CONFRONTI ASINTOTICI TEORIA

GIOVEDÌ 8/11

CONFRONTI ASINTOTICI

$(\ln(1+x))^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - 1 + \cos x + \ln^2(1+x)}{x \arctan x - 2\tan x + \ln(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x)}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Per $x \to 0$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \approx 1 \quad , \quad \operatorname{sen} x \approx x$$

$$\frac{\operatorname{arctan} x}{x} \approx 1 \quad , \quad \operatorname{arctan} x \approx x$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \approx \frac{1}{2} \quad , \quad 1-\cos x \approx \frac{1}{2} x^2$$

$$\frac{\ln^2(1+x)}{x^2} \approx 1 \qquad \ln^2(1+x) \approx x^2$$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \approx 1 \qquad \ln(1+x^2) \approx x^2$$

$$\frac{\tan x}{x} \approx 1 \qquad \tan x \approx x$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - 1 + \cos x + \ln^2(1+x)}{x \operatorname{arctan} x - 2 \tan x + \ln(1+x^2)}$$

Numeratore

$$\underbrace{\operatorname{sen} x}_{\approx x} - \underbrace{(1-\cos x)}_{\approx \frac{1}{2}x^2} + \underbrace{\ln^2(1+x)}_{\approx x^2} \approx$$

$$\approx x - \frac{1}{2}x^2 + x^2 = x + \frac{1}{2}x^2$$

Denominatore

$$x \underbrace{\operatorname{arctan} x}_{\approx x} - 2 \underbrace{\tan x}_{\approx x} + \underbrace{\ln(1+x^2)}_{\approx x^2} \approx$$

$$\approx x \cdot x - 2x + x^2 = -2x + 2x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - 1 + \cos x + \ln^2(1+x)}{x \arctan x - 2\tan x + \ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2}{-2x + 2x^2} = -\frac{1}{2}$$

→ Si può fare ?!

Funziona, ma va giustificato!

Es.:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x) - 2\operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x} = -1$$

$\operatorname{sen} x \simeq x$ per $x \to 0$

$\ln(1+x) \simeq x$

$\operatorname{sen}^2 x \simeq x^2$

$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0}{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

Sbagliato!

Numeratore $\operatorname{sen} x - \ln(1+x) \simeq x - x = 0$

Denominatore $x\ln(1+x) - 2\operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x \simeq$

$\simeq x^2 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2$

Dobbiamo capire quando il metodo funziona, anzi, come farlo funzionare

$\Rightarrow$ dobbiamo capire come giustificare i vari passaggi

[Capire come valutare l'errore che commetto quando "sostituisco" una funzione con un'altra che la approssima.]

<u>Definizione</u>: $X \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X, $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$ ($\exists\, U$ intorno di x_0 | $g(x) \neq 0$ $\forall x \in U \cap X$, $x \neq x_0$).
Si dice che f è "o piccolo" di g per x che tende a x_0 e si scrive $f = o(g)$ o $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$
se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$, si scrive anche $f = o(1)$ per $x \to x_0$

Es.: $1-\cos x = o(x)$ per $x \to 0$

perché $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} =$

$$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\downarrow\, 1/2} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0$$

Es.: $\operatorname{sen} x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x} = 0$$

Il simbolo $o(g)$ indica una funzione di cui non si conosce la forma analitica e che soddisfa

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$$

Es.: $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

perché $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

$x^3 = o(x)$ per $x \to 0$

Es.: $x^4 = o(x^5)$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se $p > q \geq 0$ $\boxed{x^q = o(x^p) \text{ per } x \to \pm\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{p-q}} = 0 \qquad p-q > 0$$

Se $p > q \geq 0$ $\boxed{x^p = o(x^q) \text{ per } x \to 0}$

perché $\lim_{x\to 0} \frac{x^p}{x^q} = \lim_{x\to 0} x^{p-q} = 0 \qquad p-q > 0$

Algebra degli "o piccolo" (da sx a dx)

$$o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$$
$$o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o((g(x))^2)$$
$$g(x) \cdot o(g(x)) = o((g(x))^2)$$

Se f è funzione limitata,

$$f(x) \cdot o(g(x)) = o(g(x))$$

$$\forall \alpha > 0 \quad |o(g(x))|^{\alpha} = o(|g(x)|^{\alpha})$$

Es.: $\arctan x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

$1 - \cos x = o(x)$ per $x \to 0$

$$\arctan x^2 + 1 - \cos x = o(x)$$

Infatti, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x^2 + 1 - \cos x}{x} =$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\arctan x^2}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \right) = 0$$

$$\arctan x^2 - (1 - \cos x) =$$

$$= o(x) - o(x) = o(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x^2 - (1 - \cos x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\arctan x^2}{x} - \frac{1 - \cos x}{x} \right) = 0$$

Es.: $\arctan x^2 = o(x)$

$1 - \cos x = o(x)$

$$(\arctan x^2)(1 - \cos x) = o(x) \cdot o(x) = o(x^2)$$

Verifichiamolo (sfrutto la definizione)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x^2)(1-\cos x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\arctan x^2}{x}}_{\to 0} \; \underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{\to 0} = 0$$

Es.: $x^4 = o(x^5)$ per $x \to +\infty$

$f(x) = \tanh x$, $|f(x)| \leq 1$

$(\tanh x)\, x^4 = o(x^5)$ per $x \to +\infty$

Infatti, $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\tanh x)\, x^4}{x^5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\tanh x}{x} = 0$ ($\tanh x \to 1$)

Lemma (importante):

$f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X.

Se $\left[\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}\right]$,

allora
$$\boxed{f(x) = \ell\, g(x) + o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0}$$

Es.: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $f(x)$ $g(x)$ ℓ

$\Rightarrow \sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$ errore

$\underline{\text{ES.:}}$ $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\Rightarrow \ln(1+x) = x + o(x)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ nel secondo esempio iniziale

$\operatorname{sen} x - \ln(1+x) = \cancel{x} + o(x) - \cancel{x} - o(x) =$
$= o(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2 \operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{-\frac{1}{2}x^2} = ??$$

Nel primo esempio

$\operatorname{sen} x = x + o(x)$

$\operatorname{arctan} x = x + o(x)$

$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\ln^2(1+x) = x^2 + o(x^2)$

$\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$

$\tan x = x + o(x)$

Numeratore

$$\operatorname{sen} x - (1-\cos x) + \ln^2(1+x) =$$

$$= x + o(x) - \frac{1}{2}x^2 - o(x^2) + x^2 + o(x^2) =$$

$$= x + \frac{1}{2}x^2 + o(x) - o(x^2) + o(x^2)$$

$$\phantom{= x + \frac{1}{2}x^2}\ \ " \qquad\qquad\qquad\quad " \qquad\quad "$$

$$\ o(x) \qquad\qquad\quad o(x) \qquad\quad o(x)$$

$$= x + o(x)$$

Denominatore

$$x \arctan x - 2\tan x + \ln(1+x^2) =$$

$$= x(x+o(x)) - 2(x+o(x)) + x^2 + o(x^2) =$$

$$= x^2 + x\,o(x) - 2x - 2\,o(x) + x^2 + o(x^2) =$$

$$= -2x + 2x^2 + x\,o(x) - 2\,o(x) + o(x^2) =$$

$$\ " o(x) \qquad " o(x^2) = o(x) \qquad " o(x)$$

$$= -2x + o(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - 1 + \cos x + \ln^2(1+x)}{x \arctan x - 2\tan x + \ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{-2x + o(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-2 + \frac{o(x)}{x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

$\to 0$

$\to 0$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{-2x}$$

Anticipazione

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$+ o(x)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

Riprendiamo il secondo limite visto all'inizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{\underbrace{x \ln(1+x) - 2 \operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x}_{= -\frac{1}{2} x^2 + o(x^2)}}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x) - 2 \operatorname{sen}^2 x + 1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2} - o(x^2)}{-\frac{1}{2} x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \overbrace{\frac{x^3}{6}}^{o(x^2)} + \overbrace{o(x^3)}^{= o(x^2)} - o(x^2)}{-\frac{1}{2} x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}\right)} = -1$$

$\frac{o(x^2)}{x^2} \to 0$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}}$$

Teorema (Principio di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti)

Siano $f, f_1, g, g_1 : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X. Supponiamo che $g(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$. Se

$$\begin{cases} f(x) = f_1(x) + o(f_1(x)) \\ g(x) = g_1(x) + o(g_1(x)) \end{cases} \quad \text{per } x \to x_0$$

allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

nel senso che il primo limite esiste se e solo se esiste il secondo ed in tal caso i due limiti sono uguali

Dim.:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+o(f_1(x))}{g_1(x)+o(g_1(x))} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)\left(1+\frac{o(f_1(x))}{f_1(x)}\right)}{g_1(x)\left(1+\frac{o(g_1(x))}{g_1(x)}\right)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad //$$

$\frac{o(f_1(x))}{f_1(x)} \to 0$, $\frac{o(g_1(x))}{g_1(x)} \to 0$

LUNEDÌ 12/11

|| Sviluppi asintotici di composizione di funzioni

Es.: $\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$ per $y \to 0$

$\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$

$\frac{1}{x} \to 0$ per $x\to+\infty$

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \to +\infty$

Es.:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4) \quad \text{per } y \to 0$$

$$= \cos\left(e^{-x}\right) \quad y = e^{-x} \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$= 1 - \frac{(e^{-x})^2}{2} + \frac{(e^{-x})^4}{4!} + o\left((e^{-x})^4\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-4x}}{4!} + o\left(e^{-4x}\right) \quad \text{per } x \to +\infty$$

E' possibile procedere in questo modo?

Proposizione: f, φ, φ_1 funzioni reali di variabile reale tali che

$\varphi \circ f \quad (x \mapsto \varphi(f(x)))$ e

$\varphi_1 \circ f \quad (x \mapsto \varphi_1(f(x)))$ siano

definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ avente $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ come punto di accumulazione.

Assumiamo che

1) $\varphi(y) = \varphi_1(y) + o(\varphi_1(y)) \quad \text{per } y \to y_0$

2) $f(x) \to y_0 \quad \text{per } x \to x_0$

3) $f(x) \neq y_0$ definitivamente per $x \to x_0$

(Ipotesi analoghe a quelle del teorema di cambio di variabile. Si può omettere se $\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$ e $\lim_{y \to y_0} \varphi_1(y) = \varphi_1(y_0)$)

Allora

$$\varphi(f(x)) = \varphi_1(f(x)) + o(\varphi_1(f(x)))$$

per $x \to x_0$

(posso fare l'operazione compiuta nei due esempi)

Es.: $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$

$$\underbrace{e^y - 1 - y}_{\varphi(y)} = \underbrace{\frac{y^2}{2}}_{\varphi_1(y)} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0$$

$$\lim_{y \to 0} \varphi(y) = 0 = \varphi(0)$$

$$\lim_{y \to 0} \varphi_1(y) = 0 = \varphi_1(0)$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty$$

Ma $f(x)$ non è diverso da zero definitivamente per $x \to +\infty$

$$\varphi(f(x)) = e^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} - 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\overset{!}{=} \varphi_1(f(x)) + o(\varphi_1(f(x)))$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\right)$$

$$e^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} + o\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)$$

per $x \to +\infty$

MARTEDÌ 13/11

$$\boxed{\text{Confronti fra infiniti e infinitesimi}}$$

$$f(x) = x^4 + x^2 + \operatorname{sen} x$$

$$g_1(x) = x^2 + x$$

$$g_2(x) = x^4 + x^2$$

$$g_3(x) = x^6 + \sqrt{x}$$

per $x \to +\infty$

$f(x) = x^4 + o(x^4)$

$g_1(x) = x^2 + o(x^2)$

$g_2(x) = x^4 + o(x^4)$

$g_3(x) = x^6 + o(x^6)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g_1(x)}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g_3(x)}{f(x)} = +\infty$$

per $x \to 0^+$

$f(x) = \operatorname{sen} x + o(\operatorname{sen} x)$

$g_1(x) = x + o(x)$

$g_2(x) = x^2 + o(x^2)$

$g_3(x) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{g_1(x)}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{g_2(x)}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{g_3(x)}{f(x)} = +\infty$$

<u>Definizione</u>: $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X. Supponiamo che f e g siano entrambe infinite per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \begin{cases} 0 & f \text{ è un infinito di ordine inferiore a } g \\ l \in \mathbb{R}, l \neq 0 & f \text{ e } g \text{ sono infiniti dello stesso ordine} \\ +\infty & f \text{ è un infinito di ordine superiore a } g \\ \nexists & f \text{ e } g \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

<u>Definizione</u>: $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X. Supponiamo che f e g siano entrambe infinitesime $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \begin{cases} 0 & f \text{ è un infinitesimo di ordine superiore a } g \\ l \in \mathbb{R}, l \neq 0 & f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi dello stesso ordine} \\ +\infty & f \text{ è un infinitesimo di ordine inferiore a } g \\ \nexists & f \text{ e } g \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

Es.:

- $f(x) = \cot x \qquad g(x) = \cos x$

sono entrambe infinitesime $x \to \frac{\pi}{2}$

e $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow$ sono infinitesime dello stesso ordine

- $f(x) = \frac{1}{|x|}, \quad g(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

sono entrambe infinite per $x \to 0$

e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, e quindi

f è un infinito di ordine inferiore a g

Definizione: $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$,

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per X

1) Sia f infinitesima per $x \to x_0$

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e f è infinitesimo dello stesso ordine di $|x-x_0|^\alpha$, $\alpha>0$, allora f si dice che ha ordine di infinitesimo α per $x \to x_0$
- Se $x_0 = \pm\infty$ e f è infinitesimo dello stesso ordine $\frac{1}{|x|^\alpha}$, $\alpha>0$, allora f si dice che ha ordine di infinitesimo α per $x \to x_0$

(Es.: $\operatorname{sen} x$ ha ordine di infinitesimo 1 per $x \to 0$)

2) Sia f infinito per $x \to x_0$

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e f è un infinito dello stesso ordine di $\frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$, $\alpha>0$, allora si dice che f ha ordine di infinito α per $x \to x_0$
- Se $x_0 = \pm\infty$ e f è un infinito dello stesso ordine di $|x|^\alpha$, $\alpha>0$, allora si dice che f ha ordine di infinito α per $x \to x_0$

(Es.: $f(x) = x^4 + x^3 + \operatorname{sen} x$ ha ordine di infinito 4 per $x \to +\infty$)

Es.: $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ perché

$$0 \le |f(x)| = |x| \left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \le |x|$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

per teorema dei due carabinieri

$\lim_{x \to 0} \left|\frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{x \to 0} \left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right|$ non esiste

$f(x)$ e $g(x) = x$ non sono confrontabili

f non ha ordine di infinitesimo per $x \to 0$ perché, fissato $\alpha > 0$, si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{|x|^\alpha} \left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| =$$

$$= \lim_{x \to 0} |x|^{1-\alpha} \left|\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-\alpha > 0 \\ \nexists & \text{se } 1-\alpha \le 0 \end{cases}$$

e quindi non è mai finito e diverso da zero

Es.: $f(x) = 1 - \cos x$

f ha ordine di infinitesimo 2 per $x \to 0$ perché

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Es.: un polinomio di grado $n \geq 1$ ha ordine di infinito n per $x \to \pm\infty$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|P(x)|}{|x|^n} = \lim_{x \to \pm\infty} \left|\frac{P(x)}{x^n}\right| = |a_n|$$

Es.: $\boxed{\alpha > 0}$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha > 0$$

$f(x) = e^x$ è un infinito di ordine superiore ad ogni potenza di x per $x \to +\infty$

- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{|x|^\alpha}} = \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

$f(x) = e^x$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{|x|^\alpha}$ per $x \to -\infty$, $\forall \alpha > 0$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^\alpha} =$ $\alpha > 0$

$= \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0$

$y = \ln x \quad x = e^y$

$= \lim_{y \to -\infty} y e^{\alpha y} = \lim_{y \to -\infty} \frac{1}{\alpha} (\alpha y) e^{\alpha y} =$

$t = \alpha y$

$= \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{\alpha} t e^t = 0$

Valgono i seguenti limiti

- $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|\log_a x|^\beta}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha |\log_a x|^\beta = 0$$

- $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha a^x = \lim_{x \to 0} |x|^\alpha a^{-1/|x|} = 0$$

Introducendo il simbolo $\gg$ per dire che

$f(x) \gg g(x)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$

- se $\alpha > 0$, $a > 1$ per $x \to +\infty$ vale

$$e^x \gg x^\alpha \gg \log_e x$$

$x^\alpha = o(e^x)$

$\log_e x = o(x^\alpha)$

$$e^{x^3} \gg e^{x^2} \gg e^x$$

(gerarchia degli infiniti)