Esercizi sulle funzioni

mercoledì 10 ottobre 2018 21:28

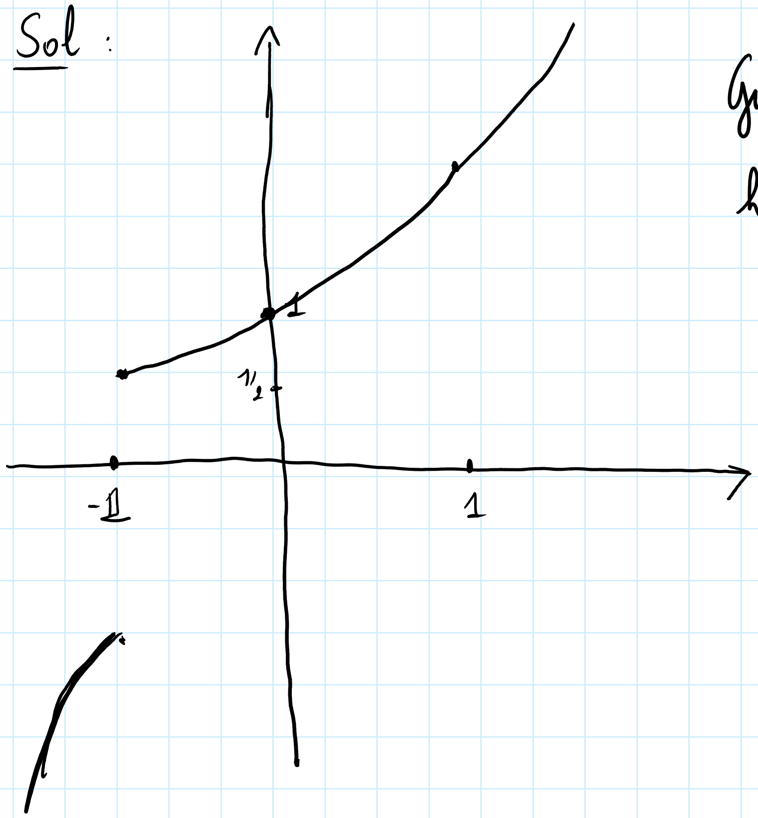
Esercizio: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in \,]-\infty, -1[\\ 2^x & \text{se } x \in [-1, 1[\\ 2x^2 & \text{se } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Si chiede di

1) tracciarne il grafico
2) provare che f è iniettiva
3) trovare $f(\mathbb{R})$
4) trovare l'inversa

Sol:



Guardando il grafico ho che la funzione è iniettiva

Vedere che la funzione è strettamente crescente

Quale è $f(\mathbb{R})$?

$f(]-\infty,-1[) =]-\infty,-1[$, $f([-1,1[) = [\frac{1}{2}, 2[$

$f([1,+\infty[) = [2,+\infty[$

$$f(\mathbb{R}) =]-\infty,-1[\cup [1/2, 2[\cup [2,+\infty[$$
$$=]-\infty,-1[\cup [1/2,+\infty[$$
$$= \mathbb{R} \setminus [-1, 1/2[$$

f è strettamente crescente ($\Rightarrow$ iniettiva) e

$\operatorname{im} f = \mathbb{R} \setminus [-1, 1/2[$

Posso considerare $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus [-1, 1/2[\to \mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt[3]{-y} & y \in]-\infty,-1[\\ \log_2 y & y \in [1/2, 2[\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y} & [2,+\infty[\end{cases}$$

Oss: $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{2}y\right) = y$

Oss: f, g invertibili

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

(Es: $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ ...)

Es: Inverti la funzione $f(x) = \ln(2^x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$

Sol: $f(x) = h \circ g(x)$

$$h(z) = \ln(z) \qquad g(x) = 2^x + 3$$

Di conseguenza

$$f^{-1}(y) = g^{-1} \circ h^{-1}(y)$$

$$h^{-1}(x) = e^x$$

$$g^{-1}(x) = \log_2(x - 3)$$

$$f^{-1}(y) = \log_2(e^y - 3)$$

Dove posso fare l'inversione?

$$y \in \operatorname{im} f =]\ln 3, +\infty[$$

e quindi $\operatorname{dom} f^{-1} =]\ln 3, +\infty[$

Oss: Osservo che

$$\operatorname{graf} f^{-1} = \{ (y, f^{-1}(y)) \quad y \in \operatorname{im} f = \operatorname{dom} f^{-1} \}$$

è il simmetrico del graf f rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° quadrante

Esercizio Determinare il dominio naturale di

$$f(x) = \arccos\left(|x^2-4| - 2x\right)$$

Sol: dom arccos $= [-1,1]$

Trovare gli $x \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\underbrace{-1 \leq \overbrace{|x^2-4| - 2x \leq 1}^{\text{II)}}}_{\text{I)}}$$

I) $|x^2-4| - 2x \geq -1$

cioè $|x^2-4| \geq 2x-1$

Se $2x-1 \leq 0$, I) vale sempre (cioè se

$x \leq 1/2$)

Supp. $x > 1/2$ e considero

$$|x^2 - 4| \geq 2x - 1$$

Le soluzioni sono date dall' <u>unione</u> delle soluzioni di

a) $x^2 - 4 \geq 2x - 1$

e

b) $x^2 - 4 \leq -(2x-1)$

(da intersecare poi con $x > 1/2$)

a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x \geq 3$ o $x \leq -1$

b) $x^2 + 2x - 5 \leq 0$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+5} \begin{cases} -1-\sqrt{6} \\ -1+\sqrt{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow -1-\sqrt{6} \leq x \leq -1+\sqrt{6}$

a) $\cap \{x > 1/2\} = \{x : x \geq 3\}$

b) $\cap \{x > 1/2\} = \{x : \frac{1}{2} < x \leq -1+\sqrt{6}\}$

Quindi I) vale se e solo se

$x \geq 3$ o $x \leq -1+\sqrt{6}$

II) $|x^2 - 4| \leq 1 + 2x$

II) $|x^2-4| \le 1+2x$

Devo escludere $1+2x<0$, cioè $x<-1/2$

Suppongo $x \geq -1/2$ e considero

$$-(1+2x) \le \overbrace{x^2-4 \le 1+2x}^{d}$$

$$\underbrace{-(1+2x) \le x^2-4}_{c)}$$

Le soluzioni della "catena" di disug. sono l'intersezione delle sol. delle due disequazioni

c) $x^2+2x-3 \geq 0$ se e solo se

$x \le -3$ o $x \geq 1$

d) $x^2-2x-5 \le 0$ se e solo se

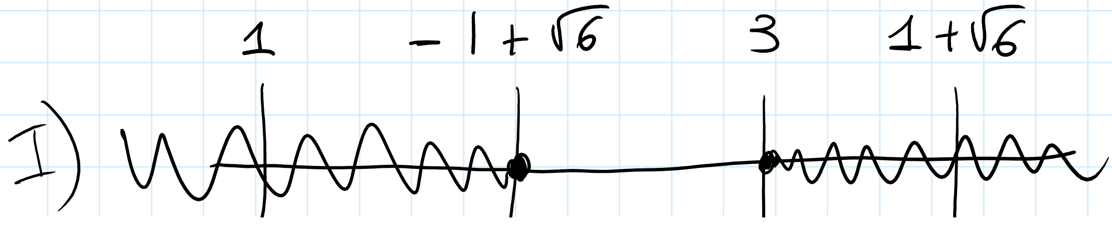
$1-\sqrt{6} \le x \le 1+\sqrt{6}$

c) $\cap \; \{x \geq -1/2\} \Rightarrow x \geq 1$

d) $\cap \; \{x \geq -1/2\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 1+\sqrt{6}$

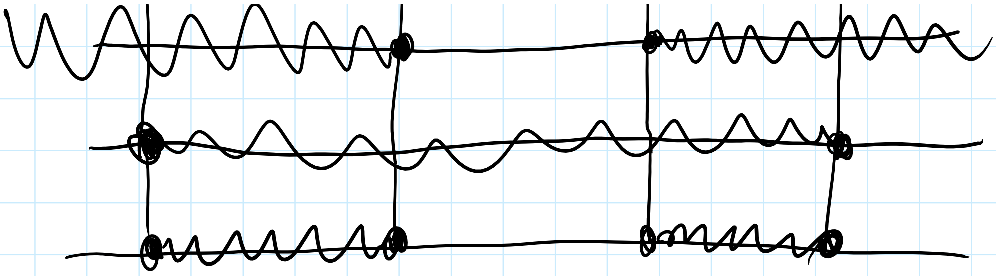
II) vale se $1 \le x \le 1+\sqrt{6}$

Le soluzioni della disuguaglianza iniziale



I)

II)



$[1, -1+\sqrt{6}]$ $[3, 1+\sqrt{6}]$

Esercizi sul dominio naturale

giovedì 18 ottobre 2018 12:03

Esercizio: Determinare il dominio (naturale) delle seguenti funzioni

1) $f(x) = \arccos(|x^2-4| - 2x)$ ← SVOLTO A LEZIONE

2) $g(x) = \ln[\cosh(2x) - 3]$ ← NON SVOLTI A LEZIONE

3) $h(x) = \dfrac{\sqrt{2(\cos x - \operatorname{sen} x) - 1}}{x-1}$ ←

Soluzione:

1) Osservo che dom arccos $= [-1,1]$, quindi la funzione f è definita se e solo se

$$(|x^2-4| - 2x) \in [-1,1]$$

cioè se e solo se

$$\underbrace{-1 \leq \overbrace{|x^2-4| - 2x \leq 1}^{II)}}_{I)} \qquad (1)$$

Osservo che la "catena" di disuguaglianze (1) vale se e solo se valgono simultaneamente le disuguaglianze I) e II)

Provo a risolvere I) e II) una alla volta

- Considero I) e osservo che

$$|x^2-4| - 2x \geq -1$$

se e solo se

$$|x^2 - 4| \geq -1 + 2x \qquad (2)$$

Se $2x - 1 \leq 0$ allora (2) è vera. Di conseguenza se $x \leq 1/2$ allora I) è verificata

Suppongo che $x > 1/2$ e cerco di capire per quali x vale (2)

Osservo che vale (2) se

$$x^2 - 4 \geq 2x - 1 \qquad (a)$$

oppure

$$x^2 - 4 \leq -(2x - 1) \qquad (b)$$

Considero (a). Devo trovare gli x tali che

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

Le radici sono $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right.$

Quindi (a) vale se $x \leq -1$ oppure $x \geq 3$

Considero (b). Devo trovare gli x tali che

$$x^2 + 2x - 5 \leq 0$$

Le radici sono $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+5} \left\langle \begin{matrix} -1-\sqrt{6} \\ -1+\sqrt{6} \end{matrix} \right.$

Quindi (b) vale se e solo se $-1-\sqrt{6} \leq x \leq 1+\sqrt{6}$

Devo ricordarmi che ho supposto $x > 1/2$.
Devo quindi "intersecare" le soluzioni di (a) e quelle di (b) con la condizione $x > 1/2$

Ottengo

a) $\cap \ x > 1/2 \implies x \geq 3$

b) $\cap \ x > 1/2 \implies 1/2 \leq x \leq -1+\sqrt{6}$

Di conseguenza, I) vale se e solo se x appartiene all'insieme

$$\{x : x \leq 1/2\} \cup \{x : x \geq 3\} \cup \{x : \tfrac{1}{2} \leq x \leq -1+\sqrt{6}\}$$

ossia

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \text{ oppure } x \leq -1+\sqrt{6}\}$$

Considero ora II). Devo risolvere

$$|x^2 - 4| \leq 1 + 2x$$

Osservo che se $1 + 2x < 0$, II) non è mai verificata

Posso quindi escludere $x < -1/2$ e concentrarmi sul caso $x \geq -1/2$.

Suppongo $x \geq -1/2$. Dobbiamo considerare

$$\underbrace{-(2x+1) \leq x^2 - 4}_{c} \leq 2x+1 \qquad (3)$$

$$\overbrace{x^2 - 4 \leq 2x+1}^{d}$$

Per trovare gli x tali che le disuguaglianze (3) valga, devo trovare gli x tali che valgono contemporaneamente (c) e (d).

Considero (c). Devo risolvere

$$x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

$$x^2+2x-3\geq 0$$

Le radici sono $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3} \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

Quindi (c) vale se e solo se $x\leq -3$ oppure $x\geq 1$.

Considero (d) e risolvo

$$x^2-2x-5\leq 0$$

Le radici sono $x_{1,2}=1\pm\sqrt{6} \begin{cases} 1-\sqrt{6} \\ 1+\sqrt{6} \end{cases}$

Quindi (d) vale se e solo se $1-\sqrt{6}\leq x\leq 1+\sqrt{6}$

Intersecando sia (c) che (d) con la condizione $x\geq -1/2$ ottengo

$$(c)\cap\{x\geq -1/2\} \Rightarrow x\geq 1$$

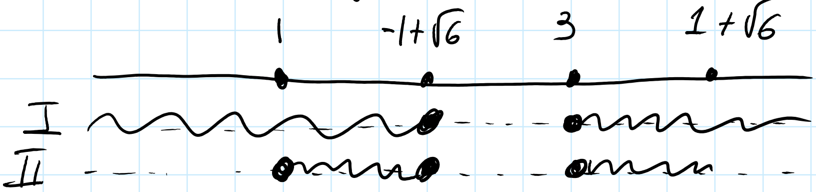
$$(d)\cap\{x\geq -1/2\} \Rightarrow -1/2\leq x\leq 1+\sqrt{6}$$

Per valere II) devono valere <u>entrambe</u> le condizioni

$$x\geq 1 \quad e \quad -1/2\leq x\leq 1+\sqrt{6}$$

e quindi II) vale se e solo se $1\leq x\leq 1+\sqrt{6}$

Per concludere, devo capire quando I) e II) sono entrambe verificate



Di conseguenza I e II sono entrambe verificate quando x appartiene all'insieme

$$[1, -1+\sqrt{6}] \cup [3, 1+\sqrt{6}]$$

(che risulta essere il dominio di f)

2) Dobbiamo ora trovare il dominio di

$$g(x) = \ln\left(\cosh(4x) - 3\right)$$

Osservo che il dominio è l'insieme

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \cosh(4x) - 3 > 0 \right\}$$

Ricordo che $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e quindi

$$\cosh(4x) - 3 > 0$$

se e solo se

$$e^{4x} + e^{-4x} > 6$$

Moltiplico tutto per e^{4x} e ottengo

$$\underbrace{\left(e^{4x}\right)^2}_{y^2} - 6\underbrace{e^{4x}}_{y} + 1 > 0$$

Chiamo $y = e^{4x}$ e cerco gli $y \in \mathbb{R}$ tali che

$$y^2 - 6y + 1 > 0$$

Le radici sono $y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-1} = 3 \pm \sqrt{8}$

Di conseguenza si deve avere

$$y < 3 - \sqrt{8} \quad \text{oppure} \quad y > 3 + \sqrt{8}$$

Ricordando che $y = e^{4x}$, devo trovare gli $x \in \mathbb{R}$ t.c.

$$e^{4x} < 3 - \sqrt{8} \quad \text{oppure} \quad e^{4x} > 3 + \sqrt{8}$$

$$e^{4x} < 3-\sqrt{8} \quad \text{oppure} \quad e^{4x} > 3+\sqrt{8}$$

ossia

$$4x < \ln\left(3-\sqrt{8}\right) \quad \text{oppure} \quad 4x > \ln\left(3+\sqrt{8}\right)$$

da cui

$$x < \frac{\ln\left(3-\sqrt{8}\right)}{4} \quad \text{oppure} \quad x > \frac{\ln\left(3+\sqrt{8}\right)}{4}$$

3) Determino ora il dominio di

$$h(x) = \frac{\sqrt{2(\cos x - \operatorname{sen} x) - 1}}{x-1}$$

Il dominio di h è l'insieme

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2(\cos x - \operatorname{sen} x) - 1 \geq 0 \right\} \cap \left\{ x \neq 1 \right\}$$

Mi concentro su $2(\cos x - \operatorname{sen} x) - 1 \geq 0$, cioè

$$\cos x - \operatorname{sen} x \geq 1/2$$

Posso pensare

$$\cos x - \operatorname{sen} x = A\left(\cos x \cos\alpha - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\alpha\right)$$

con A e α da determinare.

Per determinarli devo avere

$$\begin{cases} A\cos\alpha = 1 \\ A \operatorname{sen}\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A^2\cos^2\alpha = 1 \\ A^2\operatorname{sen}^2\alpha = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow A^2 = A^2\left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) = 2 \\ \Rightarrow A = \sqrt{2} \end{matrix}$$

Di conseguenza devo trovare α tale che

Di conseguenza devo trovare α tale che

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Posso quindi riscrivere

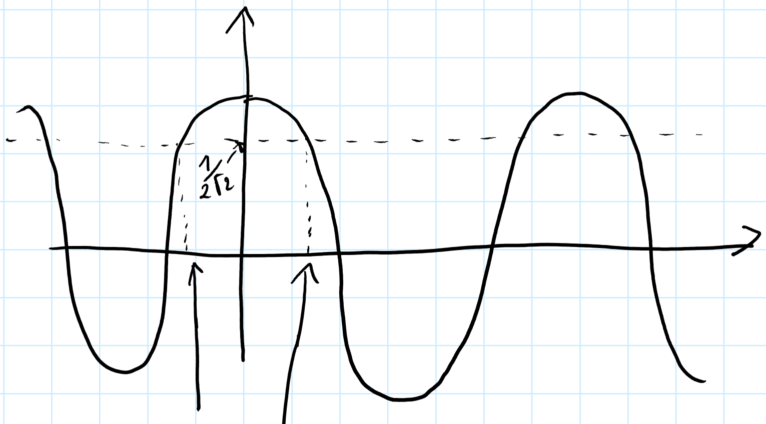
$$\cos x - \operatorname{sen} x = \sqrt{2}\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Devo quindi trovare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sqrt{2}\cos(x + \pi/4) \geq \frac{1}{2}$$

ossia

$$\cos(x + \pi/4) \geq 1/2\sqrt{2} \qquad (*)$$



Di conseguenza, $(*)$ vale se e solo se

$$2k\pi - \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

ed $\quad x \neq 1$

LUNEDÌ 22/10

Esercizio

Data la funzione definita da

$x \in [-1,1]$

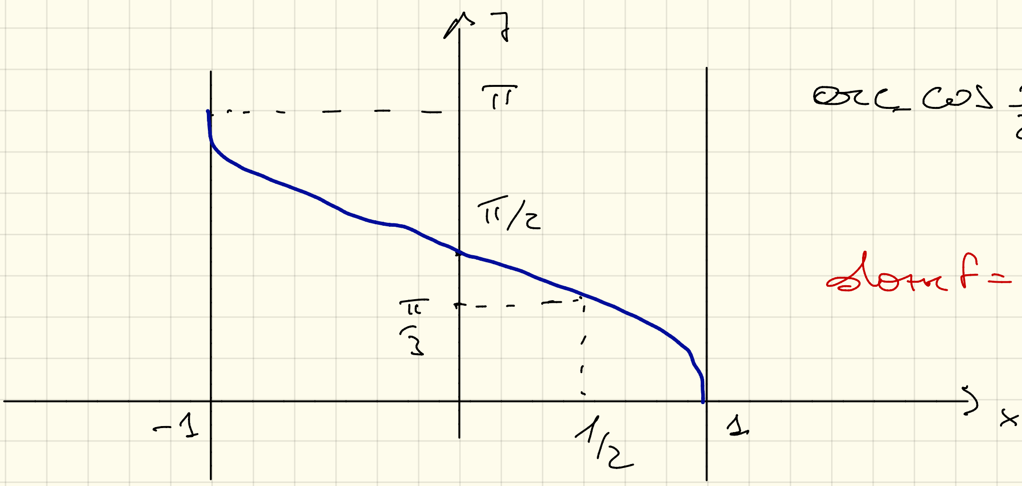
$$f(x) = \ln\left(\arccos x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$\to$ argomento > 0

determinarne il dominio naturale e studiarne l'invertibilità

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \arccos x - \frac{\pi}{3} > 0 \end{cases}$$

$$\arccos = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$ è strettamente decrescente



$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{dom} f = \left[-1, \frac{1}{2}\right[$$

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \arccos x > \frac{\pi}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -1 \le x < \frac{1}{2}$$

$f(x) = \ln\left(\arccos x - \frac{\pi}{3}\right)$

devo stabilire se f è iniettiva

$x \mapsto \arccos x$ è strettamente decrescente

$x \mapsto \arccos x - \frac{\pi}{3}$ è strettamente decrescente

$y \mapsto \ln y$ è strettamente crescente

$x \mapsto \ln\left(\arccos x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$ è strettamente decrescente

$x_1 < x_2$

$\arccos x_1 - \frac{\pi}{3} > \arccos x_2 - \frac{\pi}{3}$

$\ln\left(\arccos x_1 - \frac{\pi}{3}\right) > \ln\left(\arccos x_2 - \frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow f$ è invertibile.

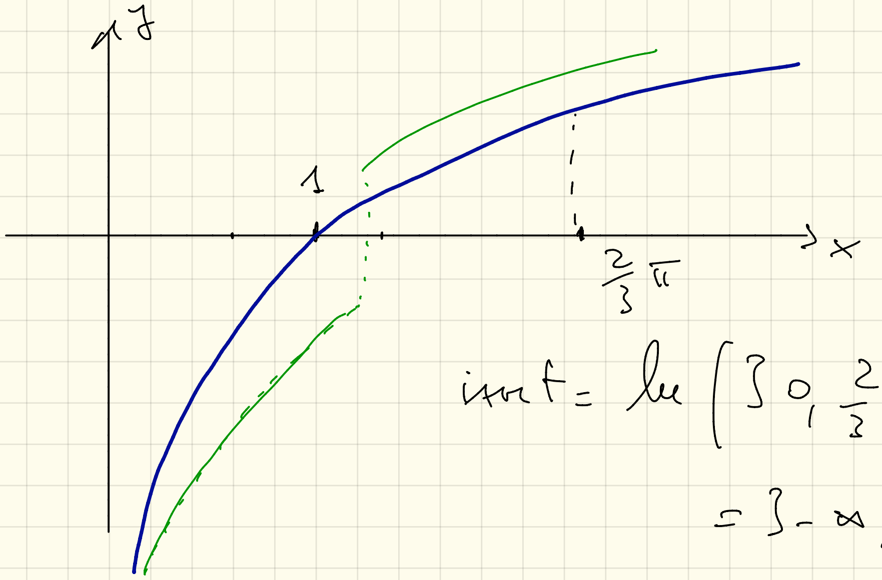
Calcoliamo f^{-1}

$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{im}\, f$

- $\mathrm{im}\left(\arccos\Big|_{[-1, \frac{1}{2}[}\right) = \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$\cdot \ \text{im}\left(\arccos x\Big|_{[-1,\frac{1}{2}[} - \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \left]\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}, \pi - \frac{\pi}{3}\right] = \left]0, \frac{2}{3}\pi\right]$



$\text{im} f = \ln\left(\left]0, \frac{2}{3}\pi\right]\right) =$

$= \left]-\infty, \ln\frac{2}{3}\pi\right] = \text{dom} f^{-1}$

Calcoliamo f^{-1}

Fissiamo $y \in \left]-\infty, \ln\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$

e cerchiamo $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right[$ tale che

$f(x) = y$

$\ln\left(\arccos x - \frac{\pi}{3}\right) = y$ (equazione in x da risolvere)

$\arccos x - \frac{\pi}{3} = e^y$

$$\arccos x = \frac{\pi}{3} + e^{y} \in [0, \pi]$$

perché

$$y \in \left]-\infty, \ln\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

$$\Uparrow$$

$$\left[-1, \frac{1}{2}\right[$$

$$\underbrace{\cos(\arccos x)}_{x} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + e^{y}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + e^{y}\right)$$

$$\left[\ \arccos\left(\cos \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{\pi}{2}. \qquad \arccos x \in [0, \pi]\ \right]$$