PRELIMINARI ESERCIZI

MERCOLEDÌ 3/10

Esercizio

Provare che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\to$ $1+2+3+\dots+n$, somma dei primi n numeri naturali

$$\left(\sum_{k=1}^{10} k^2 = 1+4+9+16+\dots+100\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{10} j^2$$ indice di sommatoria è muto

$$P_n: \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Utilizzo il principio di induzione

- P_1 (P_n con $n = 1$)

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$

sostituisco ad n il valore 1

$$\left.\frac{n(n+1)}{2}\right|_{n=1} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

$\Rightarrow P_1$ è vero

- $\forall n \geq 1 \quad P_n \Rightarrow P_{n+1}$

suppongo che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

e dimostro che allora vale

$$P_{n+1}: \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\sum_{k=1}^{n} k \,=\, \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1)$$

per ipotesi induttiva

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ho dimostrato che $P_n \Rightarrow P_{n+1} \quad \forall n \geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots\dots + 100 \\ + \quad + \quad + \quad + \quad + \qquad\qquad + \\ 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \dots\dots + 1 \end{array}\right\} 2\sum_{k=1}^{100} k$$

$$\underbrace{101 + 101 + 101 + \dots\dots + 101}_{101 \cdot 100}$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{100} k = 101 \cdot 100$$

Esercizio

Provare che $\forall r \in \mathbb{R}$, $r \neq 1$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$$

$$\to r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^n =$$

$$= 1 + r + r^2 + \dots + r^n$$

Utilizziamo il Principio di Induzione

1) P_0 : $\sum_{k=0}^{0} r^k = \frac{1-r}{1-r} = 1$ Vero!

$$\to r^0 = 1$$

2) $\forall\, n \geq 0$ deve valere $P_n \Rightarrow P_{n+1}$,

ciò che, se vale $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$,

allora vale $$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \underbrace{r^0 + r + r^2 + \dots + r^n}_{\sum_{k=0}^{n} r^k} + r^{n+1} =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ipotesi induttiva}}}{=} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} = \frac{1-r^{n+2}}{1-r},$$

come si voleva //