FUNZIONI
TEORIA

Mercoledì 10/10

(Errore di stampa pag. 24 del libro

$$\neg(\exists!\, x \mid P(x)) \iff$$

$$(\forall x\ \neg P(x)) \vee (\exists x\, \exists y \mid (x \neq y) \wedge P(x) \wedge P(y))$$

non c'è sul libro

Le funzioni

Un capitale c da investire in banca ad un tasso di interesse t, $t \in]0, 1]$. Ogni mese la banca paga gli interessi e voglio capire a quanto ammonta il capitale a fine anno (dopo 12 mesi)

I° mese: $c + c\frac{t}{12} = c\left(1+\frac{t}{12}\right)$

II° mese: $c\left(1+\frac{t}{12}\right) + c\left(1+\frac{t}{12}\right)\frac{t}{12} =$

$= c\left(1+\frac{t}{12}\right)^2$

III° mese: $c\left(1+\frac{t}{12}\right)^2 + c\left(1+\frac{t}{12}\right)^2\frac{t}{12} =$

$= c\left(1+\frac{t}{12}\right)^3$

$\vdots$

Fine anno: $c\left(1+\frac{t}{12}\right)^{12}$

($c\left(1+\frac{t}{12}\right)^{12} > c(1+t)$, capitale accumulato nel caso in cui la banca paghi gli interessi in un'unica soluzione a fine anno.

Se la banca pagasse gli interessi n volte in un anno, a fine anno il capitale ammonterebbe a

$$c\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n} \xrightarrow[n \text{ molto grande}]{} c\,e^{t}$$
)

Se $c = 1000$ €, $\forall t \in]0,1]$

$$R(t) = 1000\left(1+\frac{t}{12}\right)^{12}$$ è il capitale accumulato a fine anno (univocamente determinato)

ed ogni $t \in]0,1]$ corrisponde uno ed un solo valore di $R(t)$

Definizione: Siano X e Y insiemi non vuoti. Una funzione da X in Y è una corrispondenza che ad ogni elemento $x \in X$ associa uno ed un solo elemento di Y denotato con $f(x)$ che si dice valore della funzione in x. L'insieme X si dice dominio della funzione f e viene denotato anche con $\operatorname{dom} f$.

Si scrive
$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- L'insieme Y viene detto codominio di f.
- $f(x)$ si dice valore o immagine di x tramite f
- L'insieme

$$\operatorname{im} f = \left\{ f(x) \mid x \in X \right\}$$
$$\overset{\shortparallel}{f}(X)$$

insieme dei valori assunti da f, si dice insieme immagine o semplicemente immagine di f

Es.: $R(t) = 1000\left(1+\frac{t}{12}\right)^{12}$

dom $R =]0;1]$

codominio: $\mathbb{R}$ $\qquad R:]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

Studenti - date di nascita

$d: \left\{ \begin{array}{c} \text{studenti presenti} \\ \text{in aula} \end{array} \right\} \longrightarrow \{\text{date}\}$

$d(x)$ è la data di nascita dello studente x

dominio $\qquad\qquad$ codominio

Es.: $\log_2 : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\log_2 x$ è l'esponente che devo dare a 2 per ottenere x

Es.: $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad e^x > 0$

$x \longmapsto e^x$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Es.: $\text{sen}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

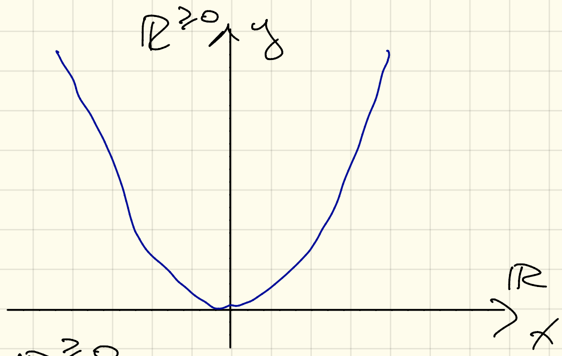
$x \longmapsto \text{sen}\, x$

Es.: $\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

Grafico di una funzione

$f(x) = x^2$



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$\operatorname{graf} f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$= \{ (x, \underbrace{x^2}_{f(x)}) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

In generale, data una funzione $f : X \to Y$, il suo grafico è l'insieme

$$\boxed{\operatorname{graf} f = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subseteq X \times Y}$$

Es.: funzione parte intera

$$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto [x]$$

parte intera di x

$$\boxed{[x] = \max \{ z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x \}}$$

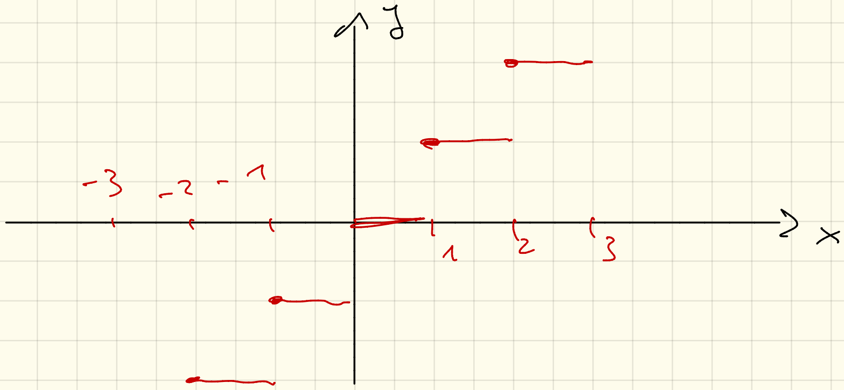
$[\sqrt{2}] = \max\{ z \in \mathbb{Z} \mid z \le \sqrt{2} \} = 1$

$[\pi] = 3$

$[-2,5] = -3$

$[k] = k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$[x] \in \mathbb{Z}$
$\forall x$



Es.: funzione caratteristica dei razionali

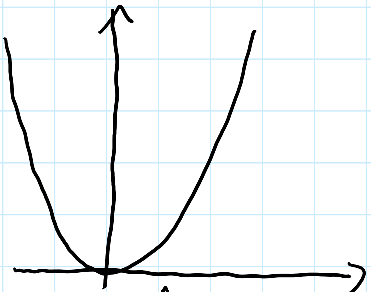
$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

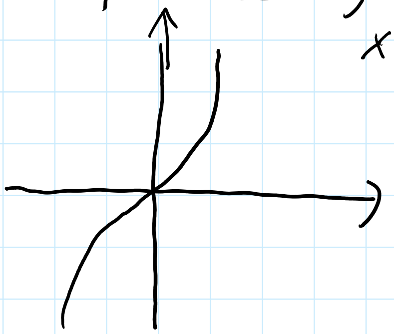
Funzioni

giovedì 11 ottobre 2018 13:33

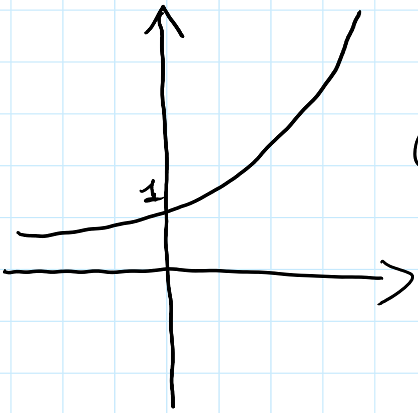
Esempi di grafici di funzioni



x^α, α pari

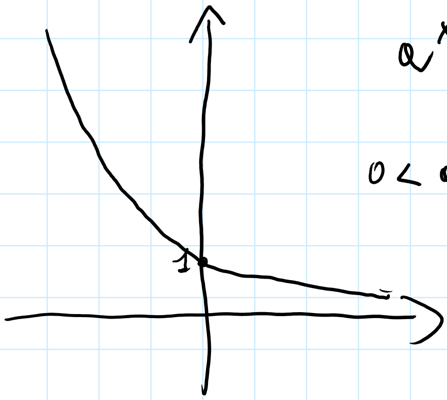


x^α dispari



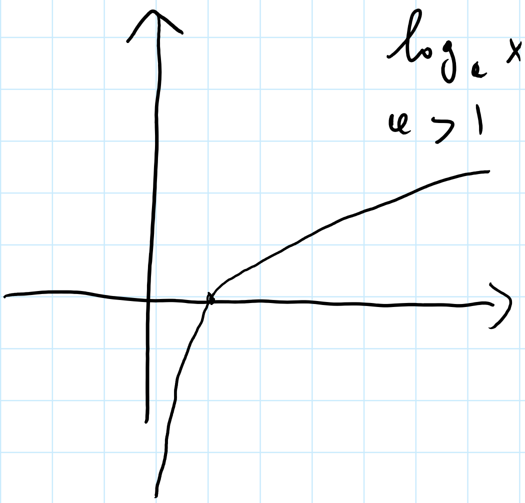
a^x

$a > 1$



a^x

$0 < a < 1$



$\log_a x$

$a > 1$

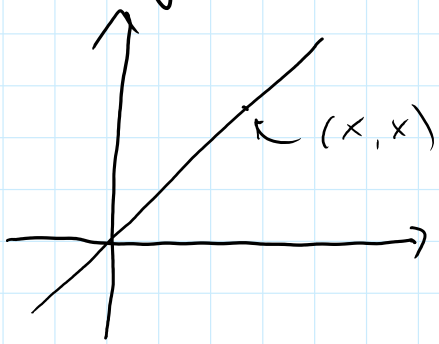
$\log_a x$

$0 < a < 1$

Oss: $a > 0$, $a \neq 1$

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Es: $f(x) = x \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$



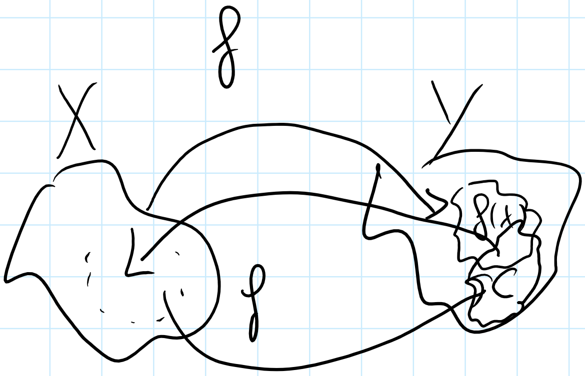
funzione identità

Ricordiamo che se $f : X \to Y$

$y = f(x)$ si dice immagine di x tramite f

$$f(X) = \{ f(x) : x \in X \} \quad \text{immagine di } f$$

($\mathrm{im}\, f$)



def: dato un insieme $C \subseteq Y$ si dice controimmagine o immagine inversa di C tramite $f : X \to Y$

$$f^{-1}(C) = \{ x \in X : f(x) \in C \} \subseteq X$$

Oss: $x_1 \in f^{-1}(C)$, $f(x_1) \in C$.

Oss: $x_1 \in f^{-1}(C)$, $f(x_1) \in C$.

Oss. $f^{-1}(C)$ non deve essere confusa $\frac{1}{f}$

Es. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$

$f(1) = a \qquad f(2) = d \qquad f(3) = d$

$f^{-1}(\{d\}) = \{2, 3\}$, $f^{-1}(\{a, b, d\}) = \{1, 2, 3\}$

$f^{-1}(\{b, c\}) = \emptyset$

Funzione composta

Es. Sia $h(x) = \log_2(x^2 - 1)$, $X = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

h può essere vista come la "composizione" di due funzioni

$$x \xmapsto{f} x^2 - 1$$

$$y \xmapsto{g} \log_2 y$$

Cosa succede se calcolo la funzione g in $f(x)$?

$$g(f(x)) = \log_2(x^2 - 1)$$

def: date due funzioni $f: X \to Y$, $g: V \to W$ se $f(X) \cap V \neq \emptyset$, allora si definisce la funzione $h: \bar{X} \to W$ come

$$h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x) \quad \forall x \in \bar{X}$$

ove $\bar{X} = \{x \in X : f(x) \in V\}$

[se $f(X) \cap V \neq \emptyset$, allora anche $\bar{X} \neq \emptyset$]

<u>Oss</u>: la composizione <u>non</u> è <u>commutativa</u>

$$f \circ g \neq g \circ f$$

<u>Es</u>:

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f(x) = \log_2 (x^2 - 1) \\ f \circ g(x) = (\log_2 x)^2 - 1 \end{array}\right\rangle \neq$$

<u>Oss</u>: la composizione è associativa

$$(f \circ g) \circ h(x) = f(g(h(x))) = f \circ (g \circ h)(x)$$
$$= f \circ g \circ h(x)$$

Funzione iniettiva

<u>Def</u>: una funzione $f : X \to Y$ si dice <u>iniettiva</u> se

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

[se $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$]

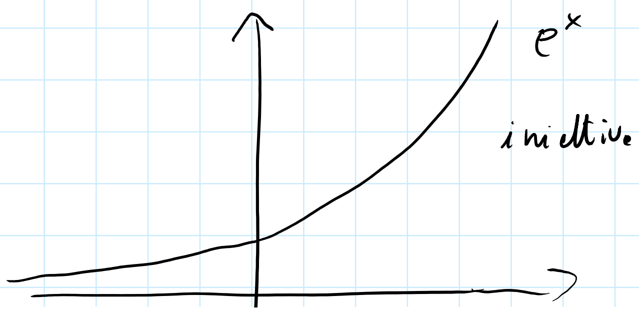
<u>Conseguenza</u>: Se $f : X \to Y$ iniettiva, $y \in Y$. Allora l'eq.

$$y = f(x)$$

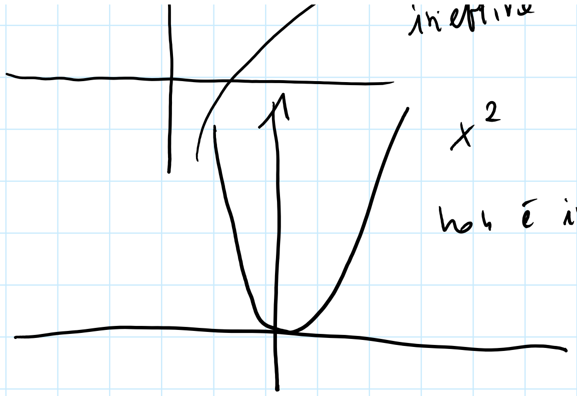
ha al più una soluzione.

<u>Oss</u>: se f è iniettiva, dom f e im f sono in corrispondenza biunivoca

<u>Es</u>

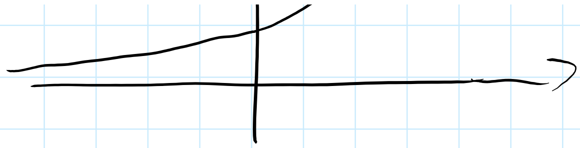


iniettiva

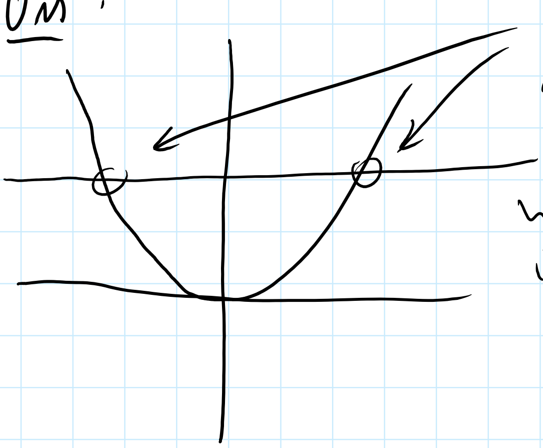


x^2

non è iniettivo



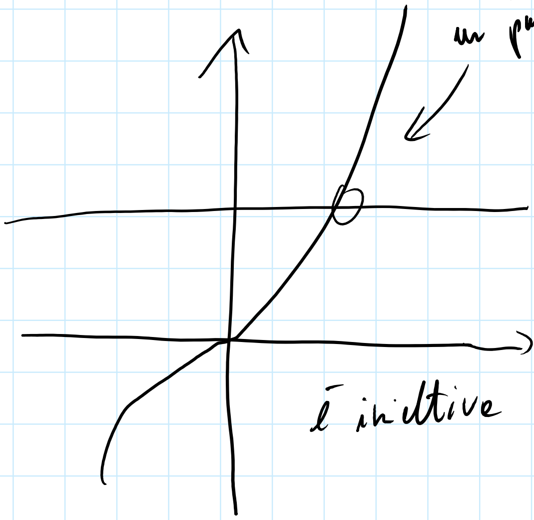
<u>Oss</u>:



due punti distinti

$\Downarrow$

non è iniettiva



al più un punto

è iniettiva

<u>Funzione inversa</u>

Se $f : X \to Y$ è iniettiva, se $y \in \mathrm{im} f$ l'eq.

$$y = f(x)$$

nella variabile x ha una e una sola soluzione

In altri termini l'insieme $f^{-1}(\{y\})$ ha esattamente un unico elemento

<u>def</u>: se $f : X \to Y$ è iniettiva, si definisce la funzione inversa $f^{-1} : \mathrm{im} f \longrightarrow \mathrm{dom} f$ che agisce come segue:

dato $y \in \mathrm{im} f$, $f^{-1}(y)$ è l'unico elemento $x \in \mathrm{dom} f$ t.c. $y = f(x)$

$\dots$ dom g t.c. $y = f(x)$

Oss: $(f^{-1})^{-1} = f$, $f \circ f^{-1} = id_{\mathrm{im} f}$

$f^{-1} \circ f = id_{\mathrm{dom} f}$

f^{-1} è biiezione tra $\mathrm{dom} f^{-1} = \mathrm{im} f$ e $\mathrm{im} f^{-1} = \mathrm{dom} f$

$\rightarrow$ iniezione

$\rightarrow$ suriezione

[$f : X \to Y$ è suriettiva su Y se $\forall y \in Y$
$\exists\, x \in X$ t.c. $f(x) = y$]

Es: $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$f(1) = 5$, $f(2) = 6$, $f(3) = 8$, $f(4) = 9$

f è iniettiva, $\mathrm{im} f = \{5, 6, 8, 9\}$

$f^{-1} : \{5, 6, 8, 9\} \to \{1, 2, 3, 4\}$

$f^{-1}(5) = 1$, $f^{-1}(6) = 2$, $f^{-1}(9) = 4$, $f^{-1}(8) = 3$

$f \circ f^{-1}(5) = f(1) = 5$

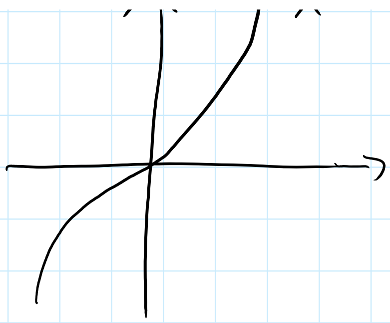
Es: $\log_e$ e $\exp_e$ sono iniettive e sono una l'inversa dell'altra

($\Rightarrow \exp_e \log_e x = x \quad \forall x > 0$, $\log_a a^y = y$
$\forall y \in \mathbb{R}$)

Es Calcolare l'inversa $x \longmapsto x^3$?

x^3

dom $= \mathbb{R}$



dom $= \mathbb{R}$

im $= \mathbb{R}$

Chiamo la funzione inversa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & y < 0 \end{cases}$$

$$\left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y \quad \forall y \geq 0$$

φ è l'inversa (verifica)

Se definisco

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

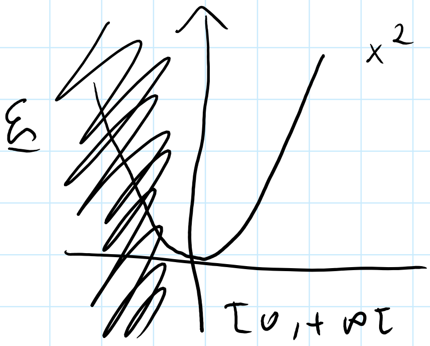
$$\varphi(y) = \operatorname{sgn}(y) \sqrt[3]{|y|} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Oss: Se considero $x \longmapsto x^2$ su tutto $\mathbb{R}$ esso non è iniettivo.
Se invece considero i valori di $x \geq 0$, allora è iniettiva

def: data $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, si dice restrizione di f ad A e si indica $f|_A$ la funzione

$$f|_A : A \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f|_A(x) = f(x)$$

$$x \longmapsto f_{|A}(x) = f(x)$$



$x \longmapsto x^2$ si restringe su $\mathbb{R}^{\geq 0}$ ed una funzione iniettiva

$$f(x) = x^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\left(f_{|\mathbb{R}^{\geq 0}}\right)^{-1}(y) = \sqrt{y} \qquad \forall\, y \geq 0$$

Funzioni di una variabile reale

Operazioni con le funzioni

Date due funzioni f, g definite in un insieme X definiamo la funzione somma di f e g

$$f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

Definiamo la funzione prodotto di f e g

$$f \cdot g \quad X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f \cdot g)(x) = (f(x))(g(x))$$

Per definire la funzione rapporto di f e g dobbiamo introdurre l'insieme

$$X_0 = \{ x \in X : g(x) \neq 0 \}$$

$$\frac{f}{g} : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{f}{g} : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

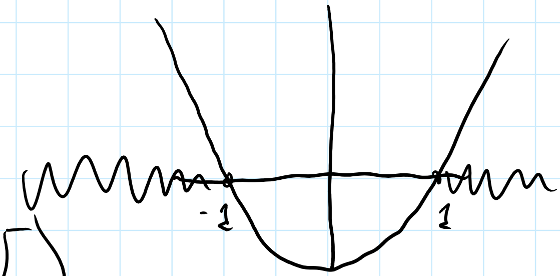
Dominio naturale

Quando trattiamo una funzione di variabile reale di cui è assegnata la legge ma non il dominio chiamiamo dominio naturale il più grande sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ nei cui elementi posso calcolare f, ossia f è ben definita

Es: $\sqrt{x^2-1}$

Devo considerare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x^2 - 1 \geq 0$$



ossia

$$x \in \underbrace{\left(\mathbb{R} \setminus \left]-1,1\right[\right)}_{\text{dominio naturale di } \sqrt{x^2-1}}$$

Oss: Ci si riferisce al dominio naturale di f chiamandolo spesso solamente dominio

Modulo di una funzione

Data $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo $|f| : X \longrightarrow \mathbb{R}$

(modulo di f)

$$|f|(x) = |f(x)| \quad \forall\, x \in X$$

<u>Oss</u>: $\mathrm{im}\,|f| \subseteq [0,+\infty[$

<u>Parte positiva e parte negativa di f</u>

Data $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, definiamo la parte positiva di f (f_+) e la parte negativa di f (f_-) come segue

$$f_+ : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f_- : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) > 0 \end{cases}$$

Ovviamente $f_+(x), f_-(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$

Si pone anche

$$x_+ = (id_{\mathbb{R}})_+(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$x_- = (id_{\mathbb{R}})_-(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

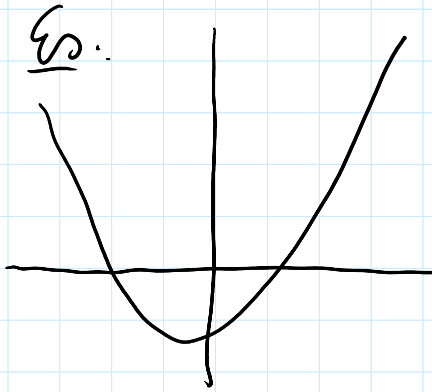
<u>Es</u>: $x = 5$

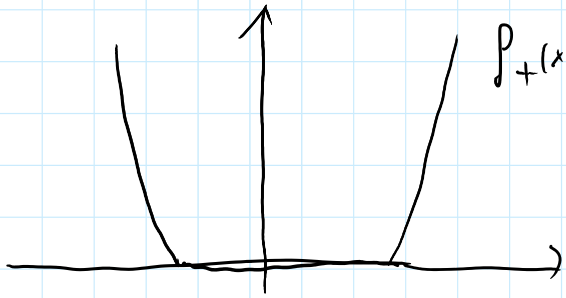
$x_+ = 5 \quad , x_- = 0$

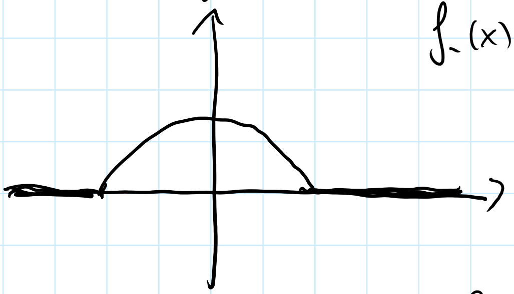
$x = -3$

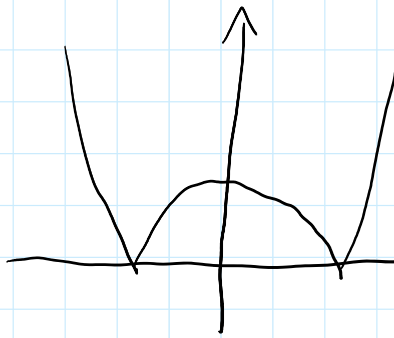
$x_- = 3 \quad , x_+ = 0$

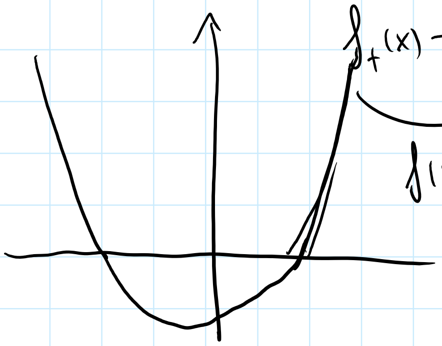
Es.:







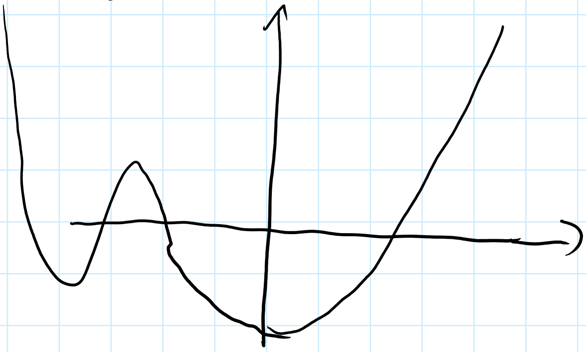




Oss: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Posso definire $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Funzioni simmetriche

def: • f è simmetrica rispetto all'origine o dispari se

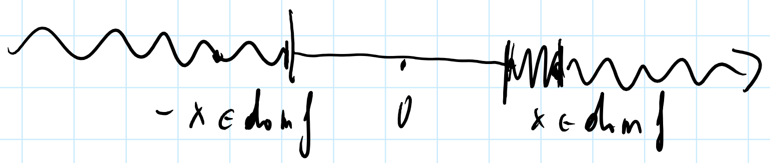
$$f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} f$$

• f è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate o pari se

$$f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} f$$

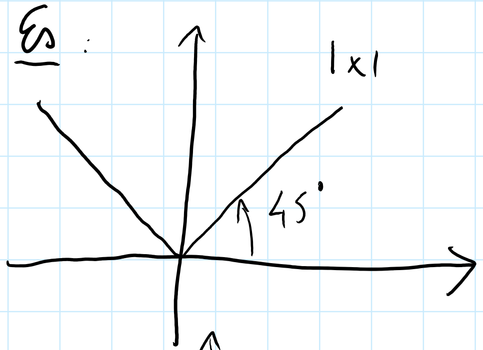
[in entrambi i casi $\operatorname{dom} f$ è simmetrico rispetto all'origine

$$-x \in \operatorname{dom} f \quad \forall\, x \in \operatorname{dom} f$$



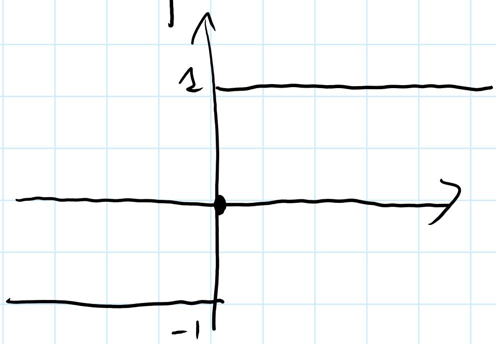
]

Es:



$$|-x| = |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

pari



$$x \longmapsto \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

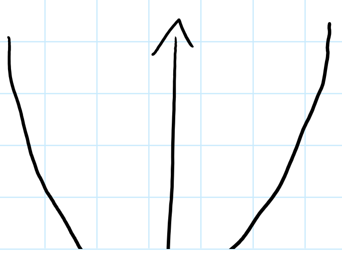
$$\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

dispari

• $n \in \mathbb{N}$

pari

$$x \longmapsto x^{2n}$$

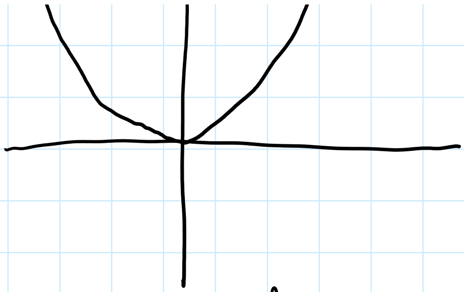


la funzione è pari

dispari

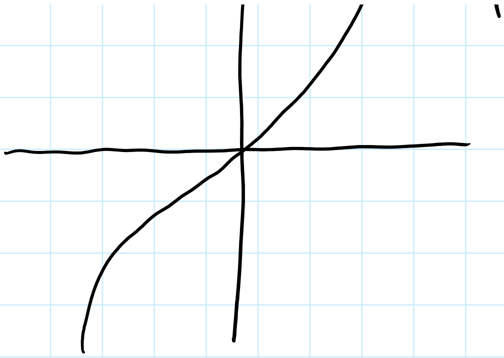
$$x \longmapsto x^{2n+1}$$

la funzione è dispari



$$(-x)^{2n} = (-1)^{2n} x^{2n} = x^{2n}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$



$$(-x)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} x^{2n+1} = -x^{2n+1}$$

Funzioni monotone

- Una funzione f di dominio D si dice <u>monotona crescente</u> se

$$x_1, x_2 \in D \quad x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$$

- si dice <u>strettamente crescente</u> se vale la disuguaglianza stretta, cioè

$$x_1, x_2 \in D \quad x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

[le disuguaglianze devono valere per ogni coppia $x_1, x_2 \in D$]

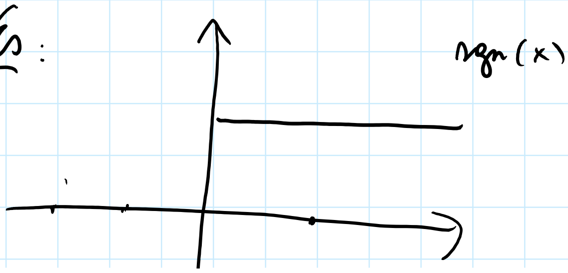
- funzione f di dominio D è <u>monotona decrescente</u>

$$x_1, x_2 \in D \, , \; x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1)$$

- si dice <u>strettamente decrescente</u> se

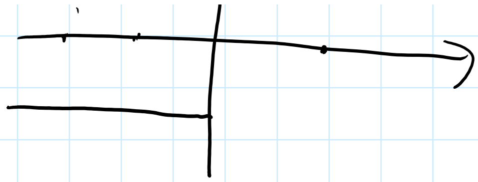
$$x_1, x_2 \in D \, , \; x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$$

Es:



$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \, , \; x_2 > x_1$$

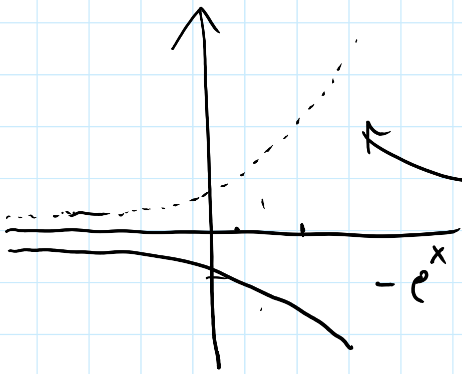
$$\mathrm{sgn}(x_2) \geq \mathrm{sgn}(x_1)$$



$sgn(x_2) \geq sgn(x_1)$

$\Rightarrow$ monotone crescente

ma non strettamente crescente



e^x strettamente crescente

$-e^x$ strettamente decrescente

· non è monotona

· $f(x) = 6 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

monotona crescente: sì (ma non strett. cresc.)

monotone decrescente: sì (ma non strett. decresc.)

· <u>Funzioni potenze</u>

$x \longmapsto x^k, \; k \in \mathbb{N}, \; k \neq 0$

- k pari: non è monotone
  - $x^k|_{\mathbb{R}^{\geq 0}}$: strettamente crescente
  - $x^k|_{\mathbb{R}^{\leq 0}}$: strettamente decrescente
- k dispari: strettamente crescente

· <u>Esponenziali e logaritmi</u>

- $a > 1$: $\exp_a$ e $\log_a$ strettamente crescente
- $0 < a < 1$: $\exp_a$ e $\log_a$ strettamente decrescente

<u>Oss</u>: l'inversa di una funzione monotona è monotona

<u>Funzioni periodiche</u>

Funzioni periodiche

- Es: $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

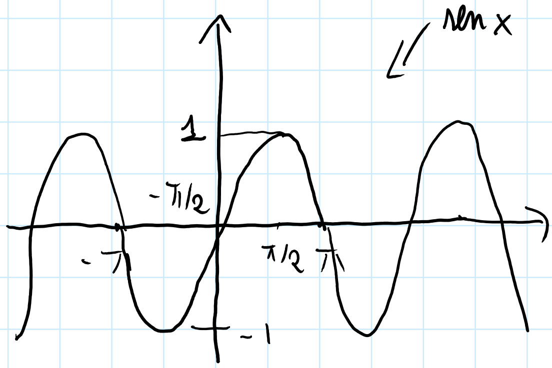
def: una funzione di dominio D si dice periodica se $\exists\, T>0$ t.c.

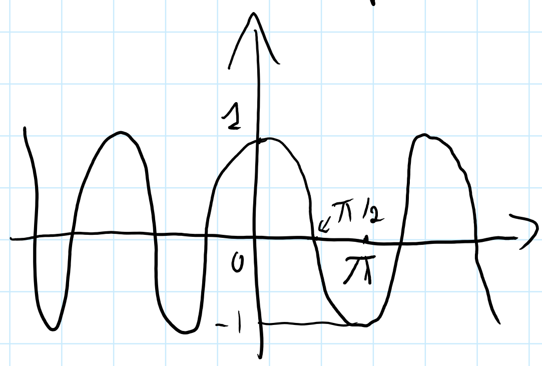
1) $x+T \in \operatorname{dom} f = D \quad \forall x \in D$

2) $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D$

Il più piccolo $T>0$ per cui 2) succede, è detto periodo principale (o semplicemente periodo)

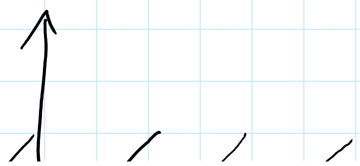
Esempi:
- $x \longmapsto \operatorname{sen}(x)$ periodica, periodo 2π
- $x \longmapsto \cos(x)$ periodica, periodo 2π



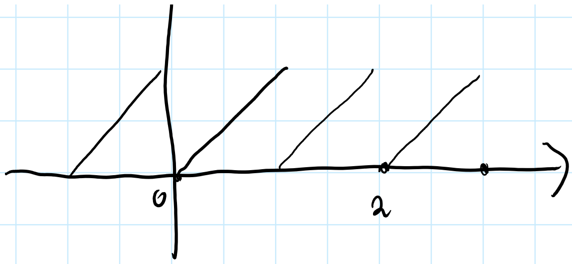


- funzione mantissa: $x \longmapsto (x) = x - [x]$

parte intera



parte intera



periodo 1

- tg, cotg periodiche di periodo π
  ↳ $\frac{\text{sen}}{\cos}$ ↳ $\frac{\cos}{\text{sen}}$

- $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ sen dispari
- $\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ cos pari
- tg, cotg sono dispari

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}, \quad \text{tg}(-x) = \frac{\text{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\text{sen}(x)}{\cos(x)} = -\text{tg}\, x$$

<u>Oss</u>: Se f è periodica, è sufficiente conoscerla in un intervallo di periodicità

$$f(x+kT) = f(\underbrace{x+(k-1)T} + T) = f(x+(k-1)T) = f(x) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

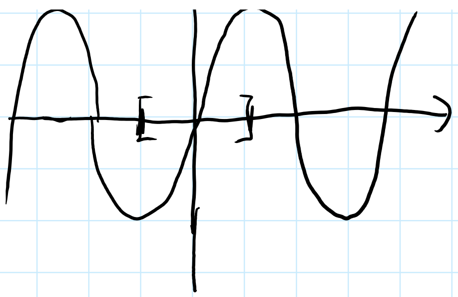
<u>Funzioni trigonometriche inverse</u>

Se f è periodica, f non può essere iniettiva.

Se restringiamo f ad un intervallo I in cui è iniettiva, allora posso invertire $f_{|I}$

Quali I vanno bene?

$I = [-\pi, 2\pi]$ NO



$I = [-\pi, 2\pi]$ NO

$I = [-\pi, \pi]$ NO

$I = [-\pi/4, \pi/4]$ SI, ma posso fare di meglio

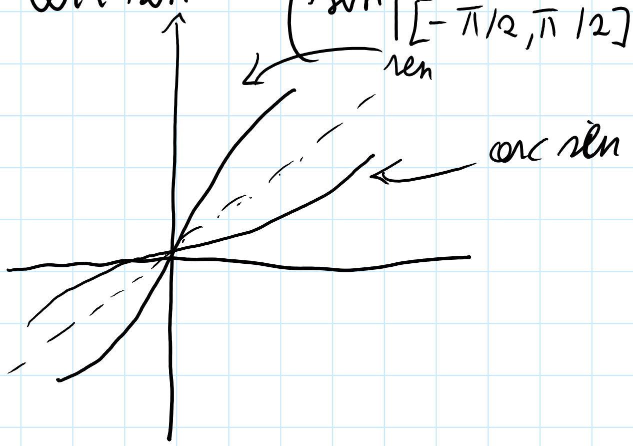
Prendo $I = [-\pi/2, \pi/2]$

Ho: $\operatorname{sen}|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ è iniettiva

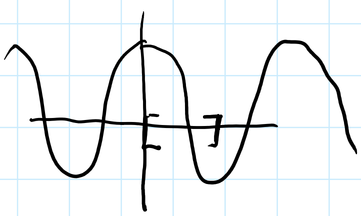
$$\operatorname{im}\left(\operatorname{sen}|_{[-\pi/2, \pi/2]}\right) = [-1, 1]$$

$\operatorname{sen}|_{[-\pi/2, \pi/2]}$ è invertibile e chiamo la sua funzione inversa arcsen

$$\operatorname{arcsen} = \left(\operatorname{sen}|_{[-\pi/2, \pi/2]}\right)^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$



Per definire l'inversa del coseno (arccos), restringo il coseno nell'intervallo $[0, \pi]$



$\cos|_{[0,\pi]}$ è iniettiva

$$\operatorname{im}\left(\cos|_{[0,\pi]}\right) = [-1, 1]$$

$$\operatorname{im}\left(\cos|_{[0,\pi]}\right) = [-1,1]$$

Posso invertire $\cos|_{[0,\pi]}$

$$\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

Per definire l'arctan, si osserva che $\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}$ è strettamente crescente e ha come immagine $\mathbb{R}$

$$\arctan = \left(\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2,\pi/2[$$

Per arcctan, si veda il testo

<u>Funzioni iperboliche</u>

Ricordo che

$$(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$

$$\left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Esistono funzioni h, l t.c.

$$\left(h(x)\right)^2 - \left(\ell(x)\right)^2 = 1$$

Definiamo

$$\text{senh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{seno iperbolico})$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{coseno iperbolico})$$

$$\tanh x = \frac{\text{senh}\, x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(tangente iperbolica)

$$\text{cth}\, x = \frac{\cosh x}{\text{senh}\, x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \forall x \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\mathbb{R}^*}$$

(cotangente iperbolica)

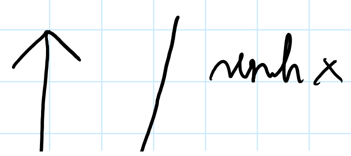
Si verifica che

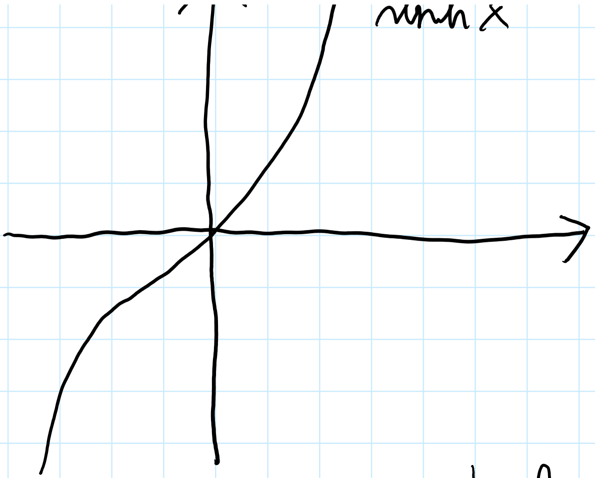
$$(\cosh x)^2 - (\text{senh}\, x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

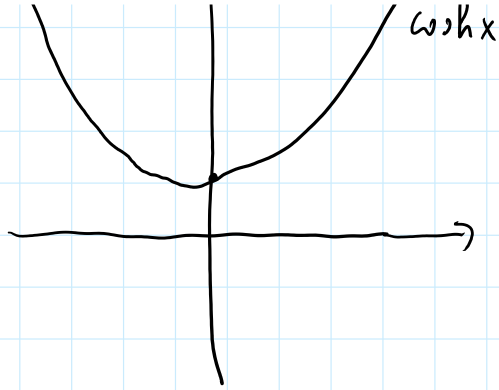
<u>Proprietà di simmetria delle funzioni iperboliche</u>

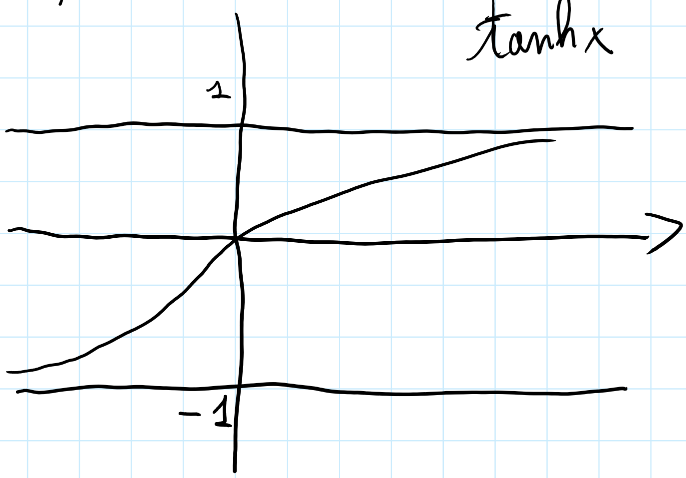
$$\text{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{senh}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

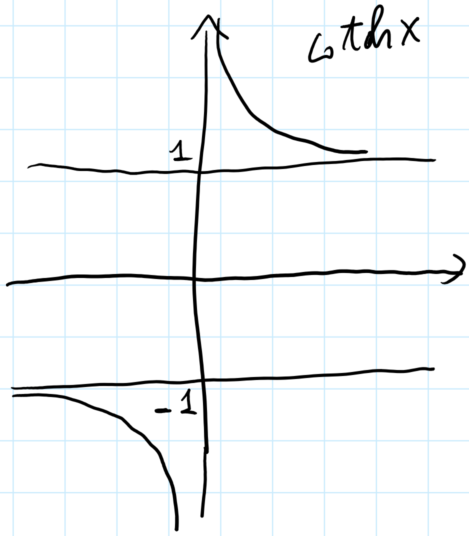
$$\cosh(-x) = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$











Inversione delle funzioni iperboliche

Proviamo a invertire il cosh. Devo restringere il cosh ad un insieme su cui è iniettivo

Considero

$$\cosh|_{[0,+\infty[}$$

- è iniettivo
- $\operatorname{im}\left(\cosh|_{[0,+\infty[}\right) = [1,+\infty[$

Per ogni $y \in [1,+\infty[$, devo determinare $x \in [0,+\infty[$ t.c.

$$\cosh x = y$$

cioè

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

ossia

$$e^x + e^{-x} - 2y = 0$$

Moltiplicando per e^x ottengo

$$(e^x)^2 - 2y\,e^x + 1 = 0$$

da cui

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Se $y > 1$, allora $y - \sqrt{y^2-1} < 1$, e

$e^x = y - \sqrt{y^2 - 1}$ ha un'unica soluzione

$x < 0$ (devo escluderla)

Se $y = 1$

$$y + \sqrt{y^2-1} = y - \sqrt{y^2 - 1} = 1$$

e l'unico x tale che $e^x = 1$ è 0

Dobbiamo

quindi

quindi trovare $x \in]0,+\infty[$

tale che

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}$$

Tale x è

$$x = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) \quad \forall\, y \in [1,+\infty[$$

Similmente

$\Longrightarrow$ $\text{sett}\cosh y = \ln\big($

$$\text{sett}\,\text{senh}\, y = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Funzioni limitate

def: D insieme, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

- f si dice limitata se

$$\text{im} f = \{f(x) : x \in D\}$$

è un insieme limitato

- f si dice <u>superiormente limitata</u> se $\text{im} f$ è un insieme superiormente limitato
- f si dice <u>inferiormente limitata</u> se

im f è un insieme inferiormente limitato

- Es: $f(x) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{im} f = [-1,1] \Rightarrow f$ è limitata

$f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{im} f =]0, +\infty[\Rightarrow f$ è inf. limitata, è sup. illimitata

$f(x) = 1 - x^4, \forall x \in \mathbb{R}$?

def: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{estremo superiore}}}{\sup f} = \sup(\operatorname{im} f)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{estremo inferiore}}}{\inf f} = \inf(\operatorname{im} f)$$

- massimo di f

$$\max f = \max(\operatorname{im} f) \qquad \text{(se esiste)}$$

- minimo di f

$$\min f = \min(\operatorname{im} f) \qquad \text{(se esiste)}$$

- Se $f(x_m) = \min f$, $x_m \in D$, allora x_m si dice punto di minimo per f
- Se $f(x_M) = \max f$, $x_M \in D$, allora x_M

si dice <u>punto di massimo</u> per f

- Punti di massimo e minimo si dicono punti di estremo per f (o estremanti)

<u>Es</u>: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{im} f = [-1,1]$, $\min f = -1$, $\max f = 1$

punti di minimo sono $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

<u>def</u>: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq D$ non vuoto

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in A \}$$

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf \{ f(x) : x \in A \}$$

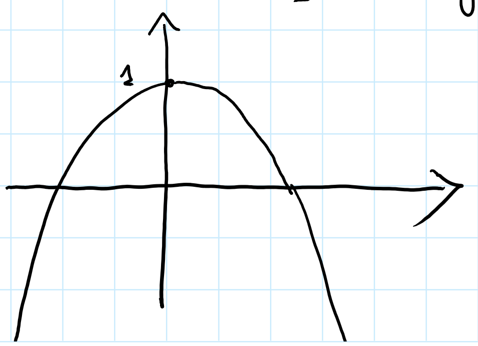
e se esistono

$$\max_{x \in A} f(x) = \max \{ f(x) : x \in A \}$$

$$\min_{x \in A} f(x) = \min \{ f(x) : x \in A \}$$

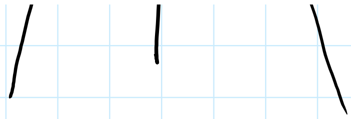
<u>Es</u>: $f(x) = 1 - x^4$

$A =]0,1]$ $\qquad f(A) = [0, 1[$



$$\sup_{x \in A} f(x) = 1$$

$$\inf_{x \in A} f(x) = 0$$



$$\inf_{x \in A} f(x) = 0$$

$$0 = \min_{x \in A} f(x)$$