ELIO CABIB

Esercizi e complementi di Analisi 1

ELIO CABIB
cabib@uniud.it
professore di Analisi Matematica
Università di Udine

Esercizi e complementi di Analisi 1

Indice

1 I numeri reali **1**
1.1 Insiemi limitati 1
1.2 Disuguaglianze 1
1.3 Principio d'induzione 3

2 Funzioni **7**
2.1 Funzioni di variabile reale 7
2.2 Funzioni 7

3 I numeri complessi **9**
3.1 Coniugato, inverso, modulo, forma cartesiana, forma polare, radici . . 9
3.2 Equazioni algebriche, scomposizioni in fattori 9
3.3 Funzioni complesse 10

4 Successioni **11**
4.1 Successioni varie 11
4.2 Successioni ricorsive 16

5 Serie numeriche **21**
5.1 Serie di vario tipo 21
5.2 Serie di potenze 24

6 Limiti e funzioni continue **27**
6.1 Limiti di funzioni 27
6.2 Funzioni continue 32

7 Calcolo differenziale **33**
7.1 Derivate 33
7.2 Grado di regolarità 34
7.3 Proposizioni sulle funzioni derivabili 34
7.4 Grafici di funzioni 36
7.5 Funzioni analitiche e derivazione per serie 37

8 Calcolo integrale **39**
8.1 Integrali definiti e indefiniti 39
8.2 Discussione sull'integrabilità 43
8.3 Funzioni integrali 43
8.4 Qualche esercizio teorico 47

Capitolo 1

I numeri reali

1.1 Insiemi limitati

Esercizio 1.1.1. Trovare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi specificando se sono anche il minimo e il massimo

1.1.1.1 $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$ e $A \cup \{0\}$,

1.1.1.2 $A = \left\{\frac{2xy}{x^2+y^2} \mid x, y \in \mathbf{R} - \{0\}\right\}$,

1.1.1.3 Tutti i tipi di intervalli in $\mathbf{R}$,

1.1.1.4 $A = \{|x| \mid x^2 + x < 2\}$,

1.1.1.5 $A = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$,

1.1.1.6 $A = \left\{x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbf{R},\ x > 0\right\}$,

1.1.1.7 $A = \left\{\frac{n-n^2}{n^2+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$,

1.1.1.8 $A = \{\operatorname{arctg} n \mid n \in \mathbf{N}\}$,

1.1.1.9 $A = \{\operatorname{sen} n\pi/8 \mid n \in \mathbf{Z}\}$,

1.1.1.10 $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$,

1.1.1.11 $A = \left\{\frac{|5-n|}{n+3} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$,

1.1.1.12 $A = \left\{\frac{t+1}{t-2} \mid t > 2\right\}$.

1.2 Disuguaglianze

Esercizio 1.2.1. Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ si ha

$$2ab \leqslant a^2 + b^2$$

e che vale l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

Esercizio 1.2.2. Dimostrare che per ogni $a, b \geqslant 0$ si ha

$$\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} \leqslant \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}\,.$$

Esercizio 1.2.3. Dimostrare che per ogni $a, b \geqslant 0$ si ha

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

e che vale l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

Esercizio 1.2.4. Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ vale la disuguaglianza

$$2|xy| \leqslant \varepsilon x^2 + \frac{y^2}{\varepsilon}\,.$$

Esercizio 1.2.5. Dalla disuguaglianza di Bernoulli con $p \in \mathbf{N}$

$$x^p \geqslant 1 + p(x-1) \qquad \forall x \geqslant 0\,,\ \forall p \geqslant 1$$

dedurre la stessa con $p \in \mathbf{Q}$ e infine per densità con $p \in \mathbf{R}$ (sempre con $p \geqslant 1$). Servirsi di questa per dimostrare che per ogni $a, b \geqslant 0$ e per ogni coppia di numeri reali $p, q > 1$ tali che $1/p + 1/q = 1$ si ha

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

che è una generalizzazione del caso già visto $p = q = 2$.

Esercizio 1.2.6. Dimostrare che per ogni $x, y \geqslant 0$ reali si ha

$$3x^2y \leqslant 2x^3 + y^3 \qquad \text{e} \qquad xy \leqslant \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}y^3\,.$$

Esercizio 1.2.7. Trovare in ciascuna delle seguenti disuguaglianze il minimo valore di $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che sia vera per ogni $x, y \geqslant 0$

1.2.7.1 $6xy \leqslant 4x^2 + \alpha y^2\,,$

1.2.7.2 $xy^2 \leqslant 3x^3 + \alpha y^3\,,$

1.2.7.3 $(x+y)^2 \leqslant 3x^2 + \alpha y^2 + xy\,,$

1.2.7.4 $xy \leqslant 2x^2 + (\alpha - 1)y^2\,.$

Esercizio 1.2.8. Dimostrare che se A è l'area di un rettangolo e P il suo perimetro allora $16A \leqslant P^2$ che si chiama *disuguaglianza isoperimetrica.* Estendere la stessa al caso di un parallelogramma, di un trapezio e di un quadrilatero qualunque. Dedurne che tra tutti quadrilateri quello che a parità di perimetro ha area massima è il quadrato.

Esercizio 1.2.9. Dimostrare che per ogni $x, y \geqslant 0$ si ha

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}\,.$$

Esercizio 1.2.10. Dimostrare che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha

$$\left|\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2}\right| \leqslant |x-y|\,.$$

Esercizio 1.2.11. Dimostrare che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha

$$\left|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}\right| \leqslant |x-y|\,.$$

Esercizio 1.2.12. Dimostrare che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ si ha

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x-y|\,.$$

1.3 Principio d'induzione

Esercizio 1.3.1. Dimostrare le seguenti proposizioni in $\mathbf{N}$.

1.3.1.1 Esiste (e trovarlo) un $k \in \mathbf{N}$ tale che

$$a^n + b^n \leqslant c^n \qquad \forall n \geqslant k$$

essendo $c > a \geqslant b > 0$.

1.3.1.2 Vale l'identità

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} \qquad \forall n \geqslant 2\,.$$

1.3.1.3 $n^2 \pm n$ è sempre pari.

1.3.1.4 Vale l'identità

$$\sum_{k=1}^{n} k!k = (n+1)! - 1\,.$$

1.3.1.5 Per ogni $n \geqslant 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant \frac{(n+2)!}{n^2}\,.$$

1.3.1.6 $(n!)!$ è divisibile per $n!^{(n-1)!}$

Provare a risolvere i vari esercizi proposti anche senza ricorrere al principio di induzione.

Esercizio 1.3.2. Per ogni $m \leqslant n$ si ha

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}\,.$$

Esercizio 1.3.3. Verificare che

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n+1}{k+1}$$

per ogni $n, k \in \mathbf{N}$ con $k \leqslant n$.

Esercizio 1.3.4. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Esercizio 1.3.5. Stabilire da quale numero naturale in poi sono vere le seguenti disuguaglianze

1.3.5.1 $n! \geqslant 2^{n-1}\,,$

1.3.5.2 $n! \geqslant 3^{n-1}\,,$

1.3.5.3 $n! > 4^n\,.$

Esercizio 1.3.6. Dimostrare che per ogni $n \geqslant 1$

1.3.6.1 $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$,

1.3.6.2 $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$,

1.3.6.3 $1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$,

1.3.6.4 $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Esercizio 1.3.7. Se $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$, allora

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

e provare a dedurne, senza il principio d'induzione, che

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} .$$

Calcolare $\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$.

Esercizio 1.3.8. Dimostrare che, presi n numeri reali x_i, il quadrato della loro media aritmetica non supera la loro media quadratica, cioè

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

Vedere quando vale l'uguaglianza.

Esercizio 1.3.9. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} .$$

Esercizio 1.3.10. Dimostrare la disuguaglianza di Schwarz

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

dove $x_i, y_i \in \mathbf{R}$.

Esercizio 1.3.11. Dimostrare che

$$\prod_{i=1}^{n} a^i = a^{\frac{n(n+1)}{2}} .$$

Esercizio 1.3.12. Dimostrare che

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} .$$

Esercizio 1.3.13. Dimostrare che

$$n^n > n!2^n \qquad \forall n \geqslant 6\,.$$

Più in generale, rimane valida la stessa disuguaglianza se 2 viene sotituito con un qualsiasi $a > 0$. Dedurne che per ogni $a > 1$ la successione n^n/a^n diverge positivamente.

Dimostrare che per ogni $n \geqslant 1$ si ha

$$\prod_{k=1}^{n}(2k)! \geqslant (n+1)!^n\,.$$

Esercizio 1.3.14. Dimostrare che se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono n numeri reali tali che $0 \leqslant x_i < 1$, allora

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\,.$$

Esercizio 1.3.15. Dimostrare che se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono n numeri reali positivi tali che $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$, allora $x_1x_2\ldots x_n \leqslant 1$. Come conseguenza importante si ottiene la disuguaglianza tra la media geometrica e la media aritmetica

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

per ogni $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$.

Esercizio 1.3.16. Dimostrare per induzione rispetto a n che per ogni $n, m \in \mathbf{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\ldots(k+m) = \frac{n(n+1)\ldots(n+m+1)}{m+2}\,.$$

Esercizio 1.3.17. Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0 \qquad \forall n \geqslant 1\,.$$

Esercizio 1.3.18. Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Esercizio 1.3.19. Dimostrare che

$$\frac{(2n)!}{n!^2} \geqslant 2^n \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Esercizio 1.3.20. Trovare per quali $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$3^n \geqslant n2^n\,.$$

Esercizio 1.3.21. Trovare per quali $n \in \mathbf{N}$ si ha

$$3^n + 4^n \leqslant 5^n\,.$$

Esercizio 1.3.22. Dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

dove $a > -1$.

Esercizio 1.3.23. Dimostrare che

$$\binom{3n}{n} \geqslant 4^{n-1} \qquad \forall n \geqslant 1\,.$$

Esercizio 1.3.24. Dimostrare che

$$\left(\frac{4^n n!^2}{(2n)!}\right)^2 \leqslant 4n \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Esercizio 1.3.25. Dimostrare l'identità di Catalan

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Esercizio 1.3.26. Dimostrare che se $m \in \mathbf{N}$ è dispari allora

$$\sum_{k=1}^{n} k^m \quad \text{è divisibile per} \quad \sum_{k=1}^{n} k \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Esercizio 1.3.27. Dimostrare che, se $x > y > 0$, si ha

$$(x+y)^n - (x-y)^n \leqslant 2^n x^{n-1} y \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,.$$

Esercizio 1.3.28. Dimostrare che la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

è limitata superiormente da $(1+\sqrt{5})/2$ ed è crescente.

Capitolo 2

Funzioni

2.1 Funzioni di variabile reale

Esercizio 2.1.1. Dimostrare che

$$\operatorname{arcsen} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} |x| \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

e tracciarne il grafico.

Esercizio 2.1.2. Esprimere nella forma più semplice possibile le funzioni

2.1.2.1 $\operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$,

2.1.2.2 $\cos \operatorname{arcsen} x$,

2.1.2.3 $\arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

2.1.2.4 $\operatorname{sen} \arccos x$.

Esercizio 2.1.3.

Esercizio 2.1.4.

Esercizio 2.1.5.

Esercizio 2.1.6.

Esercizio 2.1.7.

2.2 Funzioni

Esercizio 2.2.1.

Esercizio 2.2.2.

Esercizio 2.2.3.

Esercizio 2.2.4.

Capitolo 3

I numeri complessi

3.1 Coniugato, inverso, modulo, forma cartesiana, forma polare, radici

Esercizio 3.1.1. Scrivere coniugato, inverso e modulo del numero complesso $z = 7 - i\sqrt{2}$.

Esercizio 3.1.2. Scrivere in forma polare il numero complesso $z_1 = \sqrt{3} + i$ e in forma cartesiana il numero $z_2 = 5(\cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4)$, infine scrivere il loro prodotto nelle due forme.

Esercizio 3.1.3. Scrivere in forma cartesiana e in forma polare i numeri complessi

3.1.3.1 $\dfrac{1}{2-i}$,

3.1.3.2 $\dfrac{1-i}{1+i}$.

Esercizio 3.1.4. Calcolare il prodotto

$$z = (1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)\,.$$

Esercizio 3.1.5. Scrivere nella forma cartesiana il numero

$$z = \frac{1+ik}{2k + i(k^2-1)} \qquad k \in \mathbf{R}\,.$$

Esercizio 3.1.6. Calcolare le radici quarte del numero complesso $w = -8 + 8i\sqrt{3}$, cioè gli elementi z_1, z_2, z_3, z_4 dell'insieme $\sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$.

3.2 Equazioni algebriche, scomposizioni in fattori

Esercizio 3.2.1. Risolvere la seguente equazione in $\mathbf{C}$

3.2.1.1 $z + \dfrac{1}{z} = i$.

Esercizio 3.2.2. Sapendo che $1 + i$ è radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4\,,$$

si trovino anche le altre e si scomponga P in fattori.

Esercizio 3.2.3. Scomporre in fattori i seguenti polinomi complessi

3.2.3.1 $z^3 - 3z + 2\,,$

3.2.3.2 $z^3 + 3z^2 - 4\,,$

3.2.3.3 $z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1\,,$

3.2.3.4 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\,.$

Esercizio 3.2.4. Determinare i numeri $\alpha \in \mathbf{C}$ tali che l'equazione

$$z^2 + |z|^2 = \alpha z|z|$$

abbia soluzioni complesse non nulle.

Esercizio 3.2.5. Determinare i numeri $\lambda \in \mathbf{C}$ tali che le soluzioni $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ dell'equazione

$$z^2 - \lambda z + 1 = 0$$

soddisfano la condizione

$$\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} \in \mathbf{R}\,.$$

3.3 Funzioni complesse

Esercizio 3.3.1. Trovare e disegnare nel piano l'insieme dei numeri $z \in \mathbf{C}$ tali che la funzione

$$f(z) = \frac{z - 1 + i}{z - i}$$

assuma valori reali oppure valori immaginari.

Capitolo 4

Successioni

Supponiamo noto il comportamento delle seguenti successioni divergenti, ordinate in modo crescente secondo i loro ordini di infinito

$$n^\alpha \prec a^n \prec n! \prec n^n\,,$$

dove $a > 1$. Diamo per noti anche gli usuali limiti notevoli per le funzioni elementari (sen, cos, exp, log) ecc. e i limiti di successioni fondamentali quali $\sqrt[n]{n}$, $\sqrt[n]{a}$ con $a > 0$ e $\sqrt[n]{n!}/n$.

4.1 Successioni varie

Esercizio 4.1.1. Usando la definizione di limite, o raccogliendo n^2, verificare che

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2 - n + 1) = +\infty\,.$$

Esercizio 4.1.2. Verificare che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+n+1} = \frac{2}{3}\,.$$

Esercizio 4.1.3. Dati $a, b \neq 0$ e $\alpha, \beta > 0$, dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^\alpha + \text{termini di grado inferiore}}{bn^\beta + \text{termini di grado inferiore}} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } \alpha > \beta \\ a/b & \text{se } \alpha = \beta \\ 0 & \text{se } \alpha < \beta \end{cases}$$

dove il doppio segno davanti a ∞ dipende dalla concordanza di a e b.

Esercizio 4.1.4. Calcolare i seguenti limiti

4.1.4.1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\,,$

4.1.4.2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n} - n)\,,$

4.1.4.3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n - \sqrt{n^2+n-1})\,,$

4.1.4.4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt{2n^2+n-3})\,,$

4.1.4.5 $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2-n+1}\right).$

Esercizio 4.1.5. Calcolare i seguenti limiti

4.1.5.1 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right),$

4.1.5.2 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{\sqrt{2n^2+n+3}},$

4.1.5.3 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-n+1}}{3n+4},$

4.1.5.4 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-n+2}}{\sqrt{4n^2+n+1}-2n}.$

Esercizio 4.1.6. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{c^n+d^n}$$

dove $a>b>0$ e $c>d>0$.

Esercizio 4.1.7. Calcolare i limiti

4.1.7.1 $\lim_{n\to\infty}\left(3^{-n}+(0,01)^n-5\right),$

4.1.7.2 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-3}{3^{n-1}+3}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right),$

4.1.7.3 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}},$

4.1.7.4 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}\qquad a\geqslant b,$

4.1.7.5 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2\cdot 4^n+3\cdot 5^n}{3^n+3\cdot 4^n+7\cdot 5^n}.$

Esercizio 4.1.8. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+P(n)}{b^n+Q(n)}$$

dove P e Q sono polinomi in n.

Esercizio 4.1.9. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n-3^n}.$$

Esercizio 4.1.10. Siano $b > a > 0$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b^n - a^n} = b\,.$$

Analizzare la variante in cui a^n e/o b^n vengono moltiplicati per delle potenze di n, calcolare ad esempio il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha a^n + n^\beta b^n}\,.$$

Esercizio 4.1.11. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} (e^{2n} + n^{17} e^n)^{1/n}\,.$$

Esercizio 4.1.12. Calcolare i limiti delle successioni

4.1.12.1 $\dfrac{\log n}{n}$,

4.1.12.2 $\dfrac{\log^\alpha n}{n}$,

4.1.12.3 $\dfrac{\log^\alpha n}{n^\beta}$,

4.1.12.4 $\dfrac{n^2 - 8n + 15}{n \log n}$.

Esercizio 4.1.13. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \operatorname{sen} n}{n + \cos n}\,.$$

Esercizio 4.1.14. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n}\,.$$

Esercizio 4.1.15. Considerare esempi di successioni del tipo $a_n^{b_n}$ dove $a_n \to 1$ e $b_n \to \infty$. Calcolare ad esempio il limite

$$\lim_{n\to\infty} \big[\cos(e^{-n} P(n))\big]^n$$

dove $P(n)$ è un polinomio in n. Quanto vale il limite se cos viene sostituito da arcos?

Esercizio 4.1.16. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^3}{3n^3} - \frac{2x}{3n}\right)^n \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

Esercizio 4.1.17. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} (2^n - n^{\sqrt{n}}) = +\infty$$

facendo vedere che esiste $k > 1$ tale che $2^n / n^{\sqrt{n}} \geq k$. Generalizzare il risultato alla successione $2^n - n^{n^\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$.

Esercizio 4.1.18. Calcolare i limiti

4.1.18.1 $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}[2\pi n(e^{1/n^2} - 1)]\,,$

4.1.18.2 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(2\pi n^2 \cos(1/n))\,,$

4.1.18.3 $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}(2\pi n e^{1/n^2})\,.$

Esercizio 4.1.19. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^k$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

Esercizio 4.1.20. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} (e^{n\log(n+1)} - n^n)\,.$$

Esercizio 4.1.21. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\log \frac{n^2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\,.$$

Esercizio 4.1.22. Applicando la disuguaglianza di Bernoulli dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$$

e dedurne

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\,.$$

Esercizio 4.1.23. Calcolare i limiti

4.1.23.1 $\lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^n\,,$

4.1.23.2 $\lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}\,.$

Esercizio 4.1.24. Calcolare i limiti delle successioni

4.1.24.1 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,,$

4.1.24.2 $\sqrt{n^2+n} - n\,,$

4.1.24.3 $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{\sqrt{\operatorname{tang} \dfrac{1}{n}}}\,.$

Esercizio 4.1.25. Calcolare il limite della successione

$$(1 - \sqrt[n]{|\operatorname{sen} x|})^n \operatorname{sen} n! \operatorname{sen} nx \,.$$

Esercizio 4.1.26. Calcolare il limite della successione

$$n^n(2^{n^{-n}} - 1)\,.$$

Esercizio 4.1.27. Calcolare l'estremo inferiore, l'estremo superiore e il limite della successione

$$n + \frac{1}{2n} - \sqrt{n^2+1}\,.$$

Esercizio 4.1.28. Calcolare i limiti delle seguenti successioni per $n \to \infty$

4.1.28.1 $\dfrac{\log(n+1)}{\log n}$,

4.1.28.2 $\dfrac{\log n!}{n \log n}$,

4.1.28.3 $\sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$,

4.1.28.4 $\dfrac{\sqrt[2n]{(2n)!^\alpha}}{n^\beta}$,

4.1.28.5 $\sqrt[n]{2^{\sqrt[n]{n!}}}$,

4.1.28.6 $\sqrt[n]{\dbinom{hn}{kn}}$,

4.1.28.7 $\dfrac{n! - 4^n}{3^n - n^n}$,

4.1.28.8 $\dfrac{ne^{n^2} + n^2}{n^2e^n + n^3}$,

4.1.28.9 $n\left[e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]$

4.1.28.10 $\dfrac{n! - (4n)^n}{4n - n^{3n}}$.

Esercizio 4.1.29. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1\,.$$

Esercizio 4.1.30. Calcolare i limiti delle seguenti successioni per $n \to \infty$

4.1.30.1 $\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n(n+1)}$

4.1.30.2 $\left(\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 - \dfrac{n}{3}\right)$

4.1.30.3 $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

4.1.30.4 $\dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

4.2 Successioni ricorsive

Sembra facile calcolare il limite di una successione ricorsiva

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \qquad \forall n \geqslant 1\,, \end{cases}$$

basta osservare che per $n \to \infty$ si perviene al problema di punto fisso

$$a = f(a) \quad \text{(se } f \text{ è continua!)}\,.$$

Peccato però che questo passaggio al limite vada preceduto da uno studio che ne garantisca l'esistenza. La successione

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = -a_n \qquad \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

non ha limite, eppure l'equazione $a = -a$ ha soluzione $a = 0$. In questi problemi tutto il lavoro consiste nel verificare dapprima in qualche modo l'esistenza del limite, ad esempio dimostrando che la successione è monotona, oppure che f, in un dominio opportunamente scelto, è una contrazione, o sviluppando un ragionamento specifico, tagliato su misura per la successione data, e poi passare al problema di punto fisso.

Esercizio 4.2.1. Studiare il comportamento della successione

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}} - 1} - \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n} - 1} = 1 \qquad \forall n \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Risoluzione. Posto $x_n = 1/(\sqrt[n]{a_n} - 1)$, la definizione della a_n si traduce nella

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + x_n \end{cases}$$

ma questa definisce banalmente per induzione la successione $x_n = n$. Ne segue che a_n è la successione di Nepero che converge al numero e. Si noti che il limite non dipende dal valore iniziale a_1.

Esercizio 4.2.2. Studiare il comportamento della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2} \qquad \forall n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Risoluzione. La successione (a_n) è ovviamente positiva e crescente, quindi ammette limite a. Se a fosse finito dovrebbe soddisfare l'equazione $a = \sqrt{1 + a^2}$ che però non ha soluzione, quindi $a = +\infty$.

Esercizio 4.2.3. Studiare la successione dell'Esercizio 1.3.28 e vedere se ha limite.

Risoluzione. Per induzione si vede subito che è crescente. Infatti $a_1 = \sqrt{2} > 1 = a_0$ e se $a_n > a_{n-1}$ allora

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} > \sqrt{1 + a_{n-1}} = a_n\,.$$

Dunque ammette limite a il quale soddisfa

$$a = \sqrt{1 + a}\,,$$

ma l'unica soluzione positiva di questa equazione è $a = (1 + \sqrt{5})/2$.

Esercizio 4.2.4. Studiare il comportamento della successione

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} \qquad \forall n \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta nient'altro che del calcolo del numero

$$(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{(\sqrt{2})^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\,.$$

La successione data è crescente perché $a_2 = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ e

$$a_n > a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} > (\sqrt{2})^{a_{n-1}} = a_n\,.$$

Inoltre ammette 2 come maggiorante perché $a_0 = \sqrt{2} < 2$ e

$$a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} < (\sqrt{2})^2 = 2\,.$$

Allora converge al suo estremo superiore, soluzione dell'equazione ai punti fissi

$$x = (\sqrt{2})^x\,.$$

A occhio, essa ha almeno le due soluzioni $a = 2$ e $b = 4$, ma non ve ne sono altre perché la funzione $f(x) = (\sqrt{2})^x$, $x \in \mathbf{R}$, è strettamente convessa. Quindi solo $a = 2$ può essere il valore del limite.

Sostituendo $\sqrt{2}$ con un generico $\alpha > 1$ la successione rimane crescente, ma per α sufficientemente grande diverge, lo si vede dal fatto che l'equazione ai punti fissi $x = \alpha^x$ non ha soluzione. Il minimo valore α per cui una soluzione esiste è quello per cui la retta $y = x$ è tangente al grafico della funzione convessa $f(x) = \alpha^x$, condizione che si traduce nel sistema

$$\begin{cases} f(x) = x \\ f'(x) = 1 \end{cases}$$

che è soddisfatto da $\alpha = e^{1/e}$ e $x = 1/\log\alpha = e$. Dunque la successione diverge per $\alpha > e^{1/e}$, converge a e per $\alpha = e^{1/e}$ e converge alla più piccola, chiamiamola x_0, delle due soluzioni dell'equazione per $\alpha < e^{1/e}$. Infatti $x_0 > 1$ e per induzione

$$a_1 = \alpha < \alpha^{x_0} = x_0 \qquad \text{e} \qquad a_n < x_0 \Rightarrow a_{n+1} = \alpha^{a_n} < \alpha^{x_0} = x_0\,.$$

Dunque x_0 è maggiorante, ma in quanto soluzione dell'equazione, è anche il limite.

Esercizio 4.2.5. Studiare le proprietà di monotonia e limitatezza della successione

$$\begin{cases} x_0 \in]0, \pi[\\ x_{n+1} = x_n + \operatorname{sen} x_n \qquad \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

e calcolarne il limite se esiste.

Esercizio 4.2.6. Calcolare, se esistono al variare di $a \in \mathbf{R}$, i limiti delle successioni

4.2.6.1 $\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{4}, x_n^2\right\}\,, \end{cases}$

4.2.6.2 $\begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = \log(1 + x_n)\,, \end{cases}$

4.2.6.3 $\begin{cases} x_0 = 0\,,\ x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1}^2\,. \end{cases}$

Esercizio 4.2.7. Studiare il comportamento delle seguenti successioni e delle relative successioni di somme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

4.2.7.1 $\begin{cases} a_1 = \alpha > 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + a_n^2 \,, \end{cases}$

4.2.7.2 $\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2 \,, \end{cases}$

4.2.7.3 $\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n - a_n^3 \,, \end{cases}$

4.2.7.4 $\begin{cases} a_1 = \alpha \in]0,1[\\ a_{n+1} = 1 - a_n^2 \,. \end{cases}$

Esercizio 4.2.8. Studiare le seguenti successioni in cui la legge ricorsiva è del tipo $a_{n+1} = f(n, a_n)$

4.2.8.1 $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 15n^2 - n \,, \end{cases}$

4.2.8.2 $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + 3n^2 - n \,, \end{cases}$

4.2.8.3 $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 2^n \,, \end{cases}$

4.2.8.4 $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{n^2} \,. \end{cases}$

Si dicono *lineari* le successioni in cui ogni termine a_n dipende linearmente da un certo numero di elementi che lo precedono. Passare al limite direttamente non serve a nulla in questi casi, provare per credere, però si possono sempre trasformare in una forma esplicita. Supponiamo ad esempio che a_n dipenda da a_{n-1} e a_{n-2}

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_1 = \beta \\ a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2} \qquad \forall n \geqslant 2 \end{cases}$$

dove $p, q \neq 0$ ($a_n = \alpha p^n$ se $q = 0$). Posto $x_n = (a_n, a_{n-1})$, si ha $x_n = Ax_{n-1}$, o in componenti

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} .$$

Calcoliamo A^{n-1} nel caso più semplice di autovalori reali e distinti. Si noti che l'equazione secolare

$$\begin{vmatrix} p - \lambda & q \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - p\lambda - q = 0$$

può essere ottenuta direttamente dalla legge ricorsiva $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$ sostituendo a_{n-k} con λ^{2-k}. Gli autovalori

$$\lambda_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

sono reali e distinti se e solo se $p^2 + 4q > 0$ e supponiamo sia questo il caso. Con facili calcoli si trova che $\{(\lambda_1, 1), (\lambda_2, 1)\}$ è una base di autovettori, quindi

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} ,$$

da cui si ricava

$$A^k = C\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0\\ 0 & \lambda_2^k\end{pmatrix}C^{-1} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1} & -\lambda_1^{k+1}\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^{k+1}\\ \lambda_1^k-\lambda_2^k & -\lambda_1^k\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^k\end{pmatrix}$$

e per $k = n-1$ dalla $x_n = A^{n-1}x_1$ si ottiene

$$a_n = \frac{(\lambda_2^n-\lambda_1^n)\beta+(\lambda_1^n\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^n)\alpha}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{\lambda_1^n(\lambda_2\alpha-\beta)+\lambda_2^n(\beta-\lambda_1\alpha)}{\lambda_2-\lambda_1} \qquad \forall n\in\mathbf{N}\,.$$

Esercizio 4.2.9. Studiare la successione lineare

$$\begin{cases} a_0 = 1\\ a_1 = 1/2\\ a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2} \qquad \forall n \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Risoluzione. Le soluzioni dell'equazione

$$2\lambda^2-\lambda-1=0$$

sono $\lambda_1 = -1/2$ e $\lambda_2 = 1$, pertanto

$$a_n = \frac{2}{3}\left[1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right] \qquad \forall n\in\mathbf{N}$$

e tende a $2/3$ per $n\to\infty$.

Esercizio 4.2.10. Studiare la successione di Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0\\ F_1 = 1\\ F_n = F_{n-1}+F_{n-2} \qquad \forall n\geqslant 2\,. \end{cases}$$

Risoluzione. L'equazione caratteristica

$$\lambda^2-\lambda-1=0\,,$$

che è la stessa cui si perviene per calcolare la sezione aurea di un segmento, ha per soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,$$

una l'inversa dell'altra. Da quanto detto si ricava l'espressione esplicita

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\,,$$

nota come *formula di Binet*. È interessante osservare che i numeri F_n, tutti naturali, sono stati espressi come somme di numeri irrazionali e siccome $((1-\sqrt{5})/2)^n\to 0$, il calcolo di F_n si semplifica notevolmente venendo a coincidere con la parte intera di $[(1+\sqrt{5})/2]^n/\sqrt{5}$. Ad esempio il decimo numero di Fibonacci è la parte intera del numero

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = 55,00363612324741\ldots\,,$$

cioè $F_{10} = 55$.

Esercizio 4.2.11. Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$a_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}\,, \qquad n > 1\,,$$

dove (F_n) è la successione di Fibonacci.

Risoluzione. Anche la successione dei rapporti è ricorsiva

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{F_2}{F_1} = 1 \\ a_n = \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = \dfrac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad \forall n > 2 \end{cases}$$

e siccome è positiva, $a_n > 1$ per ogni $n > 2$ e di conseguenza

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} < 2 \qquad \forall n > 3\,,$$

ma allora si ha anche

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} > \frac{3}{2} \qquad \forall n > 4\,.$$

Dunque $3/2 < a_n < 2$ per ogni $n > 4$. La funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

applica $[3/2, 2]$ in sé ed è una contrazione

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy} \leqslant \frac{4}{9}|x-y| \qquad \forall x, y \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]\,,$$

quindi (a_n) converge all'unico punto fisso di f, cioè alla soluzione positiva dell'equazione

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

che è $a = (1 + \sqrt{5})/2$. Ancora una volta salta fuori il numero aureo.

Esercizio 4.2.12. Studiare la successione

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{3}a_{n-2} \quad \forall n \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Capitolo 5

Serie numeriche

Gli esercizi sono proposti in un ordine casuale che non ha nessuna relazione con l'ordine in cui sono stati illustrati i criteri di convergenza in sede teorica. Si dà per noto il comportamento di alcune serie fondamentali da usare come serie di riferimento nei criteri di confronto. Quando è possibile calcolarne la somma o qualche stima della somma.

5.1 Serie di vario tipo

Esercizio 5.1.1. Stabilire il carattere delle seguenti serie

5.1.1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+n}}\right)$,

5.1.1.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)$,

5.1.1.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^3+1}$,

5.1.1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\sqrt{n}}{n^3+n}$,

5.1.1.5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$,

5.1.1.6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$,

5.1.1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2}$,

5.1.1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n^3}}$,

5.1.1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$,

5.1.1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

5.1.1.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2 n}{\sqrt[4]{n^5}(1+\frac{1}{n})}$,

Esercizio 5.1.2. Stabilire, al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$, il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{n}\right)^{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right|^{\alpha}.$$

Esercizio 5.1.3. Stabilire il carattere delle seguenti serie

5.1.3.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{ne^{-n}}\,,$

5.1.3.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^{\log n}}\,,$

5.1.3.3 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}\,,$

5.1.3.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2}\,.$

Esercizio 5.1.4. Discutere il carattere delle seguenti serie al variare del parametro

5.1.4.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{2n}}\,,$

5.1.4.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^n n^2}\,,$

5.1.4.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\right)^n\,,$

5.1.4.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{(n^2 + n \operatorname{sen} \frac{1}{n})x}\,,$

5.1.4.5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [\operatorname{sen}(2x+1)]^n\,,$

5.1.4.6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^x - 1}{\sqrt{1+e^x}}\right)^n\,,$

5.1.4.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{2^{nx}}\,,$

5.1.4.8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4 \operatorname{arcsen}(x-1)}{\pi}\right)^n\,,$

5.1.4.9 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}\,,$

5.1.4.10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-2n}\,.$

Esercizio 5.1.5. Stabilire il carattere delle seguenti serie

5.1.5.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tang} \frac{1}{n}\,,$

5.1.5.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{n!}\right) - \operatorname{sen} n\right]\,,$

5.1.5.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n^2}\,,$

5.1.5.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2 n}{n^\alpha}\,,\ \alpha \in \mathbf{R}\,,$

5.1.5.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n!}{n^3}\,,$

5.1.5.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}\,,$

5.1.5.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{n+2}{n}} - e^{\frac{n+1}{n}}\right) \cos \pi n\,,$

5.1.5.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\cos \frac{n^2+1}{n} - \cos n\right)\,,$

5.1.5.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}\,,$

5.1.5.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n - \operatorname{sen} n)\left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)\,.$

Esercizio 5.1.6. Discutere il carattere delle seguenti serie al variare del parametro e, quando è possibile, calcolarne la somma nel caso convergente

5.1.6.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\log\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]^n}{x^2+n}$,

5.1.6.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2+\cos x}\right)^n$,

5.1.6.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \log^n(1+x)$,

5.1.6.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + n^{-3x}\right)$,

5.1.6.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$,

5.1.6.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n+1} \frac{1}{n}$,

5.1.6.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\log n}{n^\alpha + \log^\alpha n}$,

5.1.6.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{x^n+n^x}$,

5.1.6.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|1-\frac{1}{x}\right|^{nx}$,

5.1.6.10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3x^2e^{n(x-2)}$,

5.1.6.11 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n^{n+\alpha}}$,

5.1.6.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{x^2+nx^3}$.

Esercizio 5.1.7. Stabilire il carattere delle seguenti serie

5.1.7.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

5.1.7.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}$,

5.1.7.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)$,

5.1.7.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$,

5.1.7.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\operatorname{sen}\frac{1}{n}$,

5.1.7.6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$,

5.1.7.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\operatorname{arctg} n$,

5.1.7.8 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen}\left[\frac{(-1)^n}{\log n}\right]$.

Esercizio 5.1.8. Stabilire il carattere delle seguenti serie al variare del parametro

5.1.8.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \ldots \operatorname{sen} nx\,,$

5.1.8.2 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}}{n \log^2 n}\,,$

5.1.8.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \log(1+|x|^n)\,,$

5.1.8.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\log x)^{-\log n}\,.$

Esercizio 5.1.9. Dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{assolutamente convergente} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty\,.$$

Esercizio 5.1.10. Sapendo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$

dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Esercizio 5.1.11. Se la serie $\sum a_n$ converge e (b_n) è una successione infinitesima non è detto che la serie $\sum a_n b_n$ sia convergente, trovare un controesempio. Dimostrare che l'affermazione è vera se $\sum a_n$ converge assolutamente oppure se (b_n) è monotona e convergente.

5.2 Serie di potenze

Facciamo rientrare tra le serie di potenze anche quelle del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n f(z)^n$$

il cui dominio di convergenza è l'insieme $\{z \in \mathbf{C} \mid |f(z)| < R\}$ essendo $R > 0$, eventualmente $+\infty$, il raggio di convergenza della serie $\sum c_n w^n$.

Esercizio 5.2.1. Trovare il dominio di convergenza e, quando è possibile, calcolare la somma delle seguenti serie di potenze con $z \in \mathbf{C}$ o con $x \in \mathbf{R}$

5.2.1.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) z^n\,,$

5.2.1.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) z^{2n}\,,$

5.2.1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2n-1}\,,$

5.2.1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n^2}\,,$

5.2.1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}\,,$

5.2.1.6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}\,,$

5.2.1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n^2+n}\,,$

5.2.1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{nz}\,,$

5.2.1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}^n x\,,$

5.2.1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n\,,$

5.2.1.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} z^n\,,$

5.2.1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} z^n\,,$

5.2.1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n^n} z^n\,,$

5.2.1.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n\,,$

5.2.1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n^n}} z^n\,,$

5.2.1.16 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(z^n + \frac{2^{-n}}{z^n}\right)\,,$

5.2.1.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2n}}{(2n)!} z^n\,,$

5.2.1.18 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3^n}\right)\,,$

5.2.1.19 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \cos nx\,,$

5.2.1.20 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \operatorname{sen} nx\,.$

Esercizio 5.2.2. Studiare le seguenti serie di potenze con parametro

5.2.2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n\,, \qquad \alpha \in \mathbf{R}\,,$

5.2.2.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+a^n}\,, \qquad a \geqslant 0\,,$

5.2.2.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} z^n\,, \qquad a \geqslant 0\,,$

5.2.2.4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^k}{(kn)!} z^n\,, \qquad k \in \mathbf{N}\,.$

Esercizio 5.2.3. Scrivere le seguenti funzioni come somme di serie di potenze centrate in 0 e/o in un generico punto $z_0 \in \mathbf{C}$

5.2.3.1 $\displaystyle\frac{z(z+a)}{(a-z)^3}\,,$

5.2.3.2 $\displaystyle\frac{1}{(1+z^2)^2}\,,$

5.2.3.3 $\displaystyle\frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}\,,$

5.2.3.4 $\displaystyle\frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}\,,$

5.2.3.5 $\displaystyle\frac{1}{1+z+z^2}\,,$

5.2.3.6 $\displaystyle\frac{2z-1}{4z^2-2z+1}\,,$

5.2.3.7 $\dfrac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$,

5.2.3.8 $\operatorname{sen}^2 z$,

5.2.3.9 $\operatorname{sen} z^2$,

5.2.3.10 $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$,

5.2.3.11 $e^z \operatorname{sen} z$,

5.2.3.12 $\dfrac{1-\cos 2z}{z}$,

5.2.3.13 $\dfrac{\cosh e^{z^5}}{1+z+z^2}$,

5.2.3.14 $\operatorname{tangh} z$.

Esercizio 5.2.4. Calcolare lo sviluppo di Taylor in 0 fino al quarto ordine delle funzioni

5.2.4.1 $\dfrac{2\cos z}{2+\operatorname{sen} z}$,

5.2.4.2 $\dfrac{3+z^2}{z+e^z}$.

Esercizio 5.2.5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} , \qquad z \in \mathbf{C} ,$$

e dimostrare che non converge nei punti di un insieme denso del bordo del disco di convergenza.

Capitolo 6

Limiti e funzioni continue

6.1 Limiti di funzioni

Esercizio 6.1.1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

6.1.1.1 $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x}$,

6.1.1.2 $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}$,

6.1.1.3 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$,

6.1.1.4 $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\beta x}$, $\quad \beta \neq 0$,

6.1.1.5 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt[3]{x}-1}{x}$,

6.1.1.6 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-1}{x}$,

6.1.1.7 $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}$,

6.1.1.8 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\operatorname{tang} x-\operatorname{sen} x}{x^3+\log(1+x)}$,

6.1.1.9 $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{6x}+e^{x}+2}{e^{4x}+1}$,

6.1.1.10 $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^{x+2}+3^{x+1}}{2^{x}+3^{x+2}}$,

6.1.1.11 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(1-x^2)}{1-x}\,,$

6.1.1.12 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{ax + x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\log(1+x)}\,, \qquad a \in \mathbf{R}\,,$

6.1.1.13 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x}\,,$

6.1.1.14 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}\,,$

6.1.1.15 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{arctg} 3x}{1-\cos 5x}\,,$

6.1.1.16 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+5}{x+6} - \frac{\pi}{4}\right)\,,$

6.1.1.17 $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\log \operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,,$

6.1.1.18 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{2x} \operatorname{sen} e^{-x}\,,$

6.1.1.19 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(1-\frac{\pi}{x}\right)^{2x}\,,$

6.1.1.20 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1-\cos x}}{\log(1+6x^2)}\,,$

6.1.1.21 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}^2 8x}{(1-\cos x)\log(1+\operatorname{tang} x)}\,,$

6.1.1.22 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\log(1+\sqrt{x})\operatorname{tang}^2\sqrt[4]{x}}{(e^{\operatorname{tang} x}-1)(1+\cos x)}\,,$

6.1.1.23 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2^{\operatorname{sen} x}\,,$

6.1.1.24 $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 1^{\operatorname{sen} x}\,,$

6.1.1.25 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} + \cos x)\,,$

6.1.1.26 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 3\,\mathrm{sen}\,2x}{x - 2\,\mathrm{sen}\,3x}\,,$

6.1.1.27 $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}\,,$

6.1.1.28 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+3x)}{x^2 + 2x}\,,$

6.1.1.29 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^2 - 1)}{\log x}\,,$

6.1.1.30 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^3 - \sqrt{x})}{\log^2 x}\,,$

6.1.1.31 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(e^x - x)}{3x}\,,$

6.1.1.32 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}(x + \log x) - \dfrac{\pi}{2}x\right]\,,$

6.1.1.33 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3\,\mathrm{arctg}\,x - \dfrac{\pi}{2}x^3 + x^2\right)\,,$

6.1.1.34 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\mathrm{arcsen}\,x} - e^{\mathrm{arctg}\,x}}{\mathrm{arcsen}\,x - \mathrm{arctg}\,x}\,,$

6.1.1.35 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x-[x]}\,,$

6.1.1.36 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{\mathrm{sen}\,x}{3\log\cos x}}\,,$

6.1.1.37 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,x} - \dfrac{1}{x}\right)\,,$

6.1.1.38 $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}\,,$

6.1.1.39 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$,

6.1.1.40 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\log x}{1-\cos^3 x - \frac{1}{2}x^2}$,

6.1.1.41 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x\,\mathrm{sen}\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{(\mathrm{tang}\, x)^{5/2}}$,

6.1.1.42 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{\log(1+x)-\mathrm{sen}\, x}}$,

6.1.1.43 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$,

6.1.1.44 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{1-\cos x} - \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\mathrm{sen}\, x}$,

6.1.1.45 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x\right)x^2$,

6.1.1.46 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{\mathrm{sen}^2 x}\right)$,

6.1.1.47 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x^x} - e}{x}$,

6.1.1.48 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)$,

6.1.1.49 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\mathrm{sen}\, x}}{x - \mathrm{sen}\, x}$,

6.1.1.50 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\log x}\,\mathrm{sen}\, x$,

6.1.1.51 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tang}\, x}{x}\right)^{1/x^3}$,

6.1.1.52 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tang}\, x}{x}\right)^{1/x^2}$,

6.1.1.53 $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{cotg} x)^{1/\log \operatorname{sen} x}$,

6.1.1.54 $\lim_{x\to -1} \dfrac{\operatorname{sen}(1+x^3)}{1+\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}x}$,

6.1.1.55 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(x^x - x\log x)}{1-\cos(x\log x)}$,

6.1.1.56 $\lim_{x\to +\infty} (e^{2x} + x^{17}e^x)^{1/x}$,

6.1.1.57 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+\log(1+x) - \operatorname{tang} x - \cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$,

6.1.1.58 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} + \cos x - 2\cos x^2}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$,

6.1.1.59 $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+\operatorname{tang} x) - \operatorname{arcsen} x^2}{1-\cos\operatorname{tang} x}$,

6.1.1.60 $\lim_{x\to +\infty} \left[e^x - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\right]$.

Esercizio 6.1.2. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{tang}\left(ax + \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)$$

al variare di $a, b \in \mathbf{R}$.

Esercizio 6.1.3. Calcolare l'ordine di infinitesimo rispetto a x, per $x \to +\infty$, delle funzioni

6.1.3.1 $f(x) = x\left(5^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\right)$,

6.1.3.2 $f(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Esercizio 6.1.4. Calcolare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\log(\cos x) - \cos(\log(1+x))}{\alpha x^2 + \beta x^3} = 1\,.$$

Esercizio 6.1.5. Calcolare l'ordine di infinitesimo rispetto a x per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)\,.$$

Esercizio 6.1.6. Stabilire per quale valore di $\alpha \in \mathbf{R}$ è finito e non nullo il limite

$$\lim_{x\to +\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^\alpha}\,.$$

Esercizio 6.1.7. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 1 - \cos x - \sqrt{1+3x^2}}{2x^2 - \log(e^{x^2} + x^2)}\,.$$

6.2 Funzioni continue

Esercizio 6.2.1. Determinare, quando esiste, il prolungamento continuo in 0 delle seguenti funzioni

6.2.1.1 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$,

6.2.1.2 $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$,

6.2.1.3 $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$,

6.2.1.4 $f(x) = e^{1/x}$,

6.2.1.5 $f(x) = e^{\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x^2}}$,

6.2.1.6 $f(x) = x \log x$,

6.2.1.7 $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{|\log |x||}$,

6.2.1.8 $f(x) = \dfrac{1}{\log(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.

Esercizio 6.2.2. Date due funzioni e $f, g : A \to \mathbf{R}$, dimostrare che se f è uniformemente continua e g è continua e limitata allora fg è uniformemente continua.

Esercizio 6.2.3. Costruire una funzione continua $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \operatorname{sen} x = 0$$

e che non sia infinitesima per $x \to +\infty$. Dimostrare che se f è uniformemente continua allora deve essere infinitesima.

Esercizio 6.2.4. Quali delle seguenti funzioni continue sono anche uniformemente continue? Nel caso negativo indicarne significative restrizioni uniformemente continue. Dove compare discutere rispetto al parametro.

6.2.4.1 $f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$

6.2.4.2 $f(x) = x^\alpha, \quad x > 0$

6.2.4.3 $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbf{R}$

6.2.4.4 $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}$

6.2.4.5 $f(x) = x \log x, \quad x > 0$

6.2.4.6 $f(x) = \dfrac{x}{1 + |\log x|}, \quad x > 0$

6.2.4.7 $f(x) = e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0$

6.2.4.8 $f(x) = x e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0$

6.2.4.9 $f(x) = \dfrac{\log x}{1 + |\log x|}, \quad x > 0$

6.2.4.10 $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbf{R}$

6.2.4.11 $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$

6.2.4.12 $f(x) = x^\alpha \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$

6.2.4.13 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad x \neq 0$

6.2.4.14 $f(x) = \operatorname{sen} x^\alpha, \quad x \in \mathbf{R}$

Capitolo 7

Calcolo differenziale

7.1 Derivate

Esercizio 7.1.1. Dimostrare che se f è derivabile su un intervallo di centro 0 allora

$$f \text{ pari} \Rightarrow f'\text{dispari} \quad \text{e} \quad f \text{ dispari} \Rightarrow f'\text{pari}\,.$$

Esercizio 7.1.2. Se f è derivabile in un dominio $A \subset \mathbf{R}$ e in ogni punto $x_0 \in A$ in cui $f(x_0) = 0$ si ha $f'(x_0) = 0$ allora anche $|f|$ è derivabile in A.

Esercizio 7.1.3. Se $f : A \to \mathbf{R}$ è derivabile e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$ dimostrare che $\log |f|$ è derivabile in A e calcolarne la derivata.

Esercizio 7.1.4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \log|\log |x||$ sul suo dominio naturale.

Esercizio 7.1.5. Calcolare la derivata della funzione $f(x)^{g(x)}$ essendo f, g derivabili in A e $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$.

Esercizio 7.1.6. Nei rispettivi domini naturali calcolare le derivate delle funzioni

7.1.6.1 $\log \operatorname{sen} \sqrt{x}\,,$

7.1.6.2 $\operatorname{arcsen} \operatorname{sen} x\,,$

7.1.6.3 $\operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\,,$

7.1.6.4 $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} - \log \operatorname{tang} \dfrac{x}{2}\,,$

7.1.6.5 $\arccos \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2}}\,,$

7.1.6.6 $\dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\cos x + x \operatorname{sen} x}\,,$

7.1.6.7 $x^x\,,$

7.1.6.8 $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arctg} e^x}\,,$

7.1.6.9 $(x\log x)^{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,,$

7.1.6.10 $\operatorname{arctg}\left|\operatorname{tang} \dfrac{x}{2}\right|.$

7.2 Grado di regolarità

Esercizio 7.2.1. Stabilire se sono derivabili e fino a che ordine le funzioni

7.2.1.1 $f(x) = x|x-1|\,, \quad x \in \mathbf{R}\,,$

7.2.1.2 $f(x) = x|x|\,, \quad x \in \mathbf{R}\,,$

7.2.1.3 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ x & \text{se } 0 \leqslant x < 1\,, \end{cases}$

7.2.1.4 $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ (x-1)^\alpha & \text{se } x \geqslant 1\,, \end{cases}$

7.2.1.5 $f(x) = \sqrt{|x|}|\operatorname{sen} x|\,,\ x \in [-\pi, \pi]\,.$

Esercizio 7.2.2. Trovare la funzione $f \in C^1[-2,2]$ che ha per grafico la configurazione di un filo elastico ben teso, disposto al di sopra dell'*ostacolo* rappresentato dal grafico della funzione $\psi(x) = 1 - x^2$ e fissato agli estremi nei punti $(-2,0)$ e $(2,0)$.

Esercizio 7.2.3. Verificare che appartiene a $C^\infty(\mathbf{R})$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{1}{x^2-1} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1\,. \end{cases}$$

Esercizio 7.2.4. Servirsi dell'Esercizio 7.2.3 per costruire una funzione $F \in C^\infty(\mathbf{R})$ tale che

$$F(x) = 1 \quad \text{se } |x| \leqslant 1 \qquad \text{e} \qquad F(x) = 0 \quad \text{se } |x| \geqslant 2\,.$$

7.3 Proposizioni sulle funzioni derivabili

Esercizio 7.3.1 (Teorema degli zeri)**.** Dimostrare che se $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ (non necessariamente continua) è la derivata di una funzione derivabile $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ e $f(a)f(b) < 0$ allora esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

Esercizio 7.3.2. Dedurre dall'esercizio precedente che ogni funzione convessa e derivabile su un intervallo è necessariamente di classe C^1.

Esercizio 7.3.3. Se $f \in C^0[a,b]$ ammette x_1 e x_2 in $[a,b]$ come massimi relativi allora ammette un punto $x_0 \in]x_1, x_2[$ come minimo relativo.

Esercizio 7.3.4. Se $f \in C^1[a,b]$, $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$ allora esiste un unico $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

Esercizio 7.3.5. Se $f \in C^1[a,b]$ tra due zeri consecutivi di f' vi è al più uno zero di f.

Esercizio 7.3.6. Se $f \in C^1(\mathbf{R})$ ammette un unico punto $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ allora x_0 non è né di massimo, né di minimo per f.

Esercizio 7.3.7. Se $f, g \in C^0[a,b]$ sono derivabili in $]a,b[$ e soddisfano le condizioni $f(a) \geqslant g(a)$ e $f'(x) \geqslant g'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ allora $f(x) \geqslant g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$.

Esercizio 7.3.8. Siano $p > 1$ e $x, y \geqslant 0$. Dimostrare le disuguaglianze

$$x^p + y^p \leqslant (x+y)^p \leqslant 2^{p-1}(x^p + y^p)\,.$$

sugg.: Prima verificrle con $y = 0$, per $y > 0$ porre $t = x/y$ e applicare l'esercizio precedente alla funzione $f(t) = 2^{p-1}(t^p + 1) - (t+1)^p$.

Esercizio 7.3.9. Se $f, g \in C^0[a,b]$ sono derivabili in $]a,b[$ e soddisfano le condizioni $f(x_0) \geqslant g(x_0)$ e $f'(x) \geqslant g'(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ allora $f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in [a, x_0]$ e $f(x) \geqslant g(x)$ per ogni $x \in [x_0, b]$.

Esercizio 7.3.10. Se $f, g :]a,b[\to \mathbf{R}$ sono derivabili ed esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x) \geqslant g'(x)$ per $x \geqslant x_0$ e $f'(x) \leqslant g'(x)$ per $x \leqslant x_0$ allora $f(x) \geqslant g(x)$ per ogni $x \in]a,b[$.

Esercizio 7.3.11. Ricordando che la funzione $\log(x+1)$ è concava su $]-1, +\infty[$, dedurre la disuguaglianza

$$\log(x+1) \leqslant x \qquad \forall x > -1\,.$$

Esercizio 7.3.12. Stabilire per quali $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ si ha

$$e^x \geqslant \lambda x^2 + \mu x + 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

Esercizio 7.3.13. Dimostrare che

$$e^x \geqslant 1 + \log(1+x) \qquad \forall x > -1\,.$$

Esercizio 7.3.14. Dimostrare che

$$\log x > \frac{2(x-1)}{x+1} \qquad \forall x > 1\,.$$

Esercizio 7.3.15. Usando il Teorema di Lagrange dimostrare che

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \log(x+1) \leqslant x \qquad \forall x > -1\,.$$

Esercizio 7.3.16. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}\,, \qquad \forall x \geqslant 1\,,$$

dimostrare che esiste una successione $(x_n) \subset [1, +\infty[$ positivamente divergente tale che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = -f(1) = -\frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 7.3.17. Dato un numero reale $a > 0$, trovare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ vale la disuguaglianza

$$a^x \geqslant x^\alpha \qquad \forall x \geqslant 0\,.$$

7.4 Grafici di funzioni

Esercizio 7.4.1. Determinare gli intervalli di monotonia della funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$, $x \in \mathbf{R}$.

Esercizio 7.4.2. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2cx + d}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

determinare $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tali che $f(-1) = 2$, $f(1) = 4$, f abbia massimo per $x = -1$ e minimo per $x = 1$.

Esercizio 7.4.3. Studiare il comportamento della seguente funzione sul suo dominio naturale e tracciarne il grafico

$$f(x) = (x-1)\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{e} - \log x\right).$$

Esercizio 7.4.4. Studiare il comportamento delle seguenti funzioni sul loro dominio naturale e tracciarne il grafico

7.4.4.1 $f(x) = \sqrt{x^2 - \dfrac{8}{x}}$,

7.4.4.2 $f(x) = \dfrac{1 + \log x}{(1 - \log x)^2}$,

7.4.4.3 $f(x) = (x^2 - 1)(2^{\frac{x^2-1}{x^2}} - 1)$,

7.4.4.4 $f(x) = \log \dfrac{x}{[x]}$,

7.4.4.5 $f(x) = |1 + x| e^{1/x}$,

7.4.4.6 $f(x) = \sqrt{|x|^3(1 - x^2)}$,

7.4.4.7 $f(x) = \dfrac{x}{|x-2|} + \dfrac{x-2}{|x|}$,

7.4.4.8 $f(x) = \log(x^\alpha - \sqrt{x})$,

7.4.4.9 $f(x) = \sqrt{|x|}(2e^{1-x} - \sqrt{|x|})$,

7.4.4.10 $f(x) = xe^{1/\log x}$,

7.4.4.11 $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{|x^2 - 1|}}$,

7.4.4.12 $f(x) = \log(e^{x+1} + e^{-x})$,

7.4.4.13 $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$,

7.4.4.14 $f(x) = \dfrac{|e^x - 1|}{1 + |x|}$,

7.4.4.15 $f(x) = e^{-x}\sqrt[3]{x^2}$,

7.4.4.16 $f(x) = x|x|e^{-x}$,

7.4.4.17 $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(e^{-x^2 + \frac{1}{x}} - 1\right)$,

7.4.4.18 $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} e^{-x}$,

7.4.4.19 $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{|x^2 - 2| - 2}$

7.4.4.20 $f(x) = \operatorname{arcsen} \log(x^2 + 1)\,,$

7.4.4.21 $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x^2 + 1}\,,$

7.4.4.22 $f(x) = \arccos \dfrac{1}{1 - x}\,,$

7.4.4.23 $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|} - 1}{x^2 + 1}\,,$

7.4.4.24 $f(x) = \dfrac{e^2}{x}|1 - \log x|\,,$

7.4.4.25 $f(x) = x + \operatorname{arctg} \log x\,,$

7.4.4.26 $f(x) = x \operatorname{arcsen} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\,,$

7.4.4.27 $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}\,,$

7.4.4.28 $f(x) = \log(|\operatorname{sen} x| + \cos x)\,,$

7.4.4.29 $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|^3}{|x + 1| + 1}}\,,$

7.4.4.30 $f(x) = \dfrac{e^{x+1} + x}{e^x - x}\,,$

7.4.4.31 $f(x) = \operatorname{arcsen} e^{-|x^2 - 1|}\,,$

7.4.4.32 $f(x) = \log(e^x - x)\,,$

7.4.4.33 $f(x) = \log(e^x + x)\,,$

7.4.4.34 $f(x) = \log(e^x - ex)\,,$

7.4.4.35 $f(x) = x + 2e^{1-x}\sqrt{|x|}\,.$

7.5 Funzioni analitiche e derivazione per serie

Vogliamo calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}\,.$$

Partiamo dal prodotto infinito

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)\,, \qquad z \in \mathbf{C}\,.$$

Posto $z = ix$, $x \in \mathbf{R}$, e ricordando che $\operatorname{sen} ix = i \operatorname{senh} x$, si ha

$$\frac{\operatorname{sen} ix}{ix} = \frac{\operatorname{senh} x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)\,.$$

Passiamo al logaritmo

$$\log \frac{\operatorname{senh} x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)\,,$$

deriviamo

$$\operatorname{cotgh} x - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 + x^2}$$

e moltiplichiamo per $\pi^2/2$

$$\frac{\pi^2}{2}\left(\operatorname{cotgh} x - \frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^2/\pi^2} .$$

Basta ora sostituire $x = \pi$ e si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \operatorname{cotgh} \pi - \frac{1}{2}$$

o anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{cotgh} \pi .$$

Abbiamo comunque ottenuto una formula ben più generale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi \operatorname{cotgh} \pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \qquad \forall x \in \mathbf{R} .$$

Si dimostri adesso che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a conferma di quanto già sappiamo.

Capitolo 8

Calcolo integrale

8.1 Integrali definiti e indefiniti

Esercizio 8.1.1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti di funzioni razionali

8.1.1.1 $\displaystyle\int \frac{(x-3)\,dx}{x(x-1)(x-2)}\,,$

8.1.1.2 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\,dx\,,$

8.1.1.3 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}\,,$

8.1.1.4 $\displaystyle\int \frac{(3x-2)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,,$

8.1.1.5 $\displaystyle\int \frac{x(x+3)}{x^4+1}\,dx\,.$

Esercizio 8.1.2. Calcolare i seguenti integrali per sostituzione usando le formule parametriche

8.1.2.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}x+4\cos x}\,,$

8.1.2.2 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{4\operatorname{sen}x-3\cos x}\,dx\,,$

8.1.2.3 $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}2x+\cos^2 x}\,,$

8.1.2.4 $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x}\,dx\,.$

Esercizio 8.1.3. Calcolare i seguenti integrali di funzioni irrazionali mediante opportune sostituzioni

8.1.3.1 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+x}}\,,$

8.1.3.2 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,,$

8.1.3.3 $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,,$

8.1.3.4 $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{4-x}{x}}\,dx\,,$

8.1.3.5 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{3+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx\,,$

8.1.3.6 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,,$

8.1.3.7 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{5\sqrt{x}+3\sqrt{1+x}}\,dx\,.$

Esercizio 8.1.4. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \log(1+\frac{1}{x})\,dx$$

e calcolarlo per $\alpha = -1/2$.

Esercizio 8.1.5. Calcolare gli integrali indefiniti

8.1.5.1 $\displaystyle\int \frac{2x^5+8x^3+4x^2+1}{x^4+4x^2}\,dx\,,$

8.1.5.2 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x}{1-3\cos^2 x}\,dx\,,$

8.1.5.3 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}\,,$

8.1.5.4 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tang} x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,,$

8.1.5.5 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}(1+x)+2}{x+2}\,dx\,,$

8.1.5.6 $\displaystyle\int \sqrt[4]{\frac{1+x}{2+x}}\,dx\,,$

8.1.5.7 $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-2x-3}}\,dx\,,$

8.1.5.8 $\displaystyle\int \frac{(x^3+x)\,dx}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}\,dx\,,$

8.1.5.9 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+2x^4)^2}}{x}\,dx\,,$

8.1.5.10 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\,,$

8.1.5.11 $\displaystyle\int x\sqrt[3]{(2-\sqrt{x})}\,dx\,,$

8.1.5.12 $\displaystyle\int x\sqrt{(2-\sqrt{x})^3}\,dx\,,$

8.1.5.13 $\displaystyle\int \cos^{4/3}x\sqrt[3]{\operatorname{sen}x\cos x}\,dx\,,$

8.1.5.14 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx\,,$

8.1.5.15 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx\,,$

8.1.5.16 $\displaystyle\int \frac{2^x}{3^x-1}\,dx\,,$

8.1.5.17 $\displaystyle\int \log(\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2})\,dx\,,$

8.1.5.18 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^3}}\,,$

8.1.5.19 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,,$

8.1.5.20 $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx\,.$

Esercizio 8.1.6. Calcolare gli integrali

8.1.6.1 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\operatorname{tg}x}\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}\,dx\,,$

8.1.6.2 $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 2x\,dx}{(1+\operatorname{sen}x)\cos x}\,,$

8.1.6.3 $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\cos 2x\,dx}{(2+\operatorname{sen}x)\cos x}\,,$

8.1.6.4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}\,dx\,,$

8.1.6.5 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,,$

8.1.6.6 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\sqrt{x^{2/3}-x^{3/4}}}\,,$

8.1.6.7 $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\log^2 x-\log x}{x(1+\log^2 x)}\,dx\,,$

8.1.6.8 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x(1+\log x)}\,dx\,,$

8.1.6.9 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x\operatorname{arctg}e^{-2x}\,dx\,,$

8.1.6.10 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{2x}}\,,$

8.1.6.11 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(e^{2x}+e^x)\,dx}{e^{3x}+2e^{2x}+e^x+2}\,,$

8.1.6.12 $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{a^2\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}\,dx\,,$

8.1.6.13 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\log x+\log^2 x)}\,,$

8.1.6.14 $\displaystyle\int_{1/7}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}\,dx\,,$

8.1.6.15 $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\log(1+x^2)-2\log x)\,dx\,,$

8.1.6.16 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x+\sqrt{1+x^2}}\,,$

8.1.6.17 $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x^2+2}\,dx\,,$

8.1.6.18 $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx\,,$

8.1.6.19 $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}\,dx\,,$

8.1.6.20 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx\,,$

8.1.6.21 $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}}{\operatorname{tang} x}\,dx\,,$

8.1.6.22 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2}{1-x^2}\,dx\,,$

8.1.6.23 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx\,,$

8.1.6.24 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx\,,$

8.1.6.25 $\displaystyle\int_0^{1} \log\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)\,dx\,,$

8.1.6.26 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}}$

8.1.6.27 $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx\,,$

8.1.6.28 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx\,,$

8.1.6.29
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{2|\operatorname{sen} x| + 3\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx\,,$$

8.1.6.30 $\displaystyle\int_0^{1} x\operatorname{arctg}^2 x\,dx\,,$

8.1.6.31 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx\,,$

8.1.6.32 $\displaystyle\int_0^{2} x\log|x-1|\,dx\,.$

Esercizio 8.1.7. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(e^{x+1}-e^{x-1})^\alpha}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.

Esercizio 8.1.8. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)\,dx$$

è finito e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 8.1.9. Trovare $a, b \in \mathbf{R}$ in modo che sia convergente l'integrale

$$\int_1^{+\infty} (\sqrt{x} - a\sqrt{x+1} - b\sqrt{x-1})\,dx\,.$$

Esercizio 8.1.10. Calcolare gli integrali

8.1.10.1 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1-x^{2\alpha}}}\,dx$ **8.1.10.2** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^2}\,dx\,.$

Esercizio 8.1.11. Dimostrare che la successione

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tang}^n x\,dx \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

è decrescente e che

$$a_n + a_{n-2} = \frac{1}{n-1} \qquad \forall n \geqslant 3\,.$$

Calcolarne il limite.

Esercizio 8.1.12. Calcolare i limiti

8.1.12.1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n \int_0^{\pi/2} x e^{-nx^2}\,dx\,,$

8.1.12.2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n \int_0^{\pi/2} e^{-nx^2} \operatorname{sen} x\,dx\,.$

Esercizio 8.1.13. Studiare la successione

$$x_0 = a\,, \qquad x_{n+1} = 4\int_0^{x_n} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\,dt$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

8.2 Discussione sull'integrabilità

Esercizio 8.2.1. Stabilire se sono integrabili le funzioni sull'intervallo indicato

8.2.1.1 $\displaystyle\frac{1+\cos x}{\sqrt[4]{(1-x^3)^3}} \qquad x \in [0,1]\,,$

8.2.1.2 $\displaystyle\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x^5-3x^3}} \qquad x \in [2,+\infty[\,.$

8.3 Funzioni integrali

Le primitive di molte funzioni continue non ammettono una rappresentazione esplicita in forma chiusa, non sono cioè scrivibili in termini di funzioni elementari. Tuttavia è talvolta ugualmente possibile studiarne l'andamento o calcolare il valore dell'integrale definito su particolari intervalli.

Esercizio 8.3.1. Scrivere l'integrale indefinito delle funzioni

8.3.1.1 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0\,, \end{cases}$

8.3.1.2 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \leqslant -1 \\ -\dfrac{(x-1)^2}{4} & \text{se } x > -1\,. \end{cases}$

Esercizio 8.3.2. Tracciare il grafico delle funzioni

8.3.2.1 $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt\,,$

8.3.2.2 $f(x) = x\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt\,, \qquad x > 0\,,$

8.3.2.3 $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t\log t}\, dt\,, \qquad x < 0\,,$

8.3.2.4 $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2}\, dt\,,$

8.3.2.5 $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t\, dt\,, \qquad x \neq 0\,,$

8.3.2.6 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, dx\,, \qquad 0 \leqslant x < 1\,.$

Risolviamo la **8.3.2.2** a titolo di esempio. Poiché $e^{-t} > 0$ e $t \geqslant x \Rightarrow 1/t \leqslant 1/x$, si ha

$$0 < f(x) < \int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt = e^{-x}\,,$$

quindi f è limitata su $]0, +\infty[$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Nelle vicinanze di 0 si ha $e^{-t} \sim 1$, quindi $f(x) \sim -x\log x$ e si capisce che f dovrebbe essere infinitesima per $x \to 0$, comunque lo si può verificare anche applicando la regola di L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt}{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x}/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} x e^{-x} = 0\,.$$

Allora f ammette prolungamento continuo in 0 col valore $f(0) = 0$, però non è derivabile in 0 perché $f(x)/x \to +\infty$. La funzione f, continua su $[0, +\infty[$, parte dal valore 0, è positiva ed ha asintoto $y = 0$, quindi per una nota variante del Teorema di Weierstraß ammette massimo in $]0, +\infty[$. Per trovarlo dobbiamo risolvere l'equazione

$$f'(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - e^{-x} = 0$$

dove le due funzioni

$$\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \qquad \text{e} \qquad \psi(x) = e^{-x}$$

sono positive e strettamente decrescenti, inoltre soddisfano

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0 \quad \text{e} \quad \psi(0) = 1\,.$$

Quindi per x abbastanza piccolo $\varphi(x) > \psi(x)$, ma per $x \geqslant 1$ si ha

$$\varphi(x) < \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x} \leqslant e^{-x} = \psi(x)\,.$$

Allora esiste $x_0 \in]0,1[$ tale che $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Essendo $\varphi'(x_0) < \psi'(x_0)$, tale punto è unico. Cerchiamo di dare una valutazione del valore massimo $f(x_0)$. La condizione di stazionarietà ci dice che

$$f(x_0) = x_0 e^{-x_0}\,,$$

ma siccome il massimo della funzione xe^{-x} viene raggiunto nel punto $x = 1$ e vale $1/e$, deve essere $f(x_0) < 1/e$.

Esercizio 8.3.3. Dimostrare che

$$\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+e^{2t}}\,dt = x \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

Provare a calcolare l'integrale senza usare le primitive, ma osservando che

$$\frac{1}{1+e^{2t}} + \frac{1}{1+e^{-2t}} = 1 \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

e che questi due addendi a primo membro hanno lo stesso integrale.

Esercizio 8.3.4. Dimostrare che la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\,dt \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

è pari, non negativa e uniformemente continua. Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

e dimostrare che

$$f(x) \leqslant \frac{x^2}{2} \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

Esercizio 8.3.5. Calcolare i seguenti limiti

8.3.5.1 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x}\left(\int_1^x e^{1/t}\,dt - x\right),$$

8.3.5.2 $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,.$$

Esercizio 8.3.6. Data la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\,dt \qquad \forall x > 0\,,$$

calcolare i limiti di f per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$ e dimostrare che il primo è anche l'estremo superiore di f.

Esercizio 8.3.7. Trovare il minimo della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \int_0^x (t^3 - 2t)e^{-t}\,dt \qquad \forall x \in \mathbf{R}\,.$$

Esercizio 8.3.8. Calcolare il numero di soluzioni dell'equazione

$$2x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = 1\,, \qquad x \in \mathbf{R}\,.$$

Esercizio 8.3.9. Siano $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $F : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad F(x) = \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Dimostrare che F ammette prolungamento continuo su tutto $\mathbf{R}$. Dire se tale estensione è derivabile in $\mathbf{R}$.

Esercizio 8.3.10. Dimostrare che la successione

$$x_1 = 1\,, \qquad x_{n+1} = \int_0^{x_n} e^{-t^2}\,dt$$

è monotona e calcolarne il limite.

Esercizio 8.3.11. Tracciare il grafico della funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \log x + \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt$$

e stabilire se f ammette prolungamento continuo e/o derivabile su $[0, +\infty[$.

Esercizio 8.3.12. Dimostrare che

$$\int_0^a \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant 1 + \log a \qquad \forall a \geqslant 1\,.$$

Esercizio 8.3.13. Al variare di $x \in \mathbf{R}$, discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}\int_{x-1}^{x+1} e^{-nt^2}\,dt\,.$$

Esercizio 8.3.14. Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\pi} \log \operatorname{sen} x\,dx\,.$$

Risolviamo quest'ultimo esercizio. Si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \log(2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})\,dx = \pi\log 2 + \int_0^{\pi} \log\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx + \int_0^{\pi}\log\cos\frac{x}{2}\,dx \\ &= \pi\log 2 + 2\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{sen} t\,dt + 2\int_0^{\pi/2}\log\cos t\,dt = \pi\log 2 + 4\int_0^{\pi/2}\log\operatorname{sen} t\,dt \\ &= \pi\log 2 + 2I \end{aligned}$$

da cui segue $I = -\pi\log 2$. Si noti che $D\log\operatorname{sen} x = \operatorname{cotg} x$, pertanto

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tang} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\log 2\,.$$

Esercizio 8.3.15. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx\,.$$

Esercizio 8.3.16. Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\,.$$

8.4 Qualche esercizio teorico

Esercizio 8.4.1. La sezione (costante) S di una trave è del tipo

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y \leqslant u(x)\}\,.$$

Fra tutte le funzioni $u : [0, 1] \to \mathbf{R}$ integrabili tali che l'area di S abbia un certo valore $h > 0$ assegnato, trovare quella che rende minimo il momento di inerzia della sezione

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^1 u(x)^3\, dx\,.$$

Risoluzione. Per la disuguaglianza di Jensen

$$I_x \geqslant \frac{1}{3}\left(\int_0^1 u(x)\, dx\right)^3 = \frac{h^3}{3}\,.$$

Il minimo viene raggiunto con la funzione costante $u(x) = h$, corrispondente alla sezione rettangolare di altezza h.

Esercizio 8.4.2. Dimostrare che per ogni funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continua e limitata si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{\varepsilon^2 + x^2} dx = 2 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{\varepsilon^2 + x^2} dx = \pi f(0)\,.$$

Esercizio 8.4.3. Sia $f \in C^1[a, b]$. Per ogni coppia di punti $x, x_0 \in [a, b]$ si ha

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f'(t)\, dt\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\, dt\,.$$

Dedurre da questa relazione le seguenti

8.4.3.1 $f(a) = 0 \Rightarrow \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\, dt\,,$

8.4.3.2 $|f(x_0)| \leqslant |f(x)| + \int_a^b |f'(t)|\, dt \qquad \forall x, x_0 \in [a, b]\,,$

8.4.3.3 $|f(x_0)| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |f'(x)|\, dx \qquad \forall x_0 \in [a, b]\,,$

8.4.3.4 $\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |f'(x)|\, dx\,,$

8.4.3.5 $\int_a^b |f(x) - \mu(f)|\, dx \leqslant (b-a)\int_a^b |f'(x)|\, dx\,.$

Esercizio 8.4.4. Sia $f \in C^0[a, b]$. Se

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^0[a, b]\ :\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Risoluzione Se in un punto $x_0 \in [a,b]$ fosse $f(x_0) > 0$, per la permanenza del segno esisterebbe $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in I_\delta(x_0)$. Consideriamo una funzione φ continua su $[a,b]$ che sia positiva su $I_\delta(x_0)$ e nulla sul complementare. Con questa scelta di φ si ottiene l'assurdo

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{I_\delta(x_0)} f(x)\varphi(x)\,dx > 0\,.$$

Esercizio 8.4.5. Sia $f \in C^0[a,b]$. Dimostrare che se

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^1[a,b]\ :\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

allora f è una funzione costante su $[a,b]$.

Esercizio 8.4.6. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)\,dt = a\,.$$

Esercizio 8.4.7. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua e non negativa. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)^n\,dx = +\infty \Leftrightarrow \exists x_0 \in [0,1]\ :\quad f(x_0) > 1\,.$$

Esercizio 8.4.8. Sia $f : I \to \mathbf{R}$ una funzione continua, non negativa e limitata. Dimostrare che

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_I f(x)^n\,dx} = \sup_{x\in I} f(x)\,.$$

Esercizio 8.4.9. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione convessa tale che $g(x) = f(x) - x^2$ sia concava su $[0,1]$ e $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$. Dimostrare che

$$\frac{4}{3} \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{3}{2}\,.$$

Esercizio 8.4.10. Sia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ una funzione convessa e derivabile in 0 tale che $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ e $f(1) = 5$. Dimostrare che

$$2 < \int_0^1 f(x)\,dx < 3\,.$$