, d) sono convergenti (ad un elemento dello spazio X).

Esempio 5.3. -

1. L'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali munito della distanza euclidea è uno spazio metrico completo.

2. L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali munito della distanza euclidea è uno spazio metrico, ma non è completo.
Esempio: la successione $\{q_n\}_n$ definita da $q_n = (1 + n^{-1})^n$ è tale che $q_n \in \mathbf{Q}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, ma $q_n \to e \notin \mathbf{Q}$, cioè il limite "cade" al di fuori dell'insieme $\mathbf{Q}$.
In generale, dato un qualunque numero irrazionale x è possibile trovare una successione di razionali $\{q_n\}_n$ convergente a x in $\mathbf{R}$.

3. L'insieme $X = C^0([0, 1])$ munito della distanza

$$d_1(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

è uno spazio metrico non completo.
Infatti si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ (definite in $[0, 1]$). Si supponga, senza perdita di generalità, che $m > n$. Si ha allora che

$$|f_n(x) - f_m(x)| = x^n|1 - x^{m-n}| \leqslant x^n,$$

da cui, per ogni $m \geqslant n$, si ha che

$$d_1(f_n, f_m) := \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$$

© Fabio Paronetto

e quindi chiaramente $\{f_n\}_n$ è di Cauchy in (X, d_1), ma il limite delle f_n è una funzione discontinua: in conclusione $(f_n)_n$ non converge in X.

EX - Si mostri che lo spazio $C^0([0,1])$ non è uno spazio metrico completo se munito di una delle distanze

$$d_p(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \, dx, \qquad p \in [1, +\infty).$$

Date due funzioni $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$, continue, ricordiamo la distanza introdotta nell'Esempio 1.6.4

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - g(x)\big|.$$

Proposizione 5.4. *L'insieme $X = C^0([0,1])$ munito della distanza d_∞ è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione - Si consideri una successione $\{f_n\}_n$ che sia di Cauchy in X rispetto alla distanza d_∞; quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ per il quale

$$\sup_{x\in[0,1]} \big|f_n(x) - f_m(x)\big| < \epsilon \qquad \text{per ogni } n, m \geqslant \nu. \tag{13}$$

Ciò implica che, per ogni $x \in [0,1]$ fissato, la successione $\{f_n(x)\}_n$ è di Cauchy in $\mathbf{R}$, e quindi esiste un limite puntuale di f_n che chiameremo f. A questo punto fissato x arbitrario da (13) si ha che

$$\big|f_n(x) - f_m(x)\big| < \epsilon \qquad \text{per ogni } n, m \geqslant \nu$$

e passando al limite, per $m \to +\infty$, si ottiene

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \epsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu.$$

Poiché ciò è indipendente dalla scelta di x otteniamo che l'ultima disuguaglianza vale per ogni $x \in [0,1]$, cioè

$$\sup_{x\in[0,1]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \epsilon \qquad \text{per ogni } n \geqslant \nu.$$

Questo è equivalente a dire che

$$(f_n)_n \quad \text{converge uniformemente a} \quad f \qquad \text{in } [0,1]$$

e da quanto visto riguardo la convergenza uniforme di funzioni continue, si conclude che $f \in C^0([0,1])$. □

EX - Lo spazio $X = C^0\big((0,1)\big)$ dotato della distanza d_∞ è uno spazio metrico completo?

© Fabio Paronetto

EX - Sia $X = C^1([0,1])$ lo spazio delle funzioni continue e derivabili in $[0,1]$ con derivata continua in $[0,1]$.
Si dimostri che X munito della distanza

$$d(f,g) := d_\infty(f,g) + d_\infty(f',g')$$

è uno spazio metrico completo.

In uno spazio metrico è possibile definire una nozione di limite e di continuità di una funzione in maniera analoga a quella definita in $\mathbf{R}^n$.

Limite di una successione - Data una successione $\{x_n\}_n \subset X$, (X,d) spazio metrico, diciamo che $\{x_n\}_n$ ha limite $\bar{x} \in X$ se

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, \bar{x}) = 0.$$

Limite in un punto per una funzione - Data una funzione $F : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, X e Y spazi metrici, diciamo che

$$\lim_{x\to x_o} F(x) = y_o \in Y$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{per ogni } x \in X,\ 0 < d_X(x, x_o) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y\big(F(x), y_o\big) < \epsilon.$$

Continuità in un punto per una funzione - Diciamo che F è continua in $x_o \in X$ se

$$\lim_{x\to x_o} F(x) = F(x_o).$$

Esempi - Due casi importanti nei quali considereremo funzioni continue sono i seguenti: $X = [a,b]$ e $Y = \mathbf{R}^k$ (funzioni vettoriali di una variabile che chiameremo curve), $X = \mathbf{R}^n$ e $Y = \mathbf{R}$ (funzioni scalari di più variabili).

Definizione 5.5. *Dato uno spazio metrico (X,d), una mappa $F : X \to X$ è detta* contrazione *se esiste $\alpha \in (0,1)$ tale che*

$$d\big(F(x), F(y)\big) \leqslant \alpha\, d(x,y)$$

Osservazione 5.6. - Si osservi che se $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo di $\mathbf{R}$, è una funzione di classe C^1 e $|f'(x)| \leqslant \alpha$ con $\alpha \in (0,1)$, allora f è una contrazione.

Osservazione 5.7. - Si osservi che una contrazione è una mappa continua in ogni punto di X.

© Fabio Paronetto

Il seguente risultato è noto come teorema delle contrazioni o del punto fisso. Data una mappa $F : X \to X$, X spazio metrico (ma potrebbe essere un generico insieme) si dice punto fisso un elemento $\bar{x} \in X$ tale che

$$F(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Teorema 5.8 (Teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli)**.** *Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $F : X \to X$ una contrazione. Allora esiste ed è unico un punto fisso per F.*

Dimostrazione - Si scelga un punto $x_o \in X$ arbitrario e si definisca per ricorrenza la successione $x_1 := F(x_o)$ e

$$x_{n+1} := F(x_n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Si osservi che, scelto $k \in \mathbf{N}$, si ha

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) = d\big(F(x_k), F(x_{k-1})\big) &\leqslant \alpha\, d(x_k, x_{k-1}) \leqslant \\ &\leqslant \alpha^2\, d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^k\, d(x_1, x_o). \end{aligned}$$

Ora verifichiamo che $\{x_n\}_n$ è di Cauchy: si fissino $n, p \in \mathbf{N}$. Si ha

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) = \\ &= \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1}, x_k) \leqslant \\ &\leqslant d(x_1, x_o) \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k = d(x_1, x_o)\, \alpha^n \Big[1 + \alpha + \ldots + \alpha^{p-1}\Big] \leqslant \\ &\leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_1, x_o) \end{aligned}$$

per ogni $p \in \mathbf{N}$. Poiché $\alpha \in (0, 1)$ si conclude che $\{x_n\}_n$ è di Cauchy, poiché X è completo esiste $\bar{x} \in X$ tale che $x_n \to \bar{x}$. Dalla continuità di F e dalla definizione di $\{x_n\}_n$

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

si ottiene passando al limite che $F(\bar{x}) = \bar{x}$. Rimane da verificare che $\bar{x}$ è l'unico punto fisso di F. Sia $\bar{y} \in X$ un punto fisso per F: allora

$$0 \leqslant d(\bar{x}, \bar{y}) = d\big(F(\bar{x}), F(\bar{y})\big) \leqslant \alpha\, d(\bar{x}, \bar{y})$$

che è possibile solo se $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. □

Esempio 5.9. -

1. Si consideri l'equazione $x = \cos x$ per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. È chiaro che tale equazione ha una (e una sola) soluzione. Poiché la derivata

© Fabio Paronetto

della funzione coseno varie tra -1 e 1 tale funzione è una contrazione (dovremmo considerare $x \in [-\pi/2 + \epsilon, \pi/2 - \epsilon]$ con ϵ arbitrario, ma piccolo e positivo, altrimenti non si trova la soluzione. (in realtà la cosa non cambia se ci si allarga anche fino a $[-\pi/2, \pi/2]$).
Per gioco si può provare a scegliere un numero arbitrario in $[-\pi/2, \pi/2]$, ad inserire il valore di x in una calcolatrice, e a questo punto premere il testo "cos" diverse volte. Si noterà che dopo tre o quattro battute il valore si stabilizzerà, indipendentemente dalla scelta del valore di x.

2. L'equazione in $\mathbf{R}$ ($a, b \in \mathbf{R}$)

$$x = ax + b$$

ha soluzione unica per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 1$. Supponiamo per semplicità $a > 0$: se $a \in (0, 1)$ la mappa $l(x) = ax + b$ è una contrazione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$; se $a > 1$ basta considerare

$$\frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = x$$

e ragionare sulla mappa $m(x) = a^{-1}x - ba^{-1}$, che è una contrazione.

3. Il ragionamento si estende parzialmente a sistemi lineari del tipo

$$x = A \cdot x + b, \qquad A \text{ matrice } n \times n,\ b \in \mathbf{R}^n$$

con $x \in \mathbf{R}^n$. In questo caso il fatto che la mappa $L(x) = A \cdot x + b$ sia o meno una contrazione dipende dalla distanza che si mette su $\mathbf{R}^n$ e conseguentemente dalla norma che si mette nello spazio delle matrici $n \times n$. Se la norma di A è minore di 1 allora la mappa L è una contrazione, ma se la norma di A è maggiore di 1 non è detto che la norma di A^{-1} sia minore di 1! Ciò è vero solo in dimensione 1 (caso banale dell'esempio precedente).

Scelta una norma in $\mathbf{R}^n$, chiamiamola $\|\cdot\|$, si definisce la norma su una matrice A $n \times n$ come

$$\|A\|_{M^{n\times n}} := \sup_{x\in\mathbf{R}^n, \|x\|\leqslant 1} \|A \cdot x\| .$$

Ora si consideri il seguente esempio: la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che $\|A\|_{M^{n\times n}} = \max\{|a|, |b|\}$. Siano ad esempio $a > b > 0$: allora $\|A\|_{M^{n\times n}} = a$. La norma di

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$$

è il massimo tra a^{-1} e b^{-1}, cioè b^{-1}, per cui $\|A^{-1}\|_{M^{n\times n}} \neq \|A\|^{-1}_{M^{n\times n}}$.

4. Sia $f(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$ oppure $f(x, y) = (f_1(y), f_2(x))$. Se f_1 e f_2 sono derivabili ognuna nel proprio dominio e tali derivate sono limitate da una costante minore di 1 si ripete quanto osservato

© Fabio Paroletto

nell'Osservazione 5.6. Ad esempio, si consideri la funzione

$$f : Q \to \mathbf{R}^2, \qquad f(x,y) = \left(\frac{1}{3}(y+y^2), \frac{1}{4}\left(2 - x + x^2 - x^3\right)\right)$$

dove $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.
EX - Mostrare che $f(Q) \subset Q$ e che quindi f è una contrazione.
Di conseguenza esisterà un unico punto $(x,y) \in Q$ che soddisfa entrambe le equazioni

$$x = \frac{1}{3}(y+y^2), \qquad y = \frac{1}{4}\left(2 - x + x^2 - x^3\right).$$

5. Come funziona la calcolatrice?
Si consideri una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^2 e la mappa

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si ha che $F'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$. Per cui se

$$\left|\frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}\right| \leqslant \alpha < 1 \tag{14}$$

F è una contrazione. Vediamo il significato di F: arriva dal cosiddetto metodo di Newton per trovare (numericamente, cioè al calcolatore) gli zeri di una funzione f. L'idea è di considerare un punto arbitrario x_o, di prendere la retta tangente al grafico di f nel punto x_o (come mostrato in figura), trovare lo zero della retta tangente, che chiamiamo x_1, e ripartire da x_1 reiterando il procedimento. Cioè x_1 è la soluzione dell'equazione

$$f(x_o) + f'(x_o)\big(x - x_o\big) = 0$$

e quindi

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = F(x_o).$$

Quindi F prende x_o e ci restituisce il punto di intersezione tra l'asse delle ascisse e la retta tangente al grafico di f nel punto x_o.
Analogamente, valutando la retta tangente al grafico di f nel punto x_1, si ottiene

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = F(x_1)$$

e così via. La successione $x_{n+1} = F(x_n)$ converge, a patto che valga (14). Facciamo un esempio e scegliamo $f(x) = x^2 - a$ con a positivo.

© Fabio Paronetto

Vogliamo valutare la radice quadrata di a e trovarla con un processo iterativo (come fa la calcolatrice). Si ha

$$\frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{2(x^2-a)}{4x^2}.$$

Questa quantità è minore di $1/2$ se $x^2 \geqslant a$. Quindi la mappa

$$F(x) = x - \frac{x^2-a}{2x}, \tag{15}$$

il cui grafico è mostrato in Figura 6, contrae. Si osservi come $F(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, per cui F mappa $[\sqrt{a}, +\infty)$ in se stesso e quindi

$$F \quad \text{è una contrazione nell'insieme} \quad [\sqrt{a}, +\infty).$$

Attenzione: F non è una contrazione su $(0, +\infty)$. Ora la cosa buffa è che F è definita in un dominio che a priori non conosciamo poiché non sappiamo il valore esatto di $\sqrt{a}$, che è quello che vogliamo trovare. Ma il processo iterativo funziona ugualmente: scegliendo $x_o > 0$ in maniera arbitraria, se x_o fosse minore di $\sqrt{a}$ la funzione F mappa x_o in un valore "grande", cioè in x_1 maggiore di $\sqrt{a}$, e a questo punto partendo da x_1 F contrae. In conclusione la successione definita per ricorrenza

$$x_o > 0 \quad \text{arbitrario} \qquad x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

converge ad un numero che sarà lo zero di $x^2 - a$, cioè $\sqrt{a}$. La calcolatrice parte da un x_o (non proprio a casaccio) e iterando F ci restituisce un buona approssimazione del numero $\sqrt{a}$.

© Fabio Paronetto

Figura 5 - Grafico di $x^2 - a$

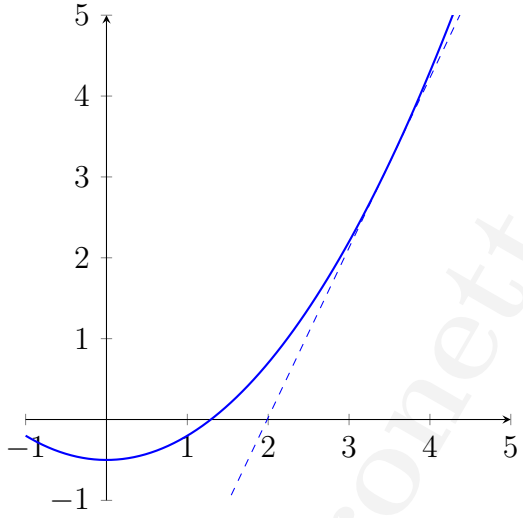
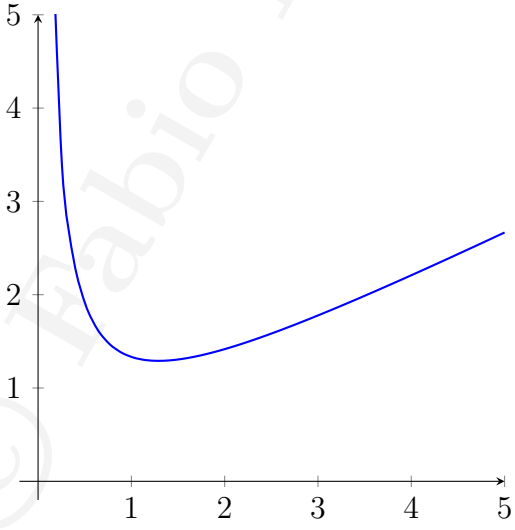


Figura 6 - Grafico della F definita in (15)



© Fabio Paronetto

6. Si considerino $y_o \in \mathbf{R}$, $a, f, y \in C^0\big([0,T]\big)$. La mappa $L : C^0\big([0,T]\big) \to C^0\big([0,T]\big)$ definita da

$$Ly(t) := y_o + \int_0^t \big[a(s)y(s) + f(s)\big]\, ds$$

è una contrazione tra lo spazio metrico $C^0\big([0,T]\big)$ (dotato della distanza d_∞) e se stesso, a patto che T sia sufficientemente piccolo. Infatti

$$\begin{aligned}
\big|Lx(t) - Ly(t)\big| &\leqslant \left| \int_0^t a(s)\big(x(s) - y(s)\big)\, ds \right| \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t \big|a(s)\big|\big|x(s) - y(s)\big|\, ds \leqslant \\
&\leqslant \max_{s\in[0,t]} \big|x(s) - y(s)\big| \int_0^t \big|a(s)\big|\, ds = \\
&\leqslant \left(\int_0^T \big|a(s)\big|\, ds \right) d_{\infty,[0,T]}(x,y)
\end{aligned}$$

da cui

$$d_{\infty,[0,T]}(x,y) \leqslant \alpha\, d_{\infty,[0,T]}(x,y)$$

con $\alpha = \displaystyle\int_0^T \big|a(s)\big|\, ds \leqslant T\, \|a\|_{\infty,[0,T]}$. In conclusione la mappa L è una contrazione a patto che T sia abbastanza piccolo. In tal caso esiste un'unica funzione continua y tale che

$$y(t) = y_o + \int_0^t \big[a(s)y(s) + f(s)\big]\, ds.$$

Poiché a, y, f continue, y risulta di classe C^1 e quindi l'uguaglianza di sopra implica

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t), \qquad y(0) = y_o\,.$$

© Fabio Paronetto