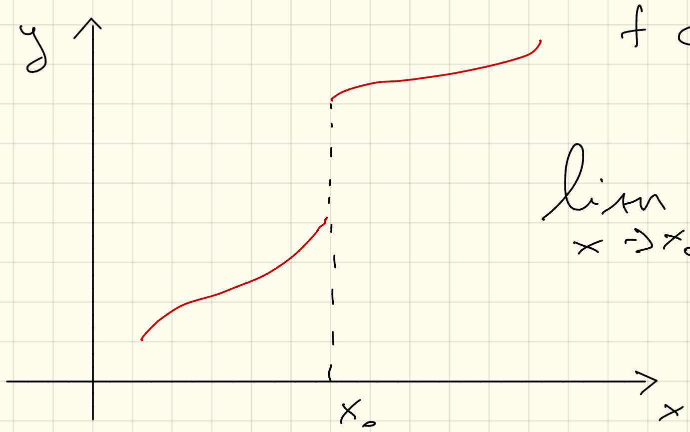
METODI DI CALCOLO DI LIMITI

Limiti di funzioni monotone



f crescente

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x)$$

Teorema: f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione sinistro per f. Se f è monotona in $]-\infty, x_0[$, allora $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e valgono

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \quad \text{se } f \text{ è crescente}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x < x_0} f(x) \quad \text{se } f \text{ è decrescente}$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione destro per f e f è monotona in $]x_0, +\infty[$, allora $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e valgono

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) \quad \text{se } f \text{ è crescente}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{x > x_0} f(x) \quad \text{se } f \text{ è decrescente}$$

$\to$ si intende $x \in \operatorname{dom} f$

Se $x_0 = +\infty$ è punto di accumulazione per dom f e f è monotona in un intorno di $+\infty$ $]M, +\infty[$, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ esiste e valgono

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_{x > M} f(x) \quad \text{se } f \text{ è crescente}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf_{x > M} f(x) \quad \text{se } f \text{ è decrescente}$$

e valgono risultati analoghi se $x_0 = -\infty$

$$\lim_{x \to x_0^-} a^x = \lim_{x \to x_0^+} a^x = a^{x_0} \qquad \forall a > 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \log_a x = \lim_{x \to x_0^+} \log_a x = \log_a x_0$$

$\forall a > 0,\ a \neq 1$

e $\forall x_0 > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{|x|^\alpha} = 0 \qquad \forall\, \alpha > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|^\alpha} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 0$$

Limiti (Teoria) - 05/11/2018

lunedì 5 novembre 2018 13:45

Metodi di calcolo di limiti

Es: $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} = \lim_{x\to 0} \alpha \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha x} = \lim_{x\to 0} \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha x}$$

y

$$\underset{\uparrow \, y=\alpha x}{=} \lim_{y\to 0} \alpha \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \alpha \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

Es: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+5}{e^x+1} \underset{\uparrow \, y=e^x}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{2y+5}{y+1} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\cancel{y}(2+\frac{5}{y})}{\cancel{y}(1+\frac{1}{y})} = 2$$

Teorema (della funzione composta o del cambio di variabile)

f, g funzioni reali di variabile reale t.c. $g \circ f$ sia definita in insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ che abbia x_0 p.to di acc. Supp. che

1) $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$

2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$

3) $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ y = f(x)}}{=} \lim_{y \to y_0} g(y) = l$$

Oss: non vogliamo per esempio che $f(x) = y_0$ in un int. di x_0, perché il valore di g in y_0 non interviene nella definizione di limite

Teorema: $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to di acc. per X. Supp.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_f \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = l_f \pm l_g$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_f \cdot l_g$$

Se $l_g \neq 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_f}{l_g}$$

dim: Dimostriamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l_f + l_g \qquad \circledast$$

$$\circledast \iff \lim_{x \to x_0} \left| f(x) + g(x) - (l_f + l_g) \right| = 0$$

$\forall \ \varepsilon > 0 \quad \exists \ U$ int. di x_0 $|$

$x \in U \cap X, \ x \neq x_0 \Rightarrow \left| f(x) + g(x) - l_f - l_g \right| < \varepsilon$

Oss.

$$\left| f(x) + g(x) - l_f - l_g \right| = \left| (f(x) - l_f) + (g(x) - l_g) \right|$$
$$\leq \left| f(x) - l_f \right| + \left| g(x) - l_g \right|$$

So che $\exists \ U_f$ int. di x_0 $| \ x \in U_f \cap X, \ x \neq x_0 \Rightarrow \left| f(x) - l_f \right| < \varepsilon/2$

So che $\exists \ U_g$ int. di x_0 $| \ x \in U_g \cap X, \ x \neq x_0 \Rightarrow \left| g(x) - l_g \right| < \varepsilon/2$

Prendo

$$U = U_f \cap U_g$$

Se $x \in U \cap X, \ x \neq x_0$ allora

$$\underbrace{\left| f(x) - l_f \right|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{\left| g(x) - l_g \right|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

perché $x \in U_f$ \quad perché $x \in U_g$

—

Da cui segue la tesi.

Considero ora il prodotto

Se $x \in X$

$$|f(x) \cdot g(x) - l_f \cdot l_g| = |(f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot l_g) + (f(x) \cdot l_g - l_f \cdot l_g)|$$

$$\leq |f(x)(g(x) - l_g)| + |l_g(f(x) - l_f)|$$

$$= |f(x)||g(x) - l_g| + |l_g||f(x) - l_f| \qquad (***)$$

Sia $\varepsilon > 0$

$\exists\, N > 0$, U_f^1 int. di x_0 t.c. $|f(x)| < N \quad \forall x \in U_f^1 \cap X$, $x \neq x_0$

$\exists\, U_g$ int. di x_0 t.c. $x \in U_g \cap X$, $x \neq x_0 \Rightarrow |g(x) - l_g| < \frac{\varepsilon}{2N}$

$\exists\, U_f^2$ int. di x_0 t.c. $x \in U_f^2 \cap X$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l_f| < \frac{\varepsilon}{2|l_g|}$

Chiamo $U = U_f^1 \cap U_g \cap U_f^2$ e osservo che

se $x \in U \cap X$, $x \neq x_0$

$$(***) < N \frac{\varepsilon}{2N} + |l_g| \frac{\varepsilon}{2|l_g|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \#$$

<u>Oss</u>: il teorema rimane vero se considero solo il limite destro o il limite sinistro

<u>Oss</u>: Se $l_g \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$ def. in un intorno di x_0

Inoltre

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_g}$$

Oss : Calcoliamo

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = l_f^{\,l_g}$$

conoscendo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_f > 0 \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_g \in \mathbb{R}$$

$$\left(\Rightarrow \underset{\text{per } x\to x_0}{f(x) > 0 \text{ def.}} \right)$$

Osservo

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln\left((f(x))^{g(x)}\right)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}$$

Ho

$$\lim_{x\to x_0} \underset{\downarrow \, l_g}{g(x)} \, \overbrace{\ln \underset{\downarrow \, l_f}{f(x)}}^{\to \ln l_f} = l_g \ln l_f$$

$$\left(\text{perché} \quad \lim_{x\to x_0} \ln f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ y = f(x) \\ y_0 = l_f}}{=} \lim_{y\to l_f} \ln y = \ln l_f \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ t = g(x)\ln f(x)}}{=} \lim_{t\to l_g \ln l_f} e^t = e^{l_g \ln l_f} = e^{\ln (l_f)^{l_g}} = l_f^{\,l_g}$$

$$t = g(x) \ln f(x)$$

$$t_0 = l_g \ln l_f$$

Ho sfruttato

(·) $\lim_{y \to y_0} \ln y = \ln y_0 \quad , y_0 > 0$

(··) $\lim_{t \to t_0} e^t = e^{t_0} \quad , \forall \quad t_0 \in \mathbb{R}$

Mostriamo (··).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |t - t_0| < \delta, t \neq t_0$$
$$\Rightarrow |e^t - e^{t_0}| < \varepsilon$$

Ho

$$|e^t - e^{t_0}| = |e^{t_0}(e^{t - t_0} - 1)| < \varepsilon$$

se e solo se

$$|e^{t - t_0} - 1| < \varepsilon e^{-t_0}$$

Quest'ultima è equivalente a dire

$$-\varepsilon e^{-t_0} < e^{t - t_0} - 1 < \varepsilon e^{-t_0}$$

cioè

$$1 - \varepsilon e^{-t_0} < e^{t - t_0} < 1 + \varepsilon e^{-t_0}$$

Non è restrittivo supporre che $1 - \varepsilon e^{-t_0} > 0$

Passo ai logaritmi

$$\ln\left(1 - \varepsilon e^{-t_0}\right) < t - t_0 < \ln\left(1 + \varepsilon e^{-t_0}\right)$$

Prendo $\delta = \min\left\{ \ln\left(1 + \varepsilon e^{-t_0}\right), -\ln\left(1 - \varepsilon e^{-t_0}\right) \right\}$

Se ho che $|t - t_0| < \delta$ allora vale

$$\left| e^{t} - e^{t_0} \right| < \varepsilon$$

Proposizione (prodotto di funzioni infinitesime per limitate)

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.to di acc. per X

f infinitesima in x_0 $\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \right)$, g limitata in un intorno di x_0 $\left(\exists N > 0 \text{ e } U_g \text{ int. di } x_0 \mid x \in U_g \cap X, x \neq x_0 \Rightarrow |g(x)| \leq N \right)$

Allora,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$$

dim: Dobbiamo mostrare che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ int. di x_0 t.c. $x \in U \cap X$, $x \neq x_0$ $|f(x) g(x)| < \varepsilon$

Oss. che

$$|f(x) g(x)| = |f(x)| \underbrace{|g(x)|}_{\substack{\leq N \\ \text{se } x \in U_g \cap X \\ x \neq x_0}} \leq N |f(x)| \qquad x \in U_g \cap X, \; x \neq x_0$$

Scelgo int. U_f di x_0 t.c. $x \in U_f \cap X, x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{N}$

Pongo $U = U_f \cap U_g$ ed ho

$$x \in U \cap X, \; x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) g(x)| \leq N |f(x)| \leq N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon \qquad \#$$

Forme indeterminate

$f, g \; X \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 p.to di acc. per X

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x)$$

Quando non posso dire niente a priori sul limite del prodotto quando conosco i limiti di f e di g?

<u>Quando</u>

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

[forma indeterminata $0 \cdot \pm\infty$]

<u>Es</u>: • $x_0 = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) g(x) = \lim_{x \to 0^+} \overbrace{x \cdot \frac{1}{x}}^{=1} = 1$$

• $x_0 = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) g(x) = \lim_{x \to 0^+} x \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

• $x_0 = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) g(x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0$$

Stessa domanda per $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$

<u>Quando</u>

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

[forme indeterminate $+\infty - \infty$]

Es: $x_0 = +\infty$, $f(x) = x+1$, $g(x) = -x$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)+g(x) = 1$

$x_0 = +\infty$, $f(x) = x^2+1$, $g(x) = -x$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \underbrace{f(x)+g(x)}_{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)} = +\infty$

Stessa domanda per $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

$\Rightarrow$ forme indeterminate sono $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

[entrambe infinite o entrambe infinitesime]

Limite di polinomi

$P(x)$ polinomio di grado $n \geq 1$

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{x^n} \underbrace{\left(a_n + \underset{\downarrow 0}{\frac{a_{n-1}}{x}} + \dots + \underset{\downarrow 0}{\frac{a_0}{x^n}}\right)}_{\downarrow} = \begin{cases} +\infty & a_n > 0 \\ -\infty & a_n < 0 \end{cases}$$

$+\infty$ n pari e $a_n > 0$

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x^n}_{\substack{+\infty \text{ se } n \text{ è pari} \\ -\infty \text{ se } n \text{ è dispari}}} \underbrace{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)}_{a_n} = \begin{cases} +\infty & n \text{ pari e } a_n > 0 \\ & n \text{ dispari e } a_n < 0 \\ -\infty & n \text{ dispari e } a_n > 0 \\ & n \text{ pari e } a_n < 0 \end{cases}$$

- $P(x)$, $Q(x)$ polinomi

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_q x^q$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{forma ind. } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_0} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right)}{x^q \left(b_q + \frac{b_{p-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^q} \right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{n-q} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}}{b_q + \frac{b_{q-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^q}}$$

$$\frac{a_n}{b_q}$$

$$= \begin{cases} +\infty & n > q \text{ e } \frac{a_n}{b_q} > 0 \\ -\infty & n > q \text{ e } \frac{a_n}{b_q} < 0 \\ \frac{a_n}{b_q} & n = q \\ 0 & n < q \end{cases}$$

$$\circledast \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_q x^q}$$

Es: Fare $x \longrightarrow -\infty$ $\left[\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_q x^q} \right]$

Es: • $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 3}{2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$

• $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 6x^5 + x}{3x^5 + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-6x^5}{3x^5} = -2$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^7 + 3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

Forme indeterminate di $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$

· <u>indeterminate</u> quando

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ $\qquad 0^0$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ $\qquad \infty^0$

Osservo

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$0 \qquad -\infty \qquad +\infty$$

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

<u>Esempi</u> : · $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x^2)} = 1$$

$\frac{1}{x} \ln(1+x^2) \to 0$

· $f(x) = 1 + x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x^2} \ln(1+x)} = +\infty$$

$\frac{1}{x^2} \ln(1+x) \to +\infty$

In conclusione le forme indeterminate di $f(x)^{g(x)}$

In conclusione le forme indeterminate di $f(x)^{g(x)}$ si riconducono a quelle del prodotto scrivendo

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

Limiti con e

Teorema: f funz. reale di variabile reale, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to di ecc. sinistro per $\operatorname{dom} f$, f monotona in $]-\infty, x_0[\cap \operatorname{dom} f$

Allora

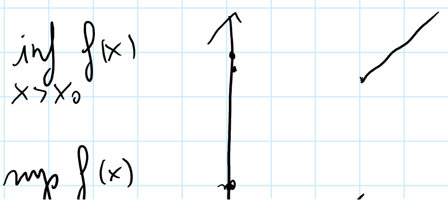
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \qquad \text{se } f \text{ è crescente}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf_{x < x_0} f(x) \qquad \text{se } f \text{ è decrescente}$$

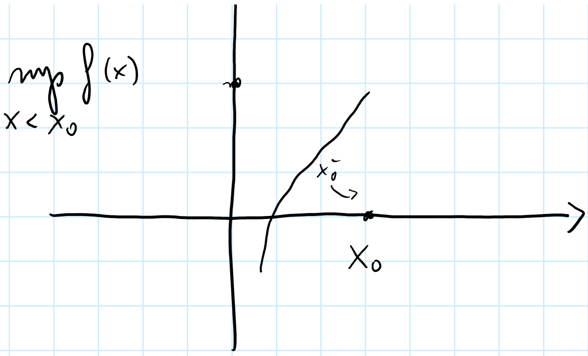
Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ è p.to di ecc. destro per $\operatorname{dom} f$ e f è monotona in $]x_0, +\infty[\cap \operatorname{dom} f$, allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) \qquad \text{se } f \text{ è crescente}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{x > x_0} f(x) \qquad \text{se } f \text{ è decrescente}$$



[N.B.: f monotona $\Rightarrow$



limite destro e sinistro in un p.to esistono sempre]

Voglio calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \left(n\geq 1\ ,\ n\in\mathbb{N}\right)$$

Come si fa a dire che questo limite esiste

$$n\longmapsto\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ è monotona crescente

$$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3 \qquad \forall\ n\geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sup_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in[2,3]$$

Si prova che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Se al posto di $n\in\mathbb{N}$ c'è $x\in\mathbb{R}$?

Si mostra che

$$\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

usando

$$[x] \le x \le [x]+1$$

e il teorema dei due carabinieri. #

MERCOLEDÌ 7/11

Ricevimento Prof. Musolino
giovedì, dalle 16:30 - 18 in P3

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

– $$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

Se $\alpha = 0$, $\lim_{x \to \pm\infty} (1)^x = 1$ $\quad (1^\infty)$

$\hookrightarrow 1^x = 1 \quad \forall x$

($\lim_{x \to +\infty} 0 \cdot e^x = 0$ perché $0 \cdot e^x = 0 \ \forall x$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-\sqrt{x}} e^x = +\infty$, utile esercizio per casa)

Se $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x =$$

$y = \frac{x}{\alpha} \to \pm\infty$ se $x \to \pm\infty$

$$= \lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\alpha y} =$$

$$= \lim_{y \to \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^\alpha = e^\alpha$$

Se $\alpha < 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x =$$

$y = \frac{x}{\alpha} \to \mp\infty$ se $x \to \pm\infty$

$$= \lim_{y \to \mp\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^\alpha = e^\alpha$$

$$- \quad \boxed{\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{1/x} = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1+\alpha x)^{1/x} =$$

$$y = \frac{1}{x} \to +\infty \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{y}\right)^y = e^\alpha$$

In particolare, $\boxed{\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e}$

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \ln (1+x)^{1/x} =$$

$$y = (1+x)^{1/x} \to e \quad \text{per } x \to 0$$

$$= \lim_{y \to e} \ln y = \ln e = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x} = \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

(utile esercizio per casa)

$$- \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} =$$

$y = e^x - 1 \to 0$ per $x \to 0$

$x = \ln(y+1)$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = 1$$

$\frac{\ln(1+y)}{y} \to 1$

$$- \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{x} = \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

(utile esercizio per casa)

$$- \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \forall a > 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x \ln e} - 1}{x} = \ln e$$

$$e^{\ln e^x} = e^{x \ln e}$$

- $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \overset{\downarrow}{=}$$

$y = \ln(1+x) \to 0$ per $x \to 0$

$e^y = 1 + x$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{e^{\alpha y} - 1}{y}}{\frac{e^y - 1}{y}} = \alpha$$

$\frac{e^{\alpha y} - 1}{y} \to \alpha$

$\frac{e^y - 1}{y} \to 1$

- $\varphi, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X. Assumiamo che

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

(e che $\varphi(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$)

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(1+\varphi(x)) =$$

$\varphi(x) \to 0$ per $x \to x_0$

$$= \lim_{x\to x_0} g(x)\varphi(x) \frac{\ln(1+\varphi(x))}{\varphi(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1+\varphi(x))}{\varphi(x)} =$$

$y = \varphi(x) \to 0$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

$$= \lim_{x\to x_0} g(x)\varphi(x)\text{ , se tale limite esiste}$$

$$- \lim_{x\to x_0} (1+\varphi(x))^{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} e^{\ln(1+\varphi(x))^{g(x)}} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln(1+\varphi(x))}$$

Qui non resta che calcolare

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(1+\varphi(x))$$