LIMITI
TEORIA

LUNEDÌ 22/10

Es.:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

Capire come si comporta f quando la variabile x assume valori sempre più vicini a 0

$f(x)$ tende ad assumere valori sempre più vicini a 1

Es.:

$$C(n) = c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Cosa succede quando n diventa sempre più grande, "si avvicina a $+\infty$"

C_n si avvicina sempre di più al numero di Nepero, e

Ingredienti

1) una funzione f, definita in un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, a valori reali

2) un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a cui ci si può "avvicinare" con elementi di $\mathrm{dom}\, f$

3) un altro punto $l \in \overline{\mathbb{R}}$ a cui "si avvicina" $f(x)$ quando x "si avvicina" ad x_0, cioè è il

valore a cui "$\underbrace{\text{si avvicina}}^{\text{tende}}$" $f(x)$
quando x "$\underbrace{\text{si avvicina}}_{\text{tende}}$" ad x_0

Topologia della retta reale

Definizione: sia $r \in \mathbb{R}$. Si dice intorno (sferico) di (centro) r un intervallo aperto di centro r e raggio $\varepsilon > 0$, $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$. ε è detto raggio dell'intorno

Se $r = +\infty$, un intorno di r è una qualsiasi semiretta $]M, +\infty[$, $M \in \mathbb{R}$

Se $r = -\infty$, un intorno di r è una qualsiasi semiretta $]-\infty, M[$, $M \in \mathbb{R}$

Proposizione: Siano I_1 e I_2 intorni di $r \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora $I_1 \cap I_2$ è intorno di r.

Dim.: $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq \pm\infty)$

- $\exists\, \varepsilon_1 > 0 \mid I_1 =]r-\varepsilon_1, r+\varepsilon_1[$
- $\exists\, \varepsilon_2 > 0 \mid I_2 =]r-\varepsilon_2, r+\varepsilon_2[$

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

$$]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\;\underset{\supseteq}{\overset{\subseteq}{=}}\; I_1 \cap I_2$$

- $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\subseteq I_1 \cap I_2$: dobbiamo dimostrare che $x \in]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\Rightarrow x \in]r-\varepsilon_1, r+\varepsilon_1[$ e
  $x \in]r-\varepsilon_2, r+\varepsilon_2[$

$$x \in]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\iff |x-r| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

$$\Rightarrow |x-r| < \varepsilon_1 \Rightarrow x \in]r-\varepsilon_1, r+\varepsilon_1[= I_1$$

$$\Rightarrow |x-r| < \varepsilon_2 \Rightarrow x \in]r-\varepsilon_2, r+\varepsilon_2[= I_2$$

- $x \in I_1 \cap I_2 \Rightarrow x \in]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$

devo dimostrare che

$$\begin{cases} x \in]r-\varepsilon_1, r+\varepsilon_1[\\ x \in]r-\varepsilon_2, r+\varepsilon_2[\end{cases} \Rightarrow x \in]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$$

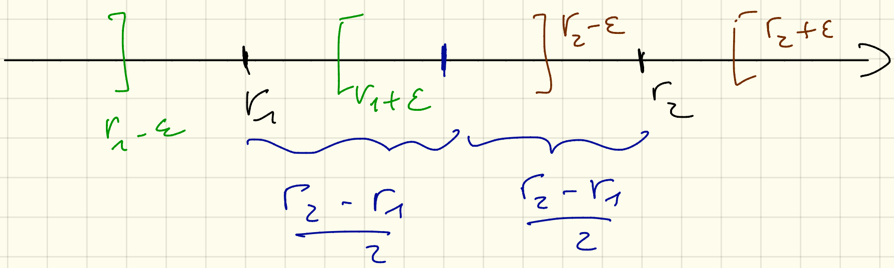
$$\begin{cases} x \in \,]r-\varepsilon_1, r+\varepsilon_1[\\ x \in \,]r-\varepsilon_2, r+\varepsilon_2[\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-r| < \varepsilon_1 \\ |x-r| < \varepsilon_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad |x-r| < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad x \in \,]r-\varepsilon, r+\varepsilon[\quad //$$

Teorema (proprietà di separazione): Siano $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $r_1 \neq r_2$. Allora esistono I_1 intorno di r_1 e I_2 intorno di r_2 tali che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Dim.: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$



prendo $0 < \varepsilon < \frac{r_2 - r_1}{2}$

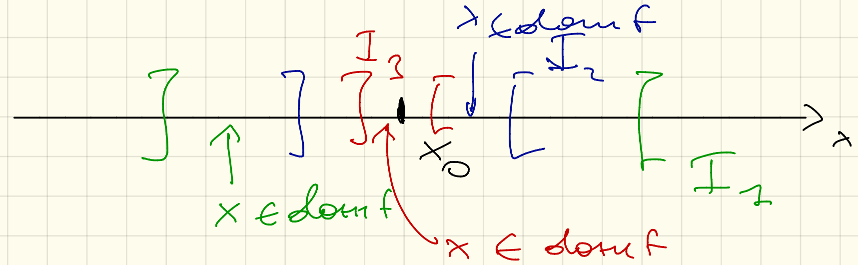
$I_1 = \,]r_1-\varepsilon, r_1+\varepsilon[$

$I_2 = \,]r_2-\varepsilon, r_2+\varepsilon[$

$\Rightarrow I_1 \cap I_2 = \emptyset$

//

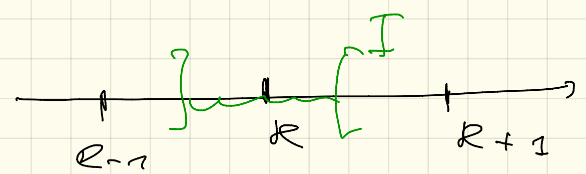
un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
a cui ci si può "avvicinare"
con elementi di dom f diversi da x_0



Definizione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice punto di accumulazione per A se $\forall$ intorno I di x_0

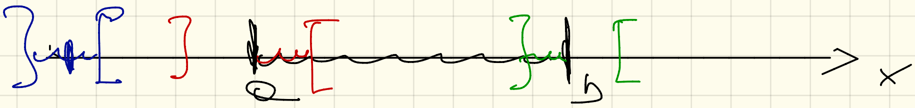
$\exists\, a \in A \cap I,\ a \neq x_0$
(trovo in I un elemento di A diverso da x_0)

Es.: punti di accumulazione di $\mathbb{N}$



L'unico punto di accumulazione è $+\infty$: fissato $M \in \mathbb{R}$, la semiretta $]M, +\infty[$ contiene almeno un numero naturale per la proprietà di Archimede

- presi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
  i punti di accumulazione di un intervallo di estremi a e b
  ($]a,b]$, $[a,b[$, $[a,b]$, $]a,b[$)
  sono tutti e soli gli elementi di $[a,b]$



Es.: punti di accumulazione di $\mathbb{Q}$

$r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ contiene infiniti numeri razionali

insieme dei punti di accumulazione di $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{R}$

Definizione: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
$a \in A$ si dice punto isolato per A se $\exists$ un intorno I di a | $I \cap A = \{a\}$

Es.: $\mathbb{N}$ è fatto di punti isolati.
Fissato $k \in \mathbb{N}$, l'intervallo
$]k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}[$ è un intorno di k
che, tra tutti i numeri naturali,
contiene solo k

Per casa: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.
Provare che se $\sup A \notin A$, allora
$\sup A$ è punto di accumulazione per A,
e che vale la stessa cosa per $\inf A$

La definizione di limite

Definizione: sia f funzione reale
di variabile reale e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto
di accumulazione per $\operatorname{dom} f$. Allora
$l \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice limite di $f(x)$ per x
che tende ad x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{oppure} \quad f(x) \to l \quad \text{per } x \to x_0$$

se $\forall$ intorno V di l $\exists$ un intorno U di x_0 tale
che $x \in U \cap \operatorname{dom} f, x \neq x_0, \Rightarrow f(x) \in V$

- $\forall$ intorno V di l : io decido di quanto voglio approssimare l o "stare vicino" a l con valori assunti da f
- $\exists$ un intorno U di x_0 tale che $x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$, $\Rightarrow f(x) \in V$: una volta che ho deciso di quanto approssimare l (ho fissato U), dico che riesco a farlo con valori che f assume in un intorno U di x_0, $x \neq x_0$

Cosa succede se prendo

$\exists$ un intorno V di l tale che

$\forall$ intorno U di x_0

$x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$, $\Rightarrow f(x) \in V$

(ho scambiato i quantificatori)

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad x_0 = +\infty$

$l \in [-1, 1]$, $V =]l-4, l+4[\supseteq [-1,1]$

$\forall M \in \mathbb{R}$, $x > M \Rightarrow f(x) \in V$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = l$???

Concetto di definitivamente

Sia f funz. di una variabile reale, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, p.to di accumulazione per dom f

Si dice che f ha una certa proprietà P definitivamente per $x \longrightarrow x_0$ se esiste un intorno U di x_0 per cui $\forall\ x \in U \cap \text{dom} f$, $x \neq x_0$, $f(x)$ ha la proprietà P

Es: $e^{1/|x|} > 10^6$ definitivamente per $x \to 0$

Infatti

$$e^{1/|x|} > 10^6 \iff \frac{1}{|x|} > 6 \ln 10 \iff |x| < \frac{1}{6 \ln 10} \qquad x \neq 0$$

$$U = \left] -\frac{1}{6\ln 10}, \frac{1}{6 \ln 10} \right[$$

Ricorda che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se

$$\forall\ V \text{ intorno di } l,\ \exists\ U \text{ intorno di } x_0 \mid x \in U \cap \text{dom} f,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$$

Possiamo riscrivere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall\ V \text{ intorno di } l,\ f(x) \in V \text{ definitivamente per } x \to x_0$$

Nomenclatura

Data f di var. reale che ammette limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to x_0$

1) se $l \in \mathbb{R}$, diremo che f ha <u>limite finito</u> per $x \to x_0$

2) se $l = \pm\infty$, diremo che f è <u>divergente</u> o <u>infinito</u> per $x \to x_0$

3) se $l = 0$, diremo che f è <u>infinitesima</u> per $x \to x_0$

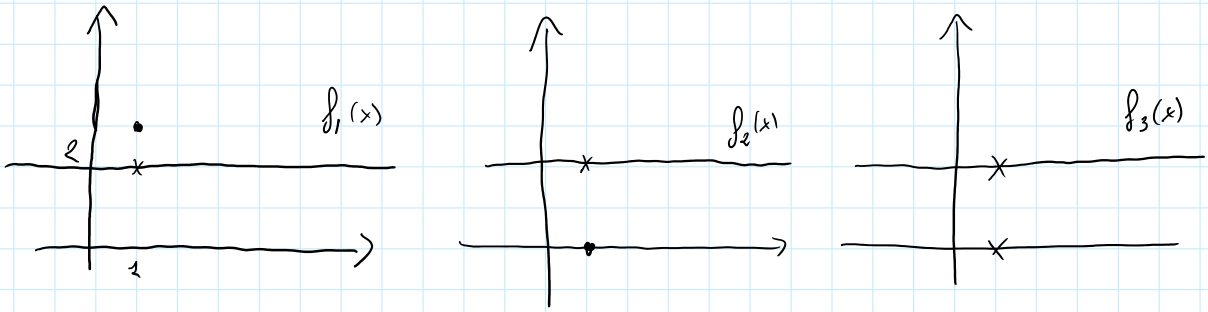
<u>Oss</u>: la definizione di limite non fa intervenire il valore della funzione nel p.to x_0

Ribadiamo che quello che interviene è il valore di f <u>vicino</u> a x_0, ma non in x_0

<u>Es</u>:

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_3(x) = 2 \quad \forall\, x \neq 1$$



$$\lim_{x \to 1} f_1(x) = 2 = \lim_{x \to 1} f_2(x) = \lim_{x \to 1} f_3(x)$$

[Infatti $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;|\; |x-1| < \delta$ e $x \neq 1$

$$\Rightarrow \underbrace{|\underset{\underset{2}{\shortparallel}}{f_1(x)} - 2|}_{=0} < \varepsilon$$

Per esempio, posso prendere $\delta = 1/2$

Es: $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Es: $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to x_0} \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ non esiste

Attenzione ai quantificatori !!!

Sbagliamo l'ordine

definizione sbagliata

$x_0, \ell \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, \varepsilon > 0$ $\quad |x - x_0| < \delta$, $x \in \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$

$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Osservo che se $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $0 \leq \alpha < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow |f(x) - \ell| = 0 \quad \forall\, x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$

$\Rightarrow f(x) = \ell \quad \forall\, x \in \ldots$

Es: $f(x) = (1 - x^2)$, $x_0 = 0$

f non è costante in un intorno di 0,

ma
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Teorema (unicità del limite): Se

$$\ell_1 = \lim_{x \to x_0} f(x), \qquad \ell_2 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

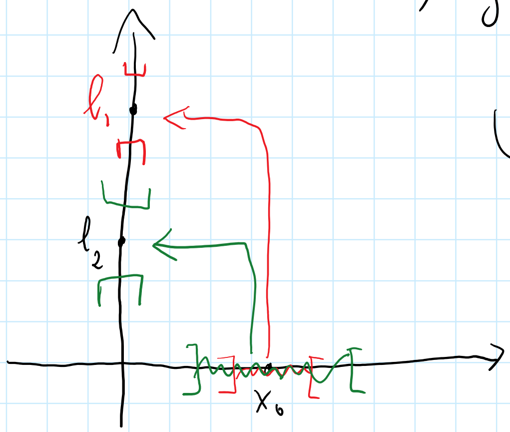
allora

$\ell_1 = \ell_2$.

dim: Supponiamo che $\ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow \exists\, V_1$ intorno di ℓ_1 e V_2 intorno di ℓ_2 t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \Rightarrow \exists\, U_1$ intorno di x_0 t.c. $x \in \operatorname{dom} f \cap U_1, x \neq x_0$
$f(x) \in V_1$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \Rightarrow \exists\, U_2$ intorno di x_0 t.c. $x \in \operatorname{dom} f \cap U_1, x \neq x_0$
$\Rightarrow f(x) \in V_2$



$U = U_1 \cap U_2$ intorno di x_0

$x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$ $\Rightarrow$ $f(x) \in V_1$ perché $x \in U_1$

$f(x) \in V_2$ perché $x \in U_2$

$\Rightarrow f(x) \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$ **ASSURDO**

//

Osservazione importante

Sia $x_0, \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

se

$\forall$ intorno V di ℓ, $\exists$ intorno U di x_0 t.c.

$x \in \operatorname{dom} f \cap U, x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$

ε = raggio di V

$]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

δ = raggio di U

$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$\underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in U}, x \in \text{dom} f, x \neq x_0 \implies \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{f(x) \in V}$$

<u>Proposizione</u>: Se f ha limite finito per $x \to x_0$, allora f è limitata in un intorno di x_0, cioè $\exists N > 0$ t.c. $|f(x)| \leq N$ definitivamente per $x \to x_0$

<u>dim</u>: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists U$ intorno di x_0 t.c. $x \in U \cap \text{dom} f, x \neq x_0 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

Scelgo $\varepsilon = 1$.

$\exists U$ intorno di x_0 t.c.

$$\begin{matrix} x \in U \cap \text{dom} f \\ x \neq x_0 \end{matrix} \implies |f(x) - l| < 1$$

Ho

$$\big| |f(x)| - |l| \big| \leq |f(x) - l|$$

$$\implies |f(x)| - |l| \leq |f(x) - l| < 1$$

$$\forall x \in U \cap \text{dom} f, x \neq x_0$$

$\Rightarrow$ Ho che se $x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$

$$|f(x)| < \underbrace{|\ell| + 1}_{N}$$

//

Esercizio: Verifica che

$$\lim_{x \to 2} \overbrace{2|x-2| \cos\left[\left(\ln|x-2|\right) + e^{\operatorname{sen} x}\right]}^{f(x)} = 0$$

utilizzando la def. con ε e δ.

Sol: Devo mostrare che

$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in \operatorname{dom} f$

$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$x_0 = 2, \quad \ell = 0$

Devo mostrare che $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$ t.c.

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \underbrace{\left| 2|x-2| \cos\left[\left(\ln|x-2|\right) + e^{\operatorname{sen} x}\right] \right| < \varepsilon}_{(*)}$$

Osservo

$$\left| 2|x-2| \cos\left[\left(\ln|x-2|\right) + e^{\operatorname{sen} x}\right] \right| \leq 2|x-2| < \varepsilon$$

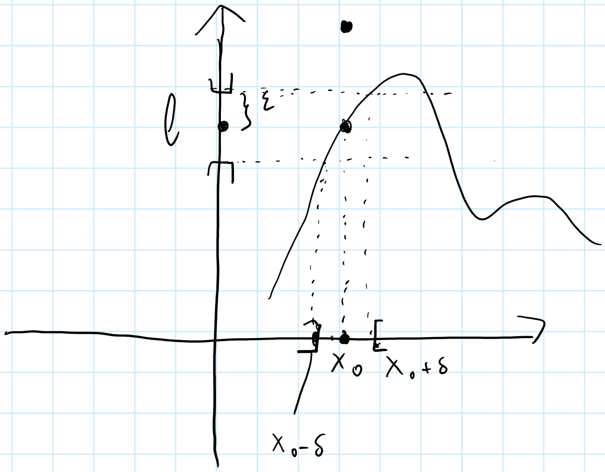
se $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\quad \left[\Leftrightarrow x \in \left] 2 - \underbrace{\tfrac{\varepsilon}{2}}_{\delta}, 2 + \tfrac{\varepsilon}{2} \right[\right]$

Posso prendere $\delta = \dfrac{\varepsilon}{}$

Posso prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

e osservo che se $|x-2| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $x \neq 2$ ✓ allora

$$|f(x) - 0| < \varepsilon .$$

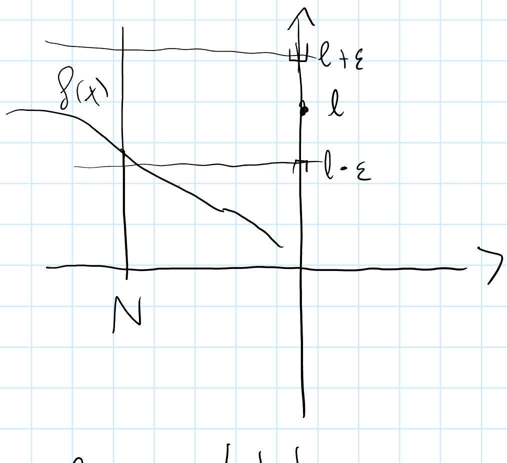


Es: verifica

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

utilizzando

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x < N, x \in \mathrm{dom} f$$
$$\implies |f(x) - l| < \varepsilon$$



Sol: dobbiamo mostrare che $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}$

t.c. $x < N$ allora

$$\left| \arctan x + \frac{\pi}{2} \right| < \varepsilon$$

Abbiamo

$$\left| \arctan x + \frac{\pi}{2} \right| = \arctan x + \frac{\pi}{2}$$

perché $\arctan x + \frac{\pi}{2} > 0$

Osservo che

$$\arctan x + \frac{\pi}{2} < \varepsilon \iff \arctan x < \varepsilon - \frac{\pi}{2}$$

$$\iff x < \underbrace{\tan\left(\varepsilon - \frac{\pi}{2} \right)}_{= N}$$

//

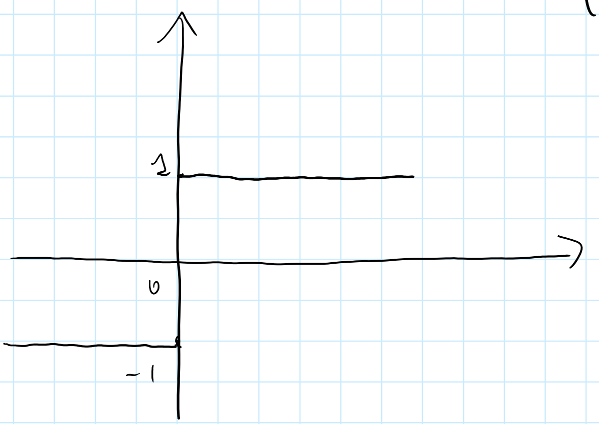
<u>Es</u>: Dimostrare che $\operatorname{sen} x$ non ha limite per $x \to +\infty$ e che $\operatorname{sen}(1/x)$ non ha limite per $x \to 0$.

<u>Limiti destro e sinistro</u>

<u>Es</u>: Cons.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



Per $x \to 0$ con $x < 0$, $\operatorname{sgn} x \to -1$

Per $x \to 0$ con $x > 0$, $\operatorname{sgn} x \to 1$

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$$

limite per x che tende a 0 da sinistra o limite sinistro

limite per x che tende a 0 da destra o limite destro

<u>Es</u>: $\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$

$x = 0$ non è p.to di acc. sinistro per il dom f, anche se $x = 0$ è p.to di accumulazione per dom f ($f = \ln$)

def: $A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ si dice p.to di accumula

def: $A \subseteq \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ si dice p.to di accumulazione destro se $\forall \varepsilon > 0$ $A \cap]r, r+\varepsilon[\neq \emptyset$

(cioè $\exists a \in A \mid r < a < r+\varepsilon$)

r si dice p.to di acc. sinistro per A se $\forall \varepsilon > 0$ $A \cap]r-\varepsilon, r[\neq \emptyset$

(cioè $\exists a \in A \mid r-\varepsilon < a < r$)

NB: r p.to di acc. destro o sinistro, allora r è p.to di acc.

(non è vero il viceversa)

def: $f: \operatorname{dom} f \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.to di acc. sinistro per f. Si dice che f ha limite l per x che tende a x_0 da sinistra (opp. che ha limite sinistro l in x_0) e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \qquad \left(\text{opp. } f(x) \longrightarrow l \text{ per } x \longrightarrow x_0^-\right)$$

se $\forall V$ int. di l, $\exists \delta > 0$ t.c.

$x_0 - \delta < x < x_0$, $x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow f(x) \in V$

• x_0 p.to di acc. destro per $\operatorname{dom} f$.

Si dice che f ha limite l per x che tende a x_0 da destra (opp. che ha limite destro l in x_0) e si scrive

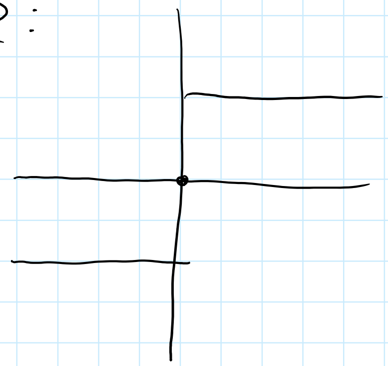
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \qquad \left(\text{opp. } f(x)\to l \text{ per } x\to x_0^+\right)$$

se $\forall\, V$ intorno di l, $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$x_0 < x < x_0 + \delta$, $x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow f(x) \in V$

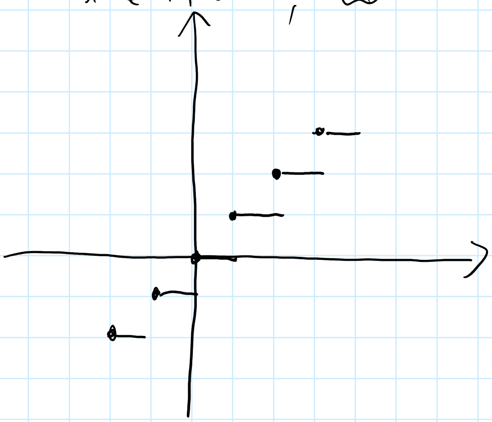
<u>N.B.</u>: Se $x_0 = -\infty$, non ha senso definire il limite sinistro; analog. per il limite destro in $x_0 = +\infty$

<u>Es</u>:



$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$$

- $x \in \mathbb{R}$, con $[x] = \max\{j \in \mathbb{Z} \mid j \le x\}$



$k \in \mathbb{Z}$

$k-1 < x < k \Rightarrow [x] = k-1$

$k < x < k+1 \Rightarrow [x] = k$

$$\lim_{x\to k^-} [x] = k-1, \quad \lim_{x\to k^+} [x] = k$$

Dim. che $\displaystyle\lim_{x\to k^-} [x] = k-1$

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \mid k - \delta < x < k \Rightarrow \left|[x] - (k-1)\right| < \varepsilon$

Posso prendere $\delta = 1$

Es: $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ $\quad$ ($\mathrm{dom}\, e^{1/x} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Devo mostrare che $\forall$ int. V di $+\infty$ $\exists\, \delta > 0 \,|$

$$0 < x < \delta \Rightarrow e^{1/x} \in V$$

cioè

$$\forall M > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ t.c.}$$

$$0 < x < \delta \Rightarrow e^{1/x} > M$$

Cerco sol. di $e^{1/x} > M$ del tipo $0 < x < \delta$, con δ da determinare.

Oss. che

$$e^{1/x} > M \iff \frac{1}{x} > \ln M$$

(non è restrittivo supporre $M > 1$)

$$\Downarrow$$

Se prendo $0 < x < \underset{\delta}{\underset{\parallel}{\frac{1}{\ln M}}} \Rightarrow e^{1/x} > M$

- $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$

Teorema di unicità del limite destro o sinistro

$f : \mathrm{dom} f \to \mathbb{R}$, x_0 p.to di acc. destro (risp. sinistro) per $\mathrm{dom} f$. Se

$$\ell_1 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

(risp. $\ell_1 = \lim f(x)$ $\quad$ $\ell_2 = \lim f(x)$)

(risp. $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ $\quad l_2 = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$)

allora $\quad l_1 = l_2$

<u>Teorema</u>: $f : \text{dom} f \to \mathbb{R}$, x_0 p.to di acc. destro e sinistro

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l \\ \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l \end{cases}$$

<u>Oss</u>: 1) Se uno dei due limiti destro o sinistro non esiste, allora non esiste $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

2) se i limiti destro e sinistro esistono ma sono distinti, allora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ non esiste.

<u>Es</u>: • $f(x) = e^{1/x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \nexists$$

• $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

- $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\nexists \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

- $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2 + e^{1/x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 2$

Limite e valore assoluto

Prop: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to x_0} |f(x) - l| = 0$

dim: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ U$ int. di x_0 $|$

$x \in U \cap \text{dom} f, \ x \neq x_0 \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l|}_{g(x) \, = \, |g(x) - 0|} < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ U$ intorno di x_0 $|$

$x \in U \cap \text{dom} g, \ x \neq x_0 \Rightarrow |g(x) - 0| < \varepsilon$

$\iff \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x) - l| = 0$

Corollario: $f(x)$ è infinitesimo in $x_0 \iff |f(x)|$ è infinitesimo in x_0

Oss: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$

Prop: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

dove $|l| = +\infty$ se $l = \pm\infty$.

N.B.: Non vale il viceversa, cioè

$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = l$ <u>non implica</u> $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Es:

$$|\text{sgn}\, x| = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} |\text{sgn}\, x| = 1$, però $\lim_{x \to 0} \text{sgn}\, x$ non esiste

dim: supp $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, U$ int. di x_0 $|$

$x \in U \cap \mathrm{dom} f,\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Ho:

$$\big||f(x)| - |l|\big| \leq |f(x) - l|$$

Fissato $\varepsilon > 0$ nell'int. U di sopra ho che se $x \in U \cap \mathrm{dom} f,\ x \neq x_0$

$$\big||f(x)| - |l|\big| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$$

cioè
$$\big||f(x)| - |l|\big| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$$

//

Limiti e relazioni d'ordine

Teorema della permanenza del segno

f funzione reale di var. reale, x_0 p.to di acc. per $\mathrm{dom} f$. Se

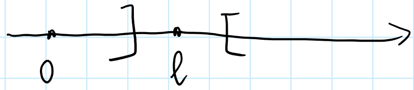
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0$$

allora $\exists\ U$ int. di x_0 $|$

$$x \in U \cap \mathrm{dom} f,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > 0$$

In altre parole, $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$

<u>dim</u>: $l > 0$, in part. $l \neq 0$. $\exists\, V$ intorno di l che non contiene 0



In particolare, se $r \in V$, allora $r > 0$ (perché V è intervallo)

Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $\exists\, U$ int. di x_0 t.c.

$x \in U \cap \operatorname{dom} f,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in V$

$\Rightarrow f(x) > 0$ //

<u>Oss</u>: • se $x_0 \in \mathbb{R}$ e valgono le ip., $\exists\, \delta > 0 \mid$
$|x - x_0| < \delta,\ x \in \operatorname{dom} f,\ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > 0$

• se $x_0 = +\infty$, e valgono le ip., allora $\exists\, N > 0 \mid$
se $x > N$ e $x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow f(x) > 0$

• se $x_0 = -\infty$, e valgono le ip., allora $\exists\, N > 0 \mid$
$< -N$ e $x \in \operatorname{dom} f \Rightarrow f(x) > 0$

<u>Corollario</u>: Sia f reale di var. reale, sia

x_0 di acc. per dom f.
Se $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to x_0$
ed esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, allora $\ell \geq 0$

dim: per assurdo, $\ell < 0$, allora $f(x) < 0$
def. per $x \to x_0$, contro l'ip. di $f(x) \geq 0$
def. per $x \to x_0$ ASSURDO //

Oss: se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, posso dire qualcosa
su segno di f? NO

Es: $f_1(x) = (x-1)^2$, $f_2(x) = -(x-1)^2$

$$\lim_{x \to 1} f_1(x) = 0 = \lim_{x \to 1} f_2(x)$$

ma $f_1(x) \geq 0$ mentre $f_2(x) \leq 0$
$(f_1(x) > 0 \quad \forall x \neq 1)$ $\quad (f_2(x) < 0 \quad \forall x \neq 1)$

MERCOLEDÌ 31/10

Limiti e relazione d'ordine

Permanenza del segno

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l > 0 \Rightarrow$ $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$

$\exists$ un intorno U di x_0 tale che
$\forall x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$, $f(x) > 0$

Corollario: Se $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora

$l \geq 0$

N.B.: viene conservata la disuguaglianza "larga"

Es.: $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ però

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \geq 0$$

Teorema del confronto:

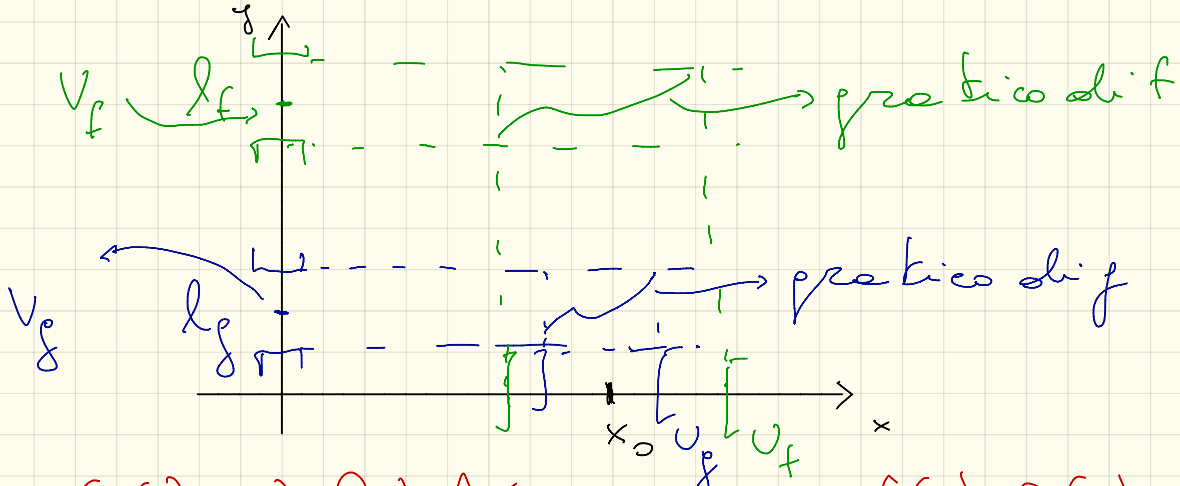
Siano $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, x_0 punto di accumulazione per X, $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$. Se

$$\underline{\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f} \quad e \quad \underline{\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g},$$

allora $l_f \leq l_g$.

assumo che i limiti esistano

Dim.: per assurdo, assumiamo che $l_f > l_g$ e, per semplicità, supponiamo $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in X$



$x \in U = U_f \cap U_g \cap X$, $x \neq x_0 \implies f(x) > g(x)$

$\exists$ un intorno V_g di l_g e V_f di l_f tali che $V_g \cap V_f = \phi$ (proprietà di separazione), ed essendo $l_f > l_g$ e V_g e V_f intervalli ne consegue che

$$y_1 \in V_f \text{ e } y_2 \in V_g \Rightarrow y_1 > y_2,$$

cioè ogni elemento di V_f è maggiore strettamente di tutti gli elementi di V_g

Poiché $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_g$, $\exists$ un intorno U_g di x_0 |

$$x \in U_g \cap X,\ x \neq x_0, \Rightarrow g(x) \in V_g$$

Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f$, $\exists$ un intorno U_f di x_0 |

$$x \in U_f \cap X,\ x \neq x_0, \Rightarrow f(x) \in V_f$$

Sia $U = U_g \cap U_f$, che è ancora intorno di x_0

Se $x \in U \cap X$, $x \neq x_0$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \; x \in U_g \;\Rightarrow\; g(x) \in V_g \\ \Rightarrow \; x \in U_f \;\Rightarrow\; f(x) \in V_f\end{array}\right\} f(x) > g(x)$$

perché ogni elemento di V_f è strettamente maggiore di ogni elemento di V_g

Assurdo perché si era supposto $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$ //

Teorema dei due carabinieri:

$f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per X. Supponiamo che $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e che

$$\left[\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l\right]$$

Allora
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} h(x) = l}$$

N.B.: Il teorema afferma che, sotto opportune ipotesi, il $\lim_{x \to x_0} h(x)$ esiste e fa l

Se si sapesse già che il limite esiste, allora il fatto che faccia l discenderebbe dal teorema del confronto

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & \leq & h(x) & \leq & g(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l_f = l & & l_h = l & & l_g = l \end{array}$$

Dim.: dobbiamo dimostrare che la funzione h ha limite per $x \to x_0$ e che questo limite vale l, e quindi che

$\forall$ intorno V di l $\exists$ un intorno U di x_0 tale che $x \in U \cap X$, $x \neq x_0 \Rightarrow h(x) \in V$

definizione di $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Fissiamo un intorno V di l

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$\exists$ un intorno U_f di x_0 tale che

$x \in U_f \cap X$, $x \neq x_0$, $\Rightarrow f(x) \in V$

- $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

$\exists$ un intorno U_g di x_0 tale che

$x \in U_g \cap X$, $x \neq x_0$, $\Rightarrow g(x) \in V$

Prendo $U = U_f \cap U_g$, che è ancora intorno di x_0

$x \in U \cap X$, $x \neq x_0$,

$\Rightarrow x \in U_f \cap X$, $x \neq x_0$, $\Rightarrow f(x) \in V$

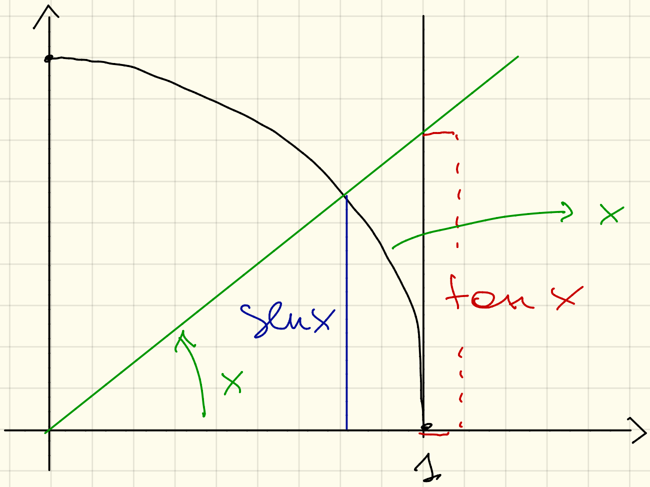
$\Rightarrow x \in U_g \cap X$, $x \neq x_0$, $\Rightarrow g(x) \in V$

$$\underbrace{f(x)}_{\substack{\cap \\ V}} \leq h(x) \leq \underbrace{g(x)}_{\substack{\cap \\ V}}$$

$\Rightarrow h(x) \in V$ perché V è un intervallo //

Limite fondamentale

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$



$\operatorname{sen} x \le x \le \tan x$

$$\operatorname{sen} x \le x \le \tan x$$

$$\operatorname{sen} x \le x \le \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

- $x > 0$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1$$

$$1 \le \frac{1}{\cos x} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \ge \cos x$$

$$\cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1 \qquad \left(\text{stessa cosa per } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\right)$$

$$\cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1$$ definitivamente per $x \to 0$

$f(x)$ $h(x)$ $g(x)$

Il gioco diventa dimostrare che

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \lim_{x \to 0} 1$$

↓ dimostriamolo banale!

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid |x| < \delta, \; x \neq 0, \Rightarrow |\cos x - 1| < \varepsilon$$

$-\delta < x < \delta$

fisso il raggio di un intorno V di l → trovo il raggio di un intorno U di x_0

$$l = 1 \quad , \quad x_0 = 0$$

$$|\cos x - 1| < \varepsilon \iff 1 - \cos x < \varepsilon$$

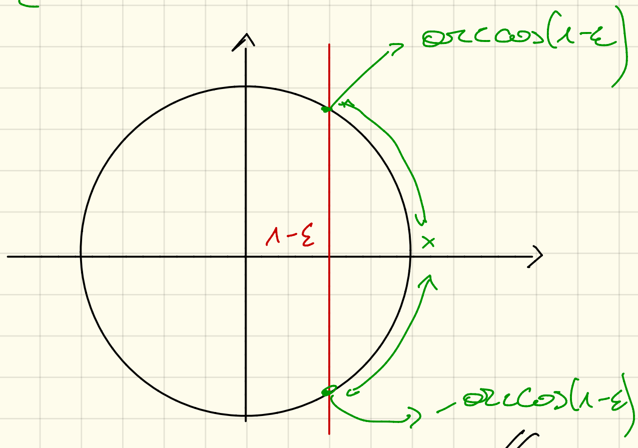
$\cos x > 1 - \varepsilon$

- se $\varepsilon > 2 \implies 1-\varepsilon < -1$ e
$\cos x > 1-\varepsilon \quad \forall x$

e comunque non è restrittivo assumere $\varepsilon \leq 2$

$\cos x > 1-\varepsilon$

$$-\arccos(1-\varepsilon) < x < \underbrace{\arccos(1-\varepsilon)}_{\delta}$$



//

Facciamo vedere che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 0$$

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \lim_{x\to x_0} |f(x) - \ell| = 0 \right]$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)$$

$$0 \le |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = \left| 2\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| =$$

$$= 2 \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|}_{\le 1} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \le$$

$$\le 2 \underbrace{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|}_{\le \left|\frac{x-x_0}{2}\right|} \le 2 \cdot \left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|$$

perché $|\operatorname{sen} t| \le |t|$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{0}_{f(x)} \le \underbrace{|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0|}_{h(x)} \le \underbrace{|x - x_0|}_{g(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

banali

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = 0,$$ quello che volevo

- Per cos, provare che $\boxed{\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}}$

• Facciamo vedere che, se $n \geq 1$,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}}$$

- $n = 1$ banale (per caso)
- $n \geq 2$ e dimostriamo che

$$\lim_{x \to x_0} |x^n - x_0^n| = 0$$

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + x^{n-3} x_0^2 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$$

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k}\right)$$

Voglio stimare $|x^n - x_0^n|$

in un intorno di x_0, per esempio l'intervallo $]x_0 - 1, x_0 + 1[$

Se $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[\implies |x| \leq |x_0| + 1$

$$0 \leq |x^n - x_0^n| = |x - x_0| \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k} \right| \leq$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{disuguaglianza triangolare}}}{\leq} |x - x_0| \sum_{k=0}^{n-1} |x_0|^k |x|^{n-1-k} \underset{\substack{\downarrow \\ |x| \leq |x_0| + 1}}{\overset{x \in]x_0-1, x_0+1[}{\leq}}$$

$$0 \le |x^n - x_0^n| = |x - x_0| \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k} \right| \le$$

$$\le |x - x_0| \sum_{k=0}^{n-1} |x_0|^k |x|^{n-1-k} \le$$

$|x| \le |x_0| + 1$

$$\le |x - x_0| \sum_{k=0}^{n-1} |x_0|^k (|x_0| + 1)^{n-1-k}$$

è una costante, chiamiamola C, perché non dipende da x

$$0 \le |x^n - x_0^n| \le C\,|x - x_0| \quad g(x)$$

$f(x)$ $\quad$ $h(x)$

definitivamente per $x \to x_0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = 0$, che è quello che volevo //

Corollario: $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per X.

1) Se $f(x) \ge g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

2) Se $f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to x_0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$