PRELIMINARI TEORIA

Lunedì 1/10

Elementi di logica

Proposizione: frase di cui si può stabilire il valore di verità (VERO o FALSO)

- Questa stanza è priva di finestre (Falso)
- Questa stanza è dotata di illuminazione (Vero)
- Questa stanza è bella (non è una proposizione)

Connettivi logici

- Questa stanza è priva di finestre **e** questo tavolo è di legno
  ↳ congiunzione

- Questa stanza è priva di finestre **o** questo tavolo è di legno
  ↳ disgiunzione

• congiunzione (e, $\wedge$) : date due proposizioni P e Q, restituisce $P \wedge Q$ che è vero quando entrambe le proposizioni P e Q sono vere

- Questa stanza è priva di finestre (P) **e** questo tavolo è di legno (Q)
  ↳ congiunzione

Falso!

- disgiunzione (o, $\vee$): date due proposizioni P e Q, restituisce $P \vee Q$ che è vera quando almeno una delle proposizioni P e Q è vera

- Questa stanza è priva di finestre o questo tavolo è di legno

P

Q

o → disgiunzione

Vera!

- implicazione (se ..., allora ..., $\Rightarrow$): date due proposizioni P e Q, restituisce $P \Rightarrow Q$ (P implica Q) che è vera quando da P discende Q.
Si dice allora che P è condizione sufficiente per Q, ovvero che Q è condizione necessaria per P

Tabelle di verità

- congiunzione

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- disgiunzione

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- implicazione

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

→ Parto dall'ipotesi P e deduco che vale anche Q

Modus ponens

Date due proposizioni P e Q, la proposizione

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$$

è una tautologia, proposizione sempre vera indipendentemente dai valori di verità di P e Q

Allora per dimostrare che una certa

proposizione Q è vera è sufficiente dimostrare che la proposizione

$$P \wedge (P \Rightarrow Q)$$

è vera

Es.: devo provare che $2<3$ Q

P: $1<2$ e dimostro che $1<2 \Rightarrow 2<3$

$$(1<2) \wedge (1<2 \Rightarrow 2<3) \Rightarrow 2<3$$

$$1<2 \Rightarrow 1+1<2+1 \Rightarrow 2<3$$

Martedì 2/10

- doppia implicazione (... se e solo se ..., $\Longleftrightarrow$):

date due proposizioni P e Q restituisce $P \Longleftrightarrow Q$ (P se e solo se Q) che è vera quando P e Q sono entrambe vere o entrambe false. In tal caso si dice che P è condizione necessaria e sufficiente per Q

$P \Leftrightarrow Q$ è equivalente a

$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$,

cioè $P \Leftrightarrow Q$ è vera quando sono vere entrambe le implicazioni $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$

- negazione (non ..., $\neg$) : data una proposizione P, restituisce $\neg P$ (non P) che è vera quando P è falsa

$\neg(2 > 3)$ è vera

$\neg(2 \leq 3)$ è falsa

minore o uguale

- Uso contemporaneo di $\neg$ con gli altri connettivi

P e Q proposizioni

$\neg(P \wedge Q)$ "=" $(\neg P) \vee (\neg Q)$

$\neg$(Questa stanza è priva di finestre e questo tavolo è di legno) "="

congiunzione

"=" $\neg$(Questa stanza è priva di finestre) $\vee$ $\neg$(questo tavolo è di legno

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

(Leggi di De Morgan)

- $\neg(P \Rightarrow Q)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	$\neg P$	Q	$\neg P \vee Q$
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

$$\neg(P \Rightarrow Q) \text{ "="} \neg(\neg P \vee Q) \text{ "="}$$

$$\text{"="} (\neg(\neg P) \wedge (\neg Q) \text{ "="} P \wedge \neg Q$$

Se voglio negare che $P \Rightarrow Q$ devo dimostrare che P è vera e Q è falsa

- Dimostrazione per assurdo

Lemma: Siano P e Q proposizioni. Allora $P \Rightarrow Q$ è vera se e solo se $\neg Q \Rightarrow \neg P$ è vera

Es.: $1 < 2 \Rightarrow 2 < 3$, posso dimostrare che $\neg(2<3) \Rightarrow \neg(1<2)$, cioè

$$2 \geq 3 \implies 1 \geq 2$$

Se dimostro questo ho dimostrato che $1 < 2 \implies 2 < 3$

Ragiono per assurdo e assumo che $2 \geq 3$. Allora

$$2 \geq 3 \implies 2-1 \geq 3-1 \implies 1 \geq 2$$

$\neg(P \implies Q)$ ok!

<u>Lemma</u>: siano P, Q e R proposizioni con R falsa. Allora $P \implies Q$ è vera se e solo se $(P \wedge \neg Q) \implies R$ è vera

<u>Es.</u>: $1 < 2 \implies 2 < 3$

Ragiono per assurdo e assumo che valga $(1<2) \wedge (\neg(2<3))$

Cioè $\overset{P}{(1<2)} \wedge \underset{\neg Q}{(2 \geq 3)} \implies \overset{R}{4<4}$

$$\begin{array}{l} 1 < 2 \\ 3 \leq 2 \\ \hline 4 < 4 \end{array}$$

: R falsa

Quantificatori

$x > 1$, $x \leq y^2$] Predicati

x è grigio e y è blu

x e y variabili

Questi predicati diventano proposizioni se

1) ad ogni variabile è assegnato un valore

o

2) si legano le variabili con dei quantificatori

I quantificatori sono tre

- per ogni (quantificatore universale), $\forall$
- esiste ... tale che ... (quantificatore esistenziale), $\exists \ldots : \ldots$ → | tale che
- esiste unico ... tale che ... , $\exists!$

$\forall$ x naturale $x > 1$ falso

$\exists$ x naturale | $x > 1$
$\exists$ x naturale : $x > 1$ } vero

$\exists!$ x naturale | $x > 1$ falso

- Uso contemporaneo di $\neg$ e dei quantificatori

$\neg$(ogni elefante è grigio)

esiste un elefante che non è grigio

$\neg$(esiste un tavolo di ferro)

ogni tavolo non è di ferro

$\neg(\forall x \ (x > 1))$ | $\neg(\exists x \mid (x > 1))$

$\exists x \mid x \leq 1$ | $\forall x \ (x \leq 1)$

$\neg(x > 1)$ | $\neg(x > 1)$

Per negare una proposizione contenente dei quantificatori $\forall$ o $\exists$

1) ad ogni occorrenza di $\forall$ si sostituisce $\exists$

2) ad ogni occorrenza di $\exists$ si sostituisce $\forall$

3) si nega il predicato conclusivo

Es: $\neg(\forall x \ \exists y \mid y^2 \leq x)$

$\exists x \mid \forall y \ y^2 > x \qquad \neg(y^2 \leq x)$

Attenzione con $\exists!$

$\neg \left(\exists! x \mid \text{vale } P(x) \right)$

o $\forall x$ vale $\neg P(x)$

$\exists$ almeno due valori distinti di x per cui $P(x)$ è vero

Es.: $\neg \left(\exists! x \text{ naturale} \mid x > 1 \right)$

$x = 2$ e $x = 3$ soddisfano entrambi $x > 1$

$\neg \left(\exists! x \text{ naturale} \mid x < 0 \right)$

$\forall x$ naturale $x \geq 0$

Elementi di teoria degli insiemi

Gli insiemi vengono solitamente indicati con lettere latine maiuscole

$A, B, X, U, V \ldots$

Un insieme A è dato se, preso

un oggetto a l'espressione

$a \in A$ → appartiene a

è una proposizione, cioè, se dato a, posso stabilire se a appartiene o no ad A

- Per definire un insieme si possono elencare i suoi elementi

$$A = \{a, b, c, 1, 2, 3\}, \quad B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

oppure posso definirlo tramite una proprietà che caratterizza i suoi elementi

$$A = \{x \in U \mid \text{vale } P(x)\}$$

→ proprietà

insieme universo, ed è un insieme noto

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

- $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari e } 0 < n < 13\}$

→ $P(n)$

($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$ numeri interi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$ numeri razionali

$\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali)

- Per indicare che un oggetto a non appartiene ad A, si scrive $a \notin A$

- Si postula esistenza di un insieme, detto insieme vuoto, privo di elementi, indicato $\emptyset$, ed è tale per cui la proposizione

$$x \in \emptyset$$

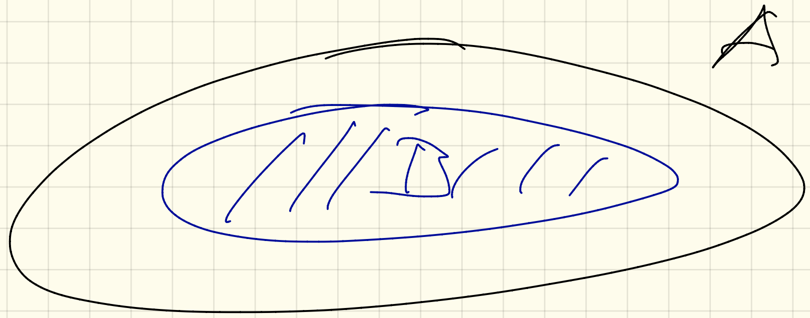
è sempre falsa qualunque sia l'oggetto x

- Dati A e B insiemi, si dice che B è sottoinsieme di A, $B \subseteq A$ $A \supseteq B$, se ogni elemento di B è elemento di A, cioè

$b \in B \Rightarrow b \in A$

$A \supset B$

Scriviamo che $B \subset A$ se escludiamo che possa essere $B = A$

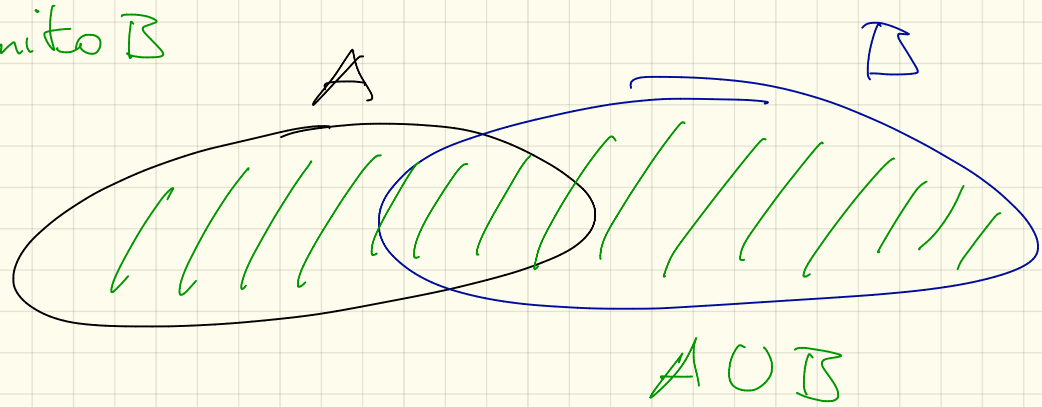


- $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \subseteq \mathbb{Z}$

- Dati A e B insiemi

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

A unito B

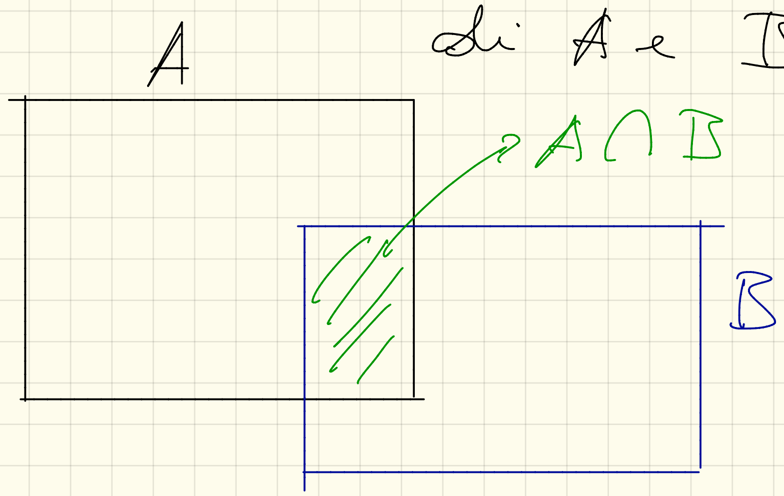


- Dati A e B insiemi

$$A \cap B = \{ x \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$

A intersecato B

$\downarrow$ elementi comuni di A e B

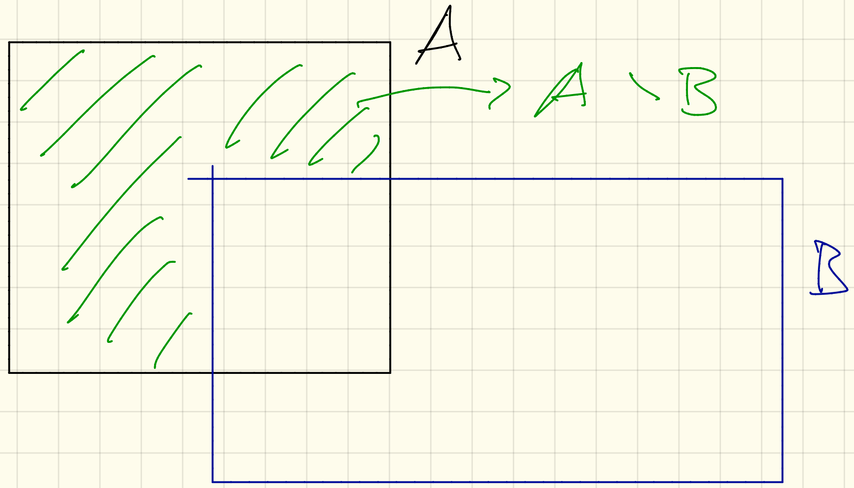


Se $\underline{A \cap B = \emptyset}$ (A e B non hanno elementi in comune), allora A e B si dicono <u>disgiunti</u>

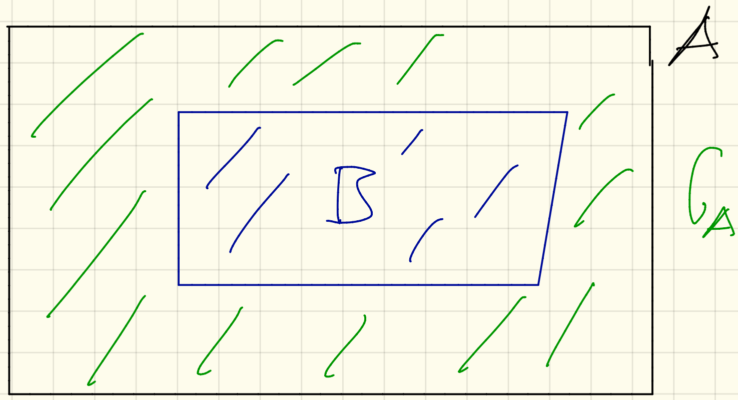
- Dati due insiemi A e B

$$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$$, elementi di A che non appartengono a B

A meno B
o differenza di B da A



- Se $B \subseteq A$, $A \setminus B$ è indicato anche con $C_A B$ e si dice complementare di B in A



$C_A B = A \setminus B$

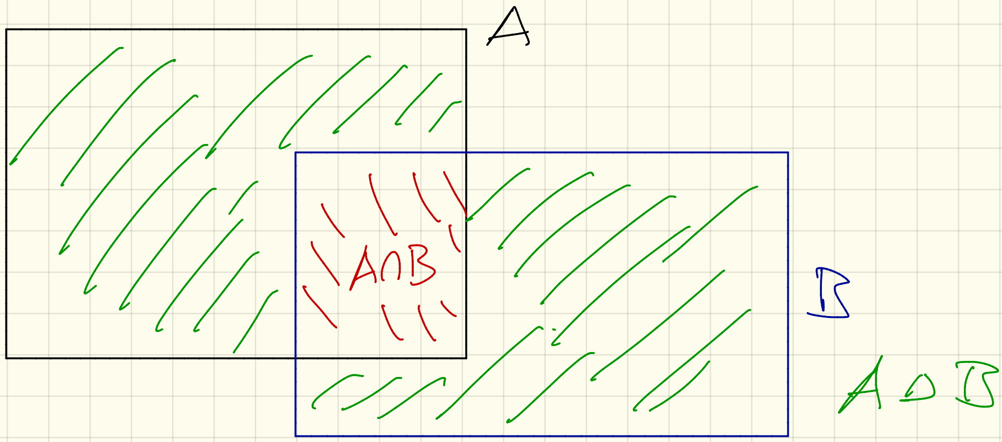
$B \setminus A = \emptyset$

- Dati A e B insieme,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

, sono tutti gli elementi di A che non appartengono a B e tutti gli elementi di B che non appartengono ad A

differenza simmetrica di A e B



$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- Dato un insieme A si definisce l'insieme delle parti di A, indicato con $\mathcal{P}(A)$, come l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di A

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$$

- Dati due insiemi (non vuoti) A e B si definisce il <u>prodotto cartesiano di A per B</u>, $A \times B$, come l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ e } b = b'$$

$$(1, 2) \neq (2, 1) \qquad \{1, 2\} = \{2, 1\}$$

<u>ES</u>.:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 4\}$$

$$A \times B = \{ (1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4) \}$$

$$B \times A = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3) \} \neq A \times B$$

$$A^2 = A \times A = \{ (a, a') \mid a, a' \in A \}$$

$$B^2 = \{ (1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4) \}$$

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$$

Relazioni

Definizione: dati due insiemi non vuoti A e B una relazione tra A e B è un sottoinsieme R di $A \times B$. Si dice che due elementi $a \in A$ e $b \in B$ sono in relazione tra loro tramite R, e si scrive aRb, se $(a,b) \in R$

$$D = \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A^2$$

→ diagonale di A

$$(a, b) \in D \iff b = a$$

D definisce la relazione di uguaglianza

MERCOLEDÌ 3/10

Relazioni d'ordine

Definizione: Sia A insieme non vuoto e R una relazione in A (una relazione tra A e se stesso, $R \subseteq A^2$). R si dice **relazione d'ordine** se gode delle seguenti proprietà

proprietà riflessiva: $\forall a \in A$, aRa
$((a,a) \in R)$

proprietà antisimmetrica: $\forall a,b \in A$
$(aRb) \wedge (bRa) \Rightarrow a=b$

$((a,b) \in R$ e $(b,a) \in R \Rightarrow a=b)$

proprietà transitiva: $\forall a,b,c \in A$

$(aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow aRc$

$((a,b) \in R$ e $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R)$

Se vale anche che
$\forall a,b \in A \quad (aRb) \vee (bRa)$ allora
$\forall a,b \in A \quad (a,b) \in R$ o $(b,a) \in R$

la relazione d'ordine si dice totale ed A totalmente ordinato

Es.: $\mathbb{N}$, insieme dei numeri naturali, e la relazione "$\leq$": è una relazione d'ordine

prop. riflessiva: è vero o falso che $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \leq n$? Vero!

prop. antisimmetrica: è vero o falso che $\forall p, n \in \mathbb{N}$ si ha che

$p \leq n$ e $n \leq p$ $\Rightarrow n = p$? Vero!

prop. transitiva: è vero o falso che $\forall n, p, k \in \mathbb{N}$ se $n \leq p$ e $p \leq k$, allora $n \leq k$? Vero!

$\Rightarrow$ "$\leq$" su $\mathbb{N}$ è una relazione d'ordine ed è anche totale

Attenzione! "$<$" non è una relazione d'ordine perché non gode, ad esempio, della proprietà riflessiva

Se voglio vedere "$\leq$" come un sottoinsieme di $\mathbb{N}^2$, allora procedo così

$$\leq = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), \dots \\ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \dots \\ (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), \dots \\ \dots \}$$

Es.: $X = \{1,2,3\}$ e introduciamo una relazione in $\mathcal{P}(X)$

$\forall B, C \in \mathcal{P}(X)$ $B R C$ se e solo se $B \subseteq C$

$$(B,C) \in R \iff B \subseteq C$$

$$\mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$$

R è una relazione d'ordine

prop. riflessiva: $B \in \mathcal{P}(X)$, è vero o falso che BRB, cioè che $B \subseteq B$? Vero!

prop. antisimmetrica: è vero o falso che dati $B, C \in \mathcal{P}(X)$ con BRC e CRB, allora $B=C$? Cioè se

$B \subseteq C$ e $C \subseteq B$, è vero che $B=C$?

Vero!

prop. transitiva: è vero o falso che dati $B, C, D \in \mathcal{P}(X)$ con BRC e CRD, si ha BRD?

$B \subseteq C \subseteq D \Longrightarrow B \subseteq D$ Vero!

È una relazione di ordine totale?
No, basta prendere

$B = \{1\}$, $C = \{2\}$

Si ha $B \not R C$ perché $B \nsubseteq C$ e $C \not R B$ perché $C \nsubseteq B$
(non posso decidere quale tra B e C è il "più piccolo")

Principio di induzione

Principio di induzione - prima forma

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ (n_0 fissato), sia P_n un enunciato. Se

1) P_{n_0} è vero
2) $\forall n \geq n_0$ $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ (P_n è detta ipotesi induttiva)

allora P_n è vero $\forall n \geq n_0$

$n_0 = 1$ (per fissare le idee)

1) P_1 è vero

2) $\forall n \geq 1$, supposto vero P_n, riesco a dedurre P_{n+1}

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \Rightarrow & P_2 & \Rightarrow & P_3 & \Rightarrow & P_4 \Rightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{vero} & & \text{vero} & & \text{vero} & & \text{vero} \end{array}$$

Principio di Induzione - seconda forma

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, sia P_n un enunciato

Se

1) P_{n_0} è vero

2) $\forall n \geq n_0$ vale

$$\underbrace{(P_{n_0} \wedge P_{n_0+1} \wedge \cdots \wedge P_n)}_{\text{ipotesi induttiva}} \Rightarrow P_{n+1}$$

allora P_n è vero $\forall n \geq n_0$

$n_0 = 1$

1) P_1 è vero

2) $\forall n \geq 1 \quad (P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \Rightarrow P_{n+1}$

$n = 1 \qquad P_1 \Rightarrow P_2 \qquad (P_2$ è vero$)$

$n = 2 \qquad P_1 \wedge P_2 \Rightarrow P_3 \qquad (P_3$ è vero$)$

$n = 3 \qquad P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \Rightarrow P_4 \qquad (P_4$ è vero$)$

- - - - - - - -