RAZIONALI E REALI
TEORIA

I numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z} \;,\; q \neq 0 \right\}$$

In $\mathbb{Q}$ sono definite due operazioni

- somma, con le sue proprietà

  commutativa

  associativa

  esistenza dell'elemento neutro (lo zero)

  esistenza dell'opposto $(a + (-a) = 0)$

- prodotto, con le sue proprietà

  commutativa

  associativa

  esistenza dell'elemento neutro (1)

  esistenza dell'inverso o reciproco

  ($\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0, \quad a \cdot a^{-1} = 1$)

  proprietà distributiva:

  $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Queste proprietà algebriche individuano

su $\mathbb{Q}$ una struttura algebrica detta

campo

In $\mathbb{Q}$ c'è una relazione di ordine totale compatibile con la struttura di campo in questo senso

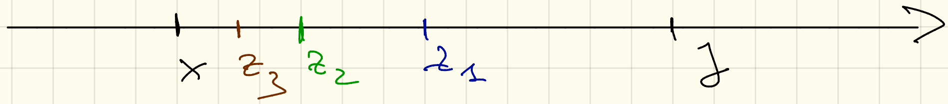
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, se $a \leq b$, allora $a + c \leq b + c$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ con $c > 0$, se $a \leq b$, allora $a \cdot c \leq b \cdot c$

Per questo motivo si dice che $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato

Proprietà di densità

$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$ con $x<y$ $\exists$ infiniti $z \in \mathbb{Q} \mid x < z < y$

$z_1 = \dfrac{x+y}{2}$, $z_2 = \dfrac{x+z_1}{2}$, $z_3 = \dfrac{x+z_2}{2}$



Proprietà di Archimede

$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}^{>0}$ $\exists\, n \in \mathbb{N} \mid nx \geq y$

(esiste un multiplo di x che supera y)

Dim.: $x = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}^{>0}$

$y = \dfrac{r}{s}$, $r, s \in \mathbb{Z}^{>0}$

Prendo $n = q \cdot r \in \mathbb{N}$

$nx = qr\dfrac{p}{q} = r\underbrace{p}_{\geq 1} \geq r \geq \dfrac{r}{\underbrace{s}_{\geq 1}} = y$

Numerabilità di $\mathbb{Q}$

I numeri razionali sono "tanti quanti" i numeri naturali

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0 \right\}$

ogni numero razionale è rappresentabile con una coppia di interi

Gli elementi di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono "tanti quanti" i numeri naturali

	0	1	-1	2	-2	3
0	(0,0)	(0,1)	(0,-1)	(0,2)	(0,-2)	(0,3)
1	(1,0)	(1,1)	(1,-1)	(1,2)	(1,-2)	(1,3)
-1	(-1,0)	(-1,1)	(-1,-1)	(-1,2)	(-1,-2)	(-1,3)
2	(2,0)	(2,1)	(2,-1)	(2,2)	(2,-2)	(2,3)
-2	(-2,0)	(-2,1)	(-2,-1)	(-2,2)		
3	(3,0)	(3,1)	(3,-1)	(3,2)		

Rappresentazione decimale

Per rappresentare un numero razionale $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0)$ posso utilizzare una rappresentazione decimale

$$\frac{p}{q} = \pm r, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$$

dove r è un numero naturale e

$$\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \quad \forall i$$

allineamento decimale

Es.:

$$\frac{5}{2} = 2,5 \qquad \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\frac{3}{4} = 0,75 \qquad \frac{4}{3} = 1,3333\ldots = 1,\overline{3}$$

L'allineamento decimale di un numero razionale è limitato (cioè $\exists n \in \mathbb{N} \mid \alpha_i = 0 \ \forall i \geq n$) oppure periodico cioè $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che da n in poi c'è un blocco finito di cifre che si ripete, detto periodo

$-36,3452798655755755 7\dots =$

$= -36,34527986\overline{557}$

Allineamenti propri: è un allineamento limitato o illimitato ma, se periodico, di periodo diverso da 9

$$r,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\overline{9} = r,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{n-1}\gamma_n$$

< 9

con $\gamma_n = \alpha_n + 1$

cioè $0,\overline{9} = 1$

$r,\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n\dots =$

$$= r\cdot 10^0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \dots$$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots = 1$$

GIOVEDÌ 4/10

I numeri reali

Es.: non esistono $p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $\frac{p^2}{q^2} = 2$, cioè 2 non è il quadrato di un numero razionale.

$= \left(\frac{p}{q}\right)^2$

Quindi per trovare un numero il cui quadrato sia 2 devo "uscire" da $\mathbb{Q}$

Per assurdo, siano $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q > 0$, primi tra loro (il massimo comun divisore tra p e q è 1) tali che

$\frac{p^2}{q^2} = 2 \implies p^2 = 2q^2 \implies p^2$ è pari (divisibile per 2) $\implies p$ è pari $\implies \exists\, k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, tale che $p = 2k \implies p^2 = 4k^2 = 2q^2$

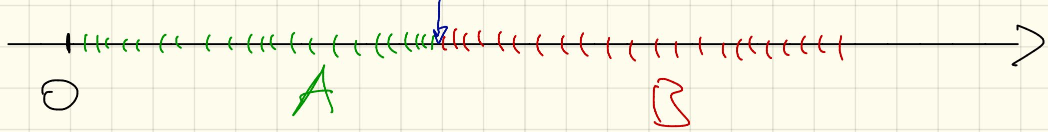
$\implies q^2 = 2k^2 \implies q^2$ è pari

$\implies q$ è pari, assurdo //

Classi separate
$$\begin{cases} A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a \geq 0 \text{ e } a^2 \leq 2 \} \\ B = \{ b \in \mathbb{Q} \mid b \geq 0 \text{ e } b^2 > 2 \} \end{cases}$$

$\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha $a \leq b$

c elemento separatore



$\exists\, c \in \mathbb{Q} \mid \quad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$?

No, c non esiste

Definizione: si definisce numero reale un allineamento decimale proprio, limitato o illimitato. L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$

serve per avere unicità nella rappresentazione di un numero reale

- L'insieme dei numeri reali traduce l'idea di continuo: $\mathbb{R}$ può essere visto come un sistema di coordinate su una retta (retta reale), nel senso che ad ogni punto di una retta fissata è possibile far corrispondere uno ed un solo numero reale, e viceversa (si dice che $\mathbb{R}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta)

- $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, esattamente come $\mathbb{Q}$, con le operazioni di somma e prodotto note e l'usuale relazione d'ordine

Teorema di completezza: per ogni coppia A, B di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tale che $a \leq b \quad \forall a \in A$ e $\forall b \in B$, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

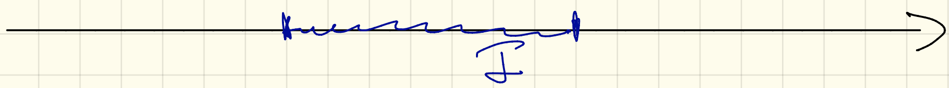
$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

- $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo

Intervalli

Definizione: un sottoinsieme non vuoto I di $\mathbb{R}$ si dice intervallo se $\forall\, a,b \in I$, con $a \leq b$, preso r tale che $a \leq r \leq b$ si ha $r \in I$

- in parole povere, I è un intervallo se, presi due suoi elementi, tutti i numeri reali compresi fra essi sono ancora elementi di I



Dati $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, si dice intervallo di estremi a e b uno dei seguenti insiemi

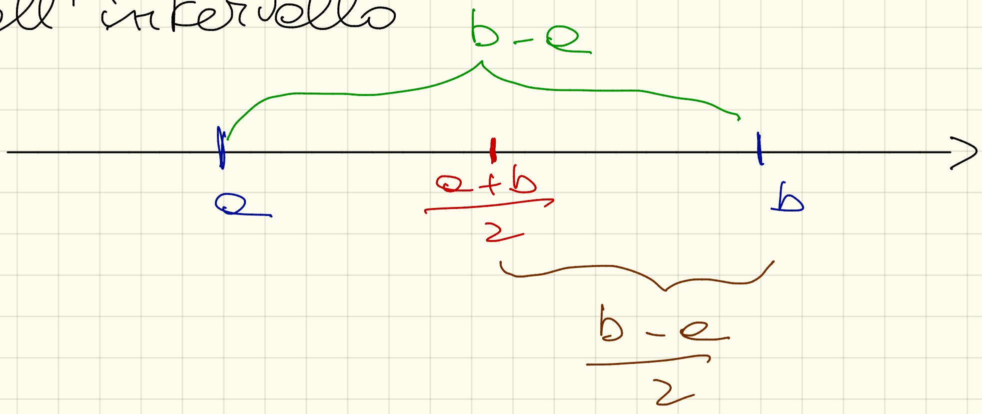
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso

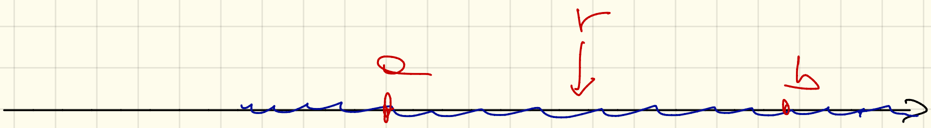
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervallo aperto

La quantità $b-a$ è detta ampiezza o diametro dell'intervallo, $\frac{b-a}{2}$ è detto raggio, $\frac{a+b}{2}$ è detto centro e i punti di $]a,b[$ sono detti interni all'intervallo





Introduciamo i simboli $-\infty$ e $+\infty$ (non sono numeri reali) che indicano due oggetti che verificano

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Intervalli illimitati : $c \in \mathbb{R}$

$]-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}$

$]-\infty, c[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}$

$[c, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq c\}$

$]c, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\}$

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ retta reale estesa

Es.:

$[1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

$]-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$

-1 e 3 sono estremi dell'intervallo, gli elementi di $]-1,3[$ sono punti interni, l'ampiezza è $3-(-1)=4$, il raggio è 2 e il centro è $\frac{3+(-1)}{2} = 1$

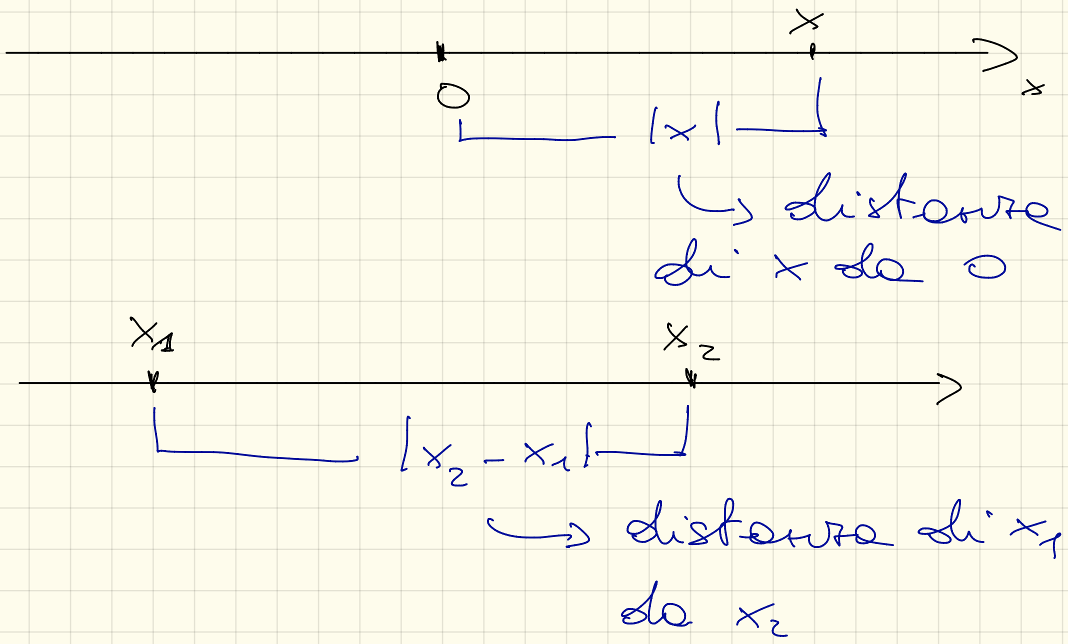
Modulo di un numero reale

Definizione: dato $x \in \mathbb{R}$, si dice modulo o valore assoluto di x la quantità

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$

In particolare, $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Es.: $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|-1| = 1 = |1|$



– Dalla definizione segue banalmente che, dato $M \geq 0$,

$$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$$

Es: $|x| \leq 3 \iff -3 \leq x \leq 3$

$|x| \leq M$

- $x \geq 0 \implies |x| = x \qquad x \leq M \qquad -M \leq x \leq M$
- $x < 0 \implies |x| = -x \qquad -x \leq M \implies x \geq -M$

$$-M \le x \le M$$

- $x \ge 0 \qquad |x| = x \le M$
- $x < 0 \qquad |x| = -x \le M$

$\Big\}\ |x| \le M$ come si voleva

Disuguaglianza triangolare:

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\boxed{|x+y| \le |x| + |y|}$$

Dim.: Sicuramente, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ valgono

$$-|x| \le x \le |x| \longrightarrow |x| \le |x| \quad M$$
$$-|y| \le y \le |y| \qquad |y| \le |y| \quad M$$

$$-|x| - |y| \le x + y \le |x| + |y|$$

$$\underbrace{-(|x| + |y|)}_{-M} \le x + y \le \underbrace{|x| + |y|}_{M}$$

$$\Longrightarrow \quad |x+y| \le |x| + |y| \qquad //$$

Proposizione: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$\boxed{\big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y|}$$

Dimostrazione:

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$$

applico disuguaglianza triangolare

$$|x|-|y| \leq |x-y|$$

$$|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x|$$

applico la disuguaglianza triangolare

$$|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$$

$$-|x-y| \leq |x|-|y|$$

$$|x|-|y| \leq |x-y|$$

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$$

$$-\Pi \qquad \Pi$$

$$\big|\,|x|-|y|\,\big| \leq |x-y| \qquad //$$

La disuguaglianza triangolare è generalizzabile alla somma di un numero qualsiasi di elementi di $\mathbb{R}$

$\forall\, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vale

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\left(\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)$$

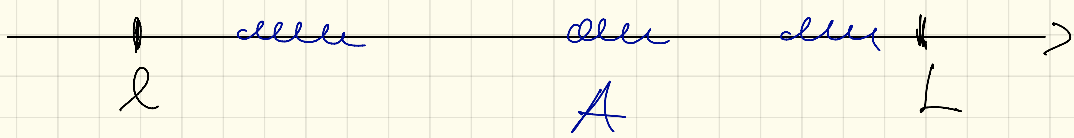
dimostrare per casa utilizzando il principio di induzione

Massimo e minimo

Definizione: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

A si dice limitato se $\exists\, l, L \in \mathbb{R}$ |

$$l \le a \le L \quad \forall a \in A$$



Es.: $]0, 10^6]$ è limitato

$(l=0,\ L=10^7;\ l=-30,\ L=10^6)$

$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2 \}$

$\ell = -1 \quad , \quad L = 4$

$\ell = 0 \quad , \quad L = \sqrt{2}$

<u>Proposizione</u>: $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è limitato $\Longleftrightarrow \exists M \geq 0 \mid$

$$|a| \leq M \quad \forall a \in A$$

<u>Dim.</u>: $\Rightarrow$) Ipotesi: A limitato

Tesi: $\exists M \geq 0 \mid |a| \leq M \ \forall a \in A$

A limitato $\Rightarrow \exists \ell, L \in \mathbb{R} \mid$

$$\ell \leq a \leq L \quad \forall a \in A$$

$$M = \begin{cases} |L| & \text{se } |L| \geq |\ell| \\ |\ell| & \text{se } |\ell| > |L| \end{cases}$$

$$\Rightarrow -M \leq \ell \leq a \leq L \leq M$$

$$\Rightarrow |a| \leq M$$

$\Leftarrow$) Ipotesi: $\exists M \geq 0 \mid |a| \leq M \ \forall a \in A$

Tesi: A è limitato

$|a| \leq M \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow \underbrace{-M}_{\ell} \leq a \leq \overset{L}{M} \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow A$ è limitato //

LUNEDÌ 8/10

Ricevimento: giovedì dalle 10:30 alle 12:00
aula 2AB40 (Torre Archimede)

Quiz di autovalutazione:
6 domande a risposta multipla
Voto in trentesimi, sufficienza 18
1 solo tentativo
50 minuti

Definizione: $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice superiormente limitato se $\exists\ L \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq L \quad \forall a \in A$$

Un tale elemento (che, in generale, non è unico) si dice maggiorante di A. Se A non è superiormente limitato, allora si dice superiormente illimitato e in tal caso

$$\forall L \in \mathbb{R} \quad \exists a \in A \mid a > L$$

Es.: $A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2 \}$

$L = 3$ $\quad a \leq L \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow A$ è superiormente limitato

$\rightarrow$ è maggiorante

$L' = 4$ $\quad a \leq 4 \quad \forall a \in A$

$\rightarrow$ è un altro maggiorante

Insieme dei maggioranti di A è

$[\sqrt{2}, +\infty[$

Es.: $\mathbb{Q}^{\leq 0}$ è superiormente limitato

$L = 1 \Rightarrow q \leq 1 \quad \forall q \in \mathbb{Q}^{\leq 0}$

$\rightarrow$ è maggiorante di $\mathbb{Q}^{\leq 0}$

Insieme dei maggioranti: $[0, +\infty[$

Definizione: $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice inferiormente limitato se

$\exists\, l \in \mathbb{R} \mid l \leq a \quad \forall a \in A$

In tal caso, l si dice minorante di A.

Se A non è inferiormente limitato, allora si dice <u>inferiormente illimitato</u> ed in tal caso vale

$\forall\, l \in \mathbb{R}\ \exists\, a \in A \mid a < l$

<u>Es.</u>: $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$

$l = -3$ è minorante

insieme dei minoranti è $]-\infty, -\sqrt{2}]$

<u>Es.</u>: $\mathbb{Q}^{\leq 0}$: è inferiormente illimitato

<u>Es.</u>: $\mathbb{Q}^{\geq 0}$

$l = -2$ è minorante

insieme dei minoranti è $]-\infty, 0]$

<u>Proposizione</u>: $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è limitato $\Longleftrightarrow$ è sia superiormente che inferiormente limitato

- Un insieme che sia superiormente o inferiormente illimitato si dice illimitato

Definizione : $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

Un maggiorante di A appartenente ad A si dice massimo di A ed è indicato con $\max A$

Un minorante di A appartenente ad A si dice minimo di A ed è indicato con $\min A$.

- $M = \max A$

  1) $M \geq a \quad \forall a \in A$

  2) $M \in A$

Es.: $\mathbb{Q}^{\leq 0}$ insieme dei maggioranti è $[0, +\infty[$

$0 \in \mathbb{Q}^{\leq 0}$ $\quad 0 = \max \mathbb{Q}^{\leq 0}$

Es.: $A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2 \}$

insieme dei maggioranti è $[\sqrt{2}, +\infty[$

$\nexists$ un maggiorante di A appartenente ad A, cioè A non ha massimo

- $m = \min A$

1) $m \le a \quad \forall a \in A$

2) $m \in A$

Es.: $\mathbb{Q}^{\ge 0}$ insieme dei minoranti è

$]-\infty, 0]$

$\cap$

$\mathbb{Q}^{\ge 0}$

$0 = \min \mathbb{Q}^{\ge 0}$

Es.: $A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \le 2 \}$

insieme dei minoranti è $]-\infty, -\sqrt{2}]$

$\Rightarrow$ A non ha minimo

Es.: $[0, 1[$

minoranti

$]-\infty, 0]$

$0 = \min [0, 1[$

maggioranti

$[1, +\infty[$

$[0, 1[$ non ha massimo

Proposizione: qualora esistano, massimo e minimo di un insieme sono unici

Estremo superiore ed estremo inferiore

Definizione: $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto superiormente limitato. Si dice estremo superiore di A, ed è indicato con $\sup A$ il minimo dell'insieme dei maggioranti di A

$$S = \sup A \iff S = \min\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \ \forall a \in A\}$$

Definizione: $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto inferiormente limitato. Si dice estremo inferiore di A, ed è indicato con $\inf A$, il massimo dell'insieme dei minoranti di A

$$I = \inf A \iff I = \max\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \ \forall a \in A\}$$

Teorema di completezza (seconda forma):

Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore, e ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ inferiormente limitato ha estremo inferiore. Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme sono unici.

— . —

Es.: $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \le 2\}$

insieme dei minoranti è $]-\infty, -\sqrt{2}]$

insieme dei maggioranti è $[\sqrt{2}, +\infty[$

$\inf A = -\sqrt{2}$

$\sup A = \sqrt{2}$

Es.: $\inf \mathbb{Q}^{\ge 0} = 0 = \min \mathbb{Q}^{\ge 0}$

$\sup \mathbb{Q}^{\le 0} = 0 = \max \mathbb{Q}^{\le 0}$

Proposizione: $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

Se $S = \sup A \in A$, allora $S = \max A$.

Se $I = \inf A \in A$, allora $I = \min A$

Dim.: $S = \sup A \in A$, allora S è un maggiorante appartenente ad A, e quindi è massimo

- Se A ha massimo, allora
$$\sup A = \max A$$
Se A ha minimo, allora $\inf A = \min A$

- A superiormente limitato
insieme dei maggioranti di A è
$$[\sup A, +\infty[$$
- A è inferiormente limitato
insieme dei minoranti di A è
$$]-\infty, \inf A]$$

—— . ——

Teorema: $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto superiormente limitato. Allora

è un maggiorante

$$S = \sup A \iff \begin{cases} S \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid a > S - \varepsilon \end{cases}$$

è il minimo dei maggioranti

$A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto inferiormente limitato. Allora

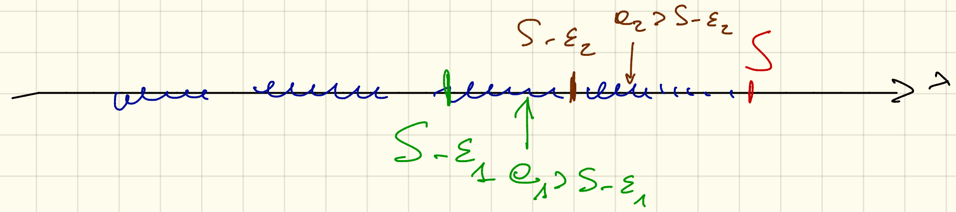
è un minorante

$$I = \inf A \iff \begin{cases} I \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid a < I + \varepsilon \end{cases}$$

è il massimo dei minoranti

Interpretazione

$$\begin{cases} S \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid a > S - \varepsilon \end{cases}$$

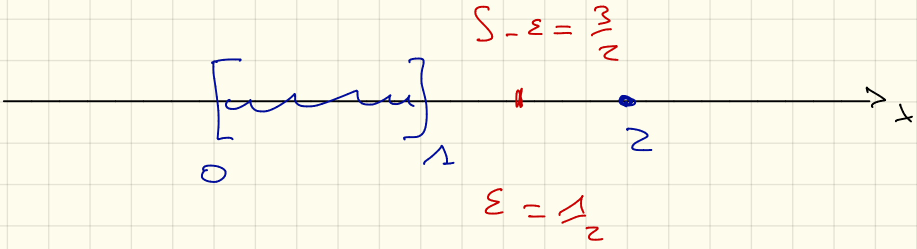


N.B.: $A = [0,1] \cup \{2\}$

$$\sup A = \max A = 2$$

insieme dei maggioranti di A $= [2, +\infty[$

$L \geq a \quad \forall a \in A$



Quale elemento $e \in A$ soddisfa $e > S-\varepsilon$? $e=2$

Dim. del teorema

$$S = \sup A \iff \begin{cases} S \geq e \quad \forall e \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists e \in A \mid e > S-\varepsilon \end{cases}$$

(dimostrazione per $\inf A$ lasciata per casa)

$\Rightarrow$)   Ipotesi: $S = \sup A$

Tesi: $\begin{cases} S \geq e \quad \forall e \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists e \in A \mid e > S-\varepsilon \end{cases}$

$S = \sup A$ è minimo dei maggioranti

$\Rightarrow$ S è maggiorante di A e quindi

$S \geq e \ \forall e \in A$

Per la seconda proprietà, ragioniamo per assurdo e supponiamo che valga

$\neg\left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists e \in A \mid e > S-\varepsilon\right)$

$\exists \varepsilon > 0 \mid \boxed{\forall a \in A \quad a \leq S - \varepsilon}$

$\Rightarrow S-\varepsilon$ è maggiorante di A e
$S - \varepsilon < S$

$\Rightarrow S$ non è il minimo dei maggioranti $\Rightarrow$ non è $\sup A$, assurdo

$\Leftarrow$) Ipotesi: $\begin{cases} S \geq a & \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid a > S - \varepsilon \end{cases}$

Tesi: $S = \sup A$, cioè è il minimo dei maggioranti

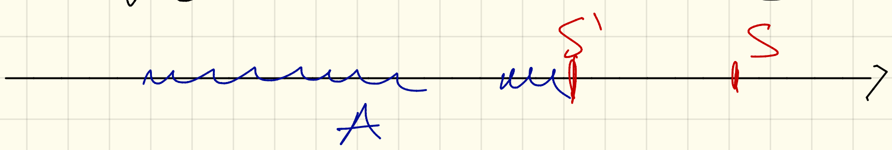
S è maggiorante perché per ipotesi $S \geq a \quad \forall a \in A$

Per assurdo, assumiamo che S non sia estremo superiore e che valga

$\sup A = S' < S$

$S' \geq a \quad \forall a \in A$

Facciamo vedere che non è più vero che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid a > S - \varepsilon$



Preso $\varepsilon = S - S'$

$$S - \varepsilon = S' \geq a \quad \forall a \in A$$

e quindi non trovo alcun elemento $a \in A \mid a > S - \varepsilon$ //

MARTEDÌ 8/10

Teorema (proprietà di Archimede):

Fissati $a, b \in \mathbb{R}^{>0}$, $a < b$, $\exists n \in \mathbb{N} \mid na > b$

Dim.:

$$A = \{ na \mid n \in \mathbb{N} \}$$

e dimostriamo che A è superiormente illimitato

Per assurdo, supponiamo che A sia superiormente limitato e sia $S = \sup A < +\infty$

1) $s \geq na \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \mid na > s - \varepsilon}$

In particolare, posso prendere $\varepsilon = a$

$$\exists \, \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \bar{n} a > s - a$$

$$\bar{n} a + a > s \qquad \overset{\in A}{\underbrace{(\bar{n}+1)}_{\in \mathbb{N}} a} > s,$$

assurdo e quindi A è superiormente illimitato.

Es.: $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$

$\sup A = 1$ e $\inf A = 0$

$1 \in A \qquad 1 = \frac{1}{1}$

$\frac{1}{n} \leq 1 \quad \Rightarrow \max A = 1 = \sup A$

$\frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow 0$ è minorante di A

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \text{ tale che } \frac{1}{n} < 0 + \varepsilon \end{cases}$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$ deve essere $n > \frac{1}{\varepsilon}$

trovo n tale che $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Sì, per la proprietà di Archimede con $a = 1$ e $b = \frac{1}{\varepsilon}$

$n \cdot 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ (trovo un multiplo di 1 maggiore di $\frac{1}{\varepsilon}$)

$\Rightarrow \inf A = 0$

Osservazione: non esiste alcun numero reale positivo più piccolo di tutti i numeri reali positivo

$$\nexists\, \alpha > 0 \mid \alpha \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

In altre parole, se vale

$$0 \leq \alpha \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

Se, per assurdo, esistesse $\alpha > 0 \mid$

$\alpha \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, fissato $\varepsilon > 0$ si avrebbe $\alpha \leq \varepsilon$. Per la proprietà di Archimede $\exists n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ | $n\alpha > \varepsilon$

$$\Rightarrow \alpha > \frac{\varepsilon}{n}$$ ho trovato

un numero positivo, $\frac{\varepsilon}{n}$, più piccolo di α, assurdo perché α è più piccolo di tutti i numeri positivi, e quindi, in particolare, anche di $\frac{\varepsilon}{n}$

<u>Teorema di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$</u>: Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora $\exists q \in \mathbb{Q}$ | $a < q < b$.

<u>Osservazione</u>: questo dice che, fissato un numero reale (irrazionale) r posso approssimarlo bene quanto voglio con dei numeri razionali

$$r = \sqrt{2} \Rightarrow \exists q_1 \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} < q_1 < \sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

$$\exists q_2 \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} < q_2 < \sqrt{2} + \frac{1}{2^2}$$

Fisso $j \geq 1$

$$\exists\, q_j \in \mathbb{Q} \mid \sqrt{2} < q_j < \sqrt{2} + \frac{1}{2j}$$

$$|q_j - \sqrt{2}| < \frac{1}{2j}$$

<u>Dimostrazione del teorema</u>

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$b - a > 0 \Rightarrow \exists$ un multiplo di $b-a$ che supera 1 $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$ tale che $n(b-a) > 1$

Osserviamo $]na, nb[$: è un intervallo

di ampiezza $n(b-a) > 1$ e quindi

$$\exists\, p \in \mathbb{Z} \mid p \in]na, nb[$$

$$\Rightarrow \quad na < p < nb$$

$$a < \underbrace{\frac{p}{n}}_{= q \in \mathbb{Q}} < b$$

ho trovato il numero razionale cercato!

<u>$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$</u>

Definizione: Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente illimitato, si pone

$$\sup A = +\infty$$

Se A è inferiormente illimitato, si pone

$$\inf A = -\infty$$

Radicali e potenze

Teorema: $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Allora $\exists!$ $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, tale che $x^n = y$. Tale numero x viene detto radice n-esima di y ed indicato con $\sqrt[n]{y}$ o $y^{1/n}$

Attenzione: $\sqrt{4} = 2$

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$$

$$\sqrt{(-2)\cdot(-3)} = \sqrt{|-2|} \cdot \sqrt{|-3|} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$

Attenzione! $\sqrt[n]{y}$ è definita solo per $y \geq 0$

Potenze ad esponente razionale

$a > 0 \qquad r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ p, q \in \mathbb{N}^{>0}$

$a^r = a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$ per definizione

$r \in \mathbb{R}^{\geq 0},\ r \notin \mathbb{Q}$

$r = p, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$

$a > 1$

$$a^r = \sup\{ a^{\overbrace{p, a_1 a_2 \dots a_n}^{\in \mathbb{Q}}} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$a^{p,a_1} \qquad a^{p,a_1 a_2} \qquad a^{p,a_1 a_2 a_3}$

$a^{p,a_1 a_2 a_3 a_4} \quad \dots\dots$

$r = \sqrt{2} = 1,4142\dots\dots$

$a^{1,4} \qquad a^{1,41} \qquad a^{1,414} \qquad a^{1,4142} \dots\dots$

$0<a<1, \quad r>0$

$$a^r = \frac{1}{(1/a)^r}$$

$r<0 \qquad a^r = \frac{1}{a^{-r}}$

Se $a<0$, a^r ha senso solo con $r \in \mathbb{Z}$

$1^r = 1 \quad \forall r \in \mathbb{R} \qquad 0^r = 0 \quad \forall r>0$

Logaritmi

Teorema: $a, y > 0$, $a \neq 1$. Allora $\exists!\ x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. Tale x viene detto logaritmo in base a di y, si indica con $\log_a y$, ed è individuato da

> 0

$$\log_a y = \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{R} \mid a^r \leq y\} & \text{se } a>1 \\ \sup\{r \in \mathbb{R} \mid a^r \geq y\} & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

- $\log_a y$ è l'esponente da dare ad a per ottenere y

$a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$

- $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$

$\log_5 [(-2) \cdot (-3)] = \log_5 |-2| + \log_5 |-3| =$

$= \log_5 2 + \log_5 3$

- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$
- $\log_a x = 0 \iff x = 1$

Notazione

$\ln x$ è il logaritmo naturale di x, cioè è il logaritmo che ha per base il numero di Nepero

$e = 2,718281828459045 23 \dots$

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\log$ - logaritmo in base 10

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\_\_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_\_$$