RAZIONALI E REALI ESERCIZI

MARTEDÌ 8/10

Esercizio

Sia $A = \left\{ (-1)^n + \frac{2}{n-1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$

Trovare $\sup A$ e $\inf A$

$n=2 \qquad (-1)^2 + \frac{2}{2-1} = 1 + 2 = 3$

$n=3 \qquad (-1)^3 + \frac{2}{3-1} = -1 + 1 = 0$

$n=4 \qquad (-1)^4 + \frac{2}{4-1} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$n = 5 \qquad (-1)^5 + \frac{2}{5-1} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

n pari $\qquad (-1)^n + \frac{2}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1}$

n dispari $\qquad (-1)^n + \frac{2}{n-1} = -1 + \frac{2}{n-1}$

Congettura: $\max A = 3$ $(= \sup A)$

$\inf A = -1$

Andiamo a dimostrarlo

- $\max A = 3$ $\qquad 3 \in A$, devo far vedere che è un maggiorante di A

Cioè che $3 \geq (-1)^n + \frac{2}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

n dispari $\quad 3 \geq -1 + \frac{2}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ dispari

$4 \geq \frac{2}{n-1}$ è vero?

$n - 1 \geq 1 \quad \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{n-1} \leq 2 \quad \forall n \geq 2$

$\Rightarrow 4 \geq \frac{2}{n-1}$ vero!

n pari: dobbiamo verificare che

$$3 \geq (-1)^n + \frac{2}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ pari}$$

$$3 \geq 1 + \frac{2}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \text{pari}$$

$$2 \geq \frac{2}{n-1} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

$\Rightarrow$ 3 è un maggiorante di A appartenente ad A e quindi è max A

- $\inf A = -1$

$$\begin{cases} -1 \leq (-1)^n + \dfrac{2}{n-1} & \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \mid \\ \qquad (-1)^n + \dfrac{2}{n-1} \leq -1 + \varepsilon \end{cases}$$

$-1 \notin A$

— Verifico che $-1 \leq (-1)^n + \frac{2}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

n pari: $(-1)^n + \frac{2}{n-1} = 1 + \frac{2}{n-1} \geq 0 > -1$

n dispari: $(-1)^n + \frac{2}{n-1} = -1 + \frac{2}{n-1} > -1$ $\quad \frac{2}{n-1} > 0$

– Seconda proprietà

fisso $\varepsilon > 0$ devo trovere $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ |

$$(-1)^n + \frac{2}{n-1} < -1 + \varepsilon$$

Prendo n dispari, $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$,

$$(-1)^{2k+1} + \frac{2}{(2k+1)-1} = -1 + \frac{2}{2k} = -1 + \frac{1}{k}$$

e voglio che sia $-1 + \frac{1}{k} < -1 + \varepsilon$, cioè $\frac{1}{k} < \varepsilon$, e un tale k esiste $\Rightarrow \inf A = -1$

Esercizio

Sia $A = \left\{ \frac{2n + (-1)^n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

Trovare sup A e inf A

$n = 0 \qquad \frac{2 \cdot 0 + (-1)^0}{0+1} = 1$

$n = 1 \qquad \frac{2 \cdot 1 + (-1)^1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$n = 2 = \qquad \frac{2 \cdot 2 + (-1)^2}{2+1} = \frac{5}{3}$

n dispari $\quad \dfrac{2n+(-1)^n}{n+1} = \dfrac{2n-1}{n+1}$

n pari $\quad \dfrac{2n+(-1)^n}{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1}$

- n dispari :

$$\frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+2-2-1}{n+1} =$$

$$= \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{3}{n+1} =$$

$$= 2 - \frac{3}{n+1}$$

n pari :

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+2-2+1}{n+1} =$$

$$= \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

n dispari : $\quad 2 - \dfrac{3}{n+1}$

n pari : $\quad 2 - \dfrac{1}{n+1}$

Congettura: $\sup A = 2$

$\inf A = \frac{1}{2} = \min A$

- $\sup A = 2$

$$\begin{cases} 2 \geq \dfrac{2n+(-1)^n}{n+1} & \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \mid \dfrac{2n+(-1)^n}{n+1} > 2 - \varepsilon \end{cases}$$

- $2 \geq \dfrac{2n+(-1)^n}{n+1}$

n pari $\quad 2 \geq 2 - \dfrac{1}{n+1}$ Vero!

n dispari $\quad 2 \geq 2 - \dfrac{3}{n+1}$ Vero!

- Sia $\varepsilon > 0$ fissato, supponiamo n pari $\Rightarrow n = 2k$, $\exists k \in \mathbb{N}$

deve essere

$$2 - \frac{1}{2k+1} > 2 - \varepsilon$$

$$\frac{1}{2k+1} < \varepsilon \qquad 2k+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$k > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\frac{1}{2}$$

esiste un tale $k \Rightarrow \sup A = 2$

$2 \notin A$, quindi non è massimo

- $\min A = \dfrac{1}{2}$

Sicuramente $\frac{1}{2} \in A$ (si ottiene con $n = 1$)

Devo dimostrare che

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2n + (-1)^n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- n pari : $n = 2k \quad \exists k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{2k+1}$$

$$\frac{3}{2} \geq \frac{1}{2k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$3(2k+1) \geq 2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$6k+3 \geq 2 \qquad 6k \geq -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Vero!

- n dispari : $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2n + (-1)^n}{n+1} =$$

$$= 2 - \frac{3}{n+1} = 2 - \frac{3}{2k+1+1} =$$

$$= 2 - \frac{3}{2k+2}$$

deve essere $\frac{1}{2} \leq 2 - \frac{3}{2k+2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{3}{2k+2} \leq \frac{3}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$6 \leq 3(2k+2) \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad 6 \leq 6k+6$$

Vero!

$\Rightarrow \min A = \frac{1}{2}$

MERCOLEDÌ 10/10

Esercizio

Sia

$$A = \left\{ \frac{1}{2^{n^2-4n+2}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$

$$\frac{1}{2^{n^2-4n+2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-4n+2} \geq 0$$

$n^2-4n+2+2-2 =$

$= n^2-4n+4-2 =$

$= (n-2)^2-2$

Congetture $\inf A = 0$

$\sup A = \max = 4$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2}$$

- $\inf A = 0$ $\quad 0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

0 non è minimo

$\Rightarrow$ è un minorante di A

Devo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2-2} \leq 0 + \varepsilon$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \leq \varepsilon$$

$$4\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2} \leq \varepsilon \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\frac{1}{2^{(n-2)^2}} \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad 2^{(n-2)^2} \geq \frac{4}{\varepsilon}$$

$$2^{(n-2)^2} \geq \frac{4}{\varepsilon} \iff$$

$$(n-2)^2 \geq \log_2 \frac{4}{\varepsilon}$$

$\frac{4}{\varepsilon} \leq 1 \Rightarrow \log_2 \frac{4}{\varepsilon} \leq 0 \Rightarrow$ è sempre vero

$\frac{4}{\varepsilon} > 1 \qquad n-2 \geq \sqrt{\log_2 \frac{4}{\varepsilon}}$

$$n \geq 2 + \sqrt{\log_2 \frac{4}{\varepsilon}}$$

$$\left(n-2 \geq \sqrt{\log_2 \frac{4}{\varepsilon}} \quad \text{o} \quad n-2 \leq -\sqrt{\log_2 \frac{4}{\varepsilon}} \right)$$

$\max A = 4$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2-2}\Bigg|_{n=2} = 4 \in A$$

Devo dimostrare che

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2-2}}_{4\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2}} \leq 4 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-2)^2} \leq 1 \qquad \frac{1}{2^{(n-2)^2}} \leq 1 \quad \text{vero perché } 2^{(n-2)^2} \geq 1 \; //$$

<u>Esercizio</u>

Risolvere $\log_2\left(\frac{x+7}{x-5}\right) < 0$

$$\begin{cases} x \neq 5 \\ \frac{x+7}{x-5} > 0 \\ \frac{x+7}{x-5} < 1 \end{cases}$$

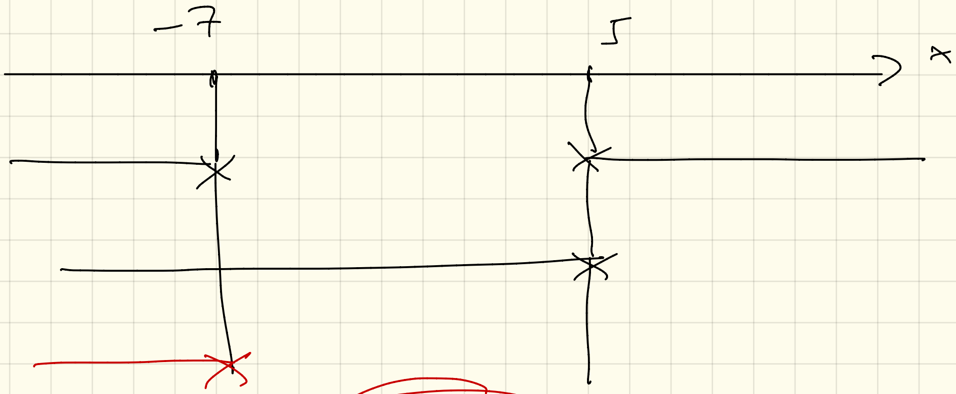
Se $a > 1$

$\log_a y \geq 0 \iff y \geq 1$

$$\begin{cases} x < -7 \text{ o } x > 5 \\ \frac{12}{x-5} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -7 \text{ o } x > 5 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\frac{x+7}{x-5}>0$$

$$\frac{x+7}{x-5}<1$$



$$x<-7$$

Esercizio

Risolvere

$$\log_{1/2}\left(\frac{x+7}{x-5}\right)<0$$

$$\boxed{\text{Se } 0<a<1, \ \log_a y \geq 0 \iff 0<y\leq 1}$$

$$\begin{cases} x \neq 5 \\ \dfrac{x+7}{x-5}>0 \\ \dfrac{x+7}{x-5}>1 \end{cases}$$

$$x>5$$

Esercizio

$$\log_{x+8}\left(\frac{x+7}{x-5}\right)<0$$

Bisogna distinguere i casi

$0<x+8<1$ e $x+8>1$

I° caso

$$\begin{cases} 0 < x+9 < 1 \\ x \neq 5 \\ \dfrac{x+7}{x-5} > 0 \\ \dfrac{x+7}{x-5} > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -9 < x < -8 \\ x \neq 5 \\ x > 5 \end{cases}$$

Non ho soluzioni!

II° caso

$$\begin{cases} x+9 > 1 \\ x \neq 5 \\ \dfrac{x+7}{x-5} > 0 \\ \dfrac{x+7}{x-5} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -8 \\ x \neq 5 \\ x < -7 \end{cases}$$

$$-8 < x < -7 \quad //$$

Esercizio

Trovare estremo superiore ed estremo inferiore dell'insieme

$$A = \left\{ 2^{p/q} - \frac{1}{p} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

$p = 1 \qquad 2^{1/q} - 1$

$2^{p/q} > 1 \qquad 2^{p/q} > \frac{1}{p} \leq 1$

$2^{p/q} - 1 > 0$

Congettura $\inf A = 0$

$q = 1 \qquad 2^p - \frac{1}{p}$

Congetture $\quad \sup A = +\infty$

- $\inf A = 0$ $\qquad$ 0 è un minorante: già appurato

Verifico la seconda proprietà dell'estremo inferiore

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid 2^{p/q} - \frac{1}{p} < 0 + \varepsilon$$

$$2^{p/q} - \frac{1}{p} < \varepsilon$$

Prendo $p = 1$ e cerco $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid$

$$2^{1/q} - 1 < \varepsilon \qquad 2^{1/q} < \varepsilon + 1$$

$$\frac{1}{q} < \log_2(\varepsilon + 1) > 0$$

$$q > \frac{1}{\log_2(\varepsilon + 1)}$$

- $\sup A = +\infty$: devo dimostrare che A è superiormente illimitato

Devo dimostrare che

$\forall L \in \mathbb{R}$ (basta prenderlo > 0 perché tutti gli elementi di A sono > 0 e basta verificare la proprietà per L grande)

$$\exists\, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid 2^{p/q} - \frac{1}{p} > L$$

Prendo $q = 1$ e cerco $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che

$$2^p - \frac{1}{p} > L$$

$$2^p > 2^p - \frac{1}{p} > L$$

$$2^p - \frac{1}{p} \geq 2^p - 1 > L$$

$$p > \log_2 (L+1)$$