SUCCESSIONI
TEORIA

MERCOLEDÌ 14/11

Successioni

Cos'è una successione (reale)?

È una funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Solitamente si indica il valore di f in n con una lettera minuscola con a pedice n

$$f(n) = a_n \quad (o\ b_n,\ \alpha_n,\ c_n)$$

Es.:

- $f(n) = (-1)^n$

$$\underset{n=0}{+1},\ \underset{n=1}{-1},\ \underset{n=2}{+1},\ \underset{n=3}{-1},\ +1,\ -1 \ \dots$$

$$\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

- $f(n) = \dfrac{1}{n}$

$$\underset{n=1}{1},\ \underset{n=2}{\frac{1}{2}},\ \underset{n=3}{\frac{1}{3}},\ \frac{1}{4},\ \dots$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$$

- $f(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1 \qquad \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n \geq 1}$

$$\underset{n=1}{2},\ \underset{n=2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2},\ \underset{n=3}{\left(\frac{4}{3}\right)^3},\ \underset{n=4}{\left(\frac{5}{4}\right)^4}$$

Es.: Algoritmo di Erone

Cerchiamo una successione di numeri razionali $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{2}$$

$\to +\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$

$$a_0 = 2 \quad > \sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_1}\right) \in \mathbb{Q}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_2}\right) \in \mathbb{Q}$$

in generale, dato $a_n \in \mathbb{Q}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \in \mathbb{Q}$$

$$\lim_n a_n = \sqrt{2}$$

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, cioè $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La funzione $n \mapsto a_n$ è decrescente, e quindi ha limite finito perché $a_n > 0$

- Quanto vale il limite?

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Calcoliamolo

$\lim_n a_n$

$a_n = f(n)$

$a_{n+1} = f(n+1)$

$f(n) \to l \Rightarrow f(n+1) \to l$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \mid n > M \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$

$$\underbrace{a_{n+1}}_{l} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)}_{\xrightarrow{n\to+\infty}\ \frac{1}{2}\left(l+\frac{2}{l}\right)} \Rightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right)$$

e $l \neq 0$

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \qquad 2\ell^2 = \ell^2 + 2$$

$$\ell^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \ell = \sqrt{2} \quad (\text{perché } \ell \geq 0)$$

$$\Rightarrow \lim_n a_n = \sqrt{2} \quad //$$

Sappiamo cosa vuol dire

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_n a_n = \ell \\ \forall \text{ intorno } V \text{ di } \ell \quad \exists\, M > 0 \mid n > M \Rightarrow a_n \in V\end{gathered}}$$

Si può riscrivere come

$\forall$ intorno V di ℓ, $a_n \in V$ definitivamente (e si omette per $n \to +\infty$ perché $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$)

Definizione: Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice

- convergente se $\lim_n a_n$ esiste finito (cioè è un numero reale)
- infinitesima se $\lim_n a_n = 0$

- **divergente** se $\lim_n a_n$ è uno dei simboli $+\infty$ o $-\infty$
- **regolare** o **determinato** se $\lim_n a_n$ esiste
- **irregolare** o **indeterminato** se $\lim_n a_n$ non esiste

Es.: la successione $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indeterminata.
Lo dimostriamo formalmente.
Per assurdo, sia $\lim_n (-1)^n = l \in [-1,1]$

$l \geq 0$ o $l \leq 0$, una delle due vale.
Per fissare le idee, assumiamo che $l \geq 0$

$\Rightarrow$ per n dispari $|(-1)^n - l| = |-1-l| =$
$= 1+l \geq 1$

Dovrebbe essere che
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0 \mid n > M \quad |(-1)^n - l| < \varepsilon$

Prendo $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n$ dispari $|(-1)^n - l| \geq 1 > \frac{1}{2}$
e questo nega la definizione di limite //

$\left(\lim_n a_n = +\infty \iff \right.$

$\left. \forall M>0 \ \exists N>0 \mid n>N \Rightarrow a_n > M \right)$

Proposizione: Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione convergente. Allora è limitata, cioè $\exists M>0 \mid |a_n| \le M \ \forall n\in\mathbb{N}$

Dim.: $\lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R}$

Per la definizione di limite, $\exists N\in\mathbb{N} \mid$ $n>N$ $|a_n - \ell| < 1$ (definizione di limite con $\varepsilon = 1$)

$$\big|\, |a_n| - |\ell| \,\big| \le |a_n - \ell| < 1$$

$\Rightarrow$ se $n>N$, $|a_n| < 1 + |\ell|$

$|a_{N+1}|, |a_{N+2}|, |a_{N+3}|, |a_{N+4}| \dots < 1+|\ell|$

$\Rightarrow$ ho trovato un maggiorante, $1+|\ell|$, dei valori che la successione assume per $n>N$

Restano fuori i valori che la successione assume per $n\le N$, cioè

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$

Prendo

$$M = \max \{ \underbrace{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|}_{\substack{|a_n| \leq M \\ \forall n \leq N}}, \ 1+|\ell| \}$$

$$1+|\ell| \Rightarrow |a_n| < 1+|\ell| \quad \forall n > N$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad //$$

convergente $\Rightarrow$ limitata

$\cancel{\Leftarrow}$

Una successione può essere limitata

senza essere convergente

$(-1)^n$ è irregolare, ma

$|(-1)^n| = 1 \quad \forall n \Rightarrow \{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

è limitata.

GIOVEDÌ 15/11

Calcolo di limiti di successioni

- $\lim_n a_n = l \in \mathbb{R} \iff \lim_n |a_n - l| = 0$
- $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesimo $\iff$ $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesimo
- Se $\lim_n a_n = l$, allora $\lim_n |a_n| = |l|$, dove, se $l = \pm\infty$, si intende $|l| = +\infty$

[Non è vero che $\lim_n |a_n| = |l| \Rightarrow \lim_n a_n = l$]

Es.: $a_n = (-1)^n$, che è indeterminata

$|a_n| = 1 \quad \forall n$ e quindi $\lim |a_n| = 1$

Teorema della permanenza del segno:

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione tale che $\lim_n a_n = l > 0$. Allora $a_n > 0$ definitivamente per $n \to +\infty$

Teorema del confronto: Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni tali che

$a_n \leq b_n$ definitivamente per $n \to +\infty$.

Se $\lim_n a_n = l_a$ e $\lim_n b_n = l_b$, allora

$$l_a \leq l_b$$

$\exists N > 0 \mid n > N \Rightarrow a_n \leq b_n$

Teorema dei due carabinieri: Siano

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ definitivamente.}$$

Se $\lim_n a_n = \lim_n c_n = l$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = l$$

Successioni monotone

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, cioè

$$a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$
è decrescente se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$$

$\Rightarrow$ $a_n = f(n)$ $\quad f(n+1) \le f(n)$

$\Rightarrow$ se se $p < q \Rightarrow a_q \le a_p$

$$f(q) \le f(p)$$

Se $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left(p < q \Rightarrow a_q \le a_p \right)$$

$$a_q \le a_{q-1} \le a_{q-2} \le \dots \le a_{q-(q-p)} = a_p$$

Definizione: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione

- si dice (monotona) crescente se
$$a_{n+1} \ge a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
- si dice (monotona) strettamente crescente se
$$a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- si dice (monotona) decrescente se

$$a_{n+1} \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- si dice (monotona) strettamente decrescente se

$$a_{n+1} < a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- si dice definitivamente monotona se $\exists N \mid \{a_n\}_{n \geq N}$ è monotona

($\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente se

$\exists N \mid \quad n \geq N \implies a_{n+1} \leq a_n$

Es.:

$a_1 = 2$ $\qquad a_5 = 10$

$a_2 = -1$ $\qquad a_6 = 20$

$a_3 = 4$ $\qquad a_7 = -21$

$a_4 = -7$ $\qquad a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ per $n \geq 8$

$\implies \{a_n\}_{n\geq 1}$ è definitivamente decrescente perché $a_{n+1} = \operatorname{sen}\frac{1}{n+1} \leq \operatorname{sen}\frac{1}{n} = a_n$ $\forall n \geq 8$)

Teorema: Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione monotona. Allora $\lim_n a_n$ esiste e valgono

$$\lim_n a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \,, \text{ se } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è crescente}$$

$$\lim_n a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \,, \text{ se } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ è decrescente}$$

Es.: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente, limitata, $0 \le a_n \le 3$ $\forall n$, e quindi converge

Dim. del teorema. Per fissare le idee assumiamo che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia crescente e dimostriamo che

$$\lim_n a_n = \sup_n a_n = S$$

Due casi

- $S = +\infty$

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall M>0 \ \exists N>0 \mid n>N \Rightarrow a_n > M$$

Fissato $M>0$, poiché $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente illimitata trovo $n_0 \in \mathbb{N}$ | $a_{n_0} > M$

Se $n > n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > M$

perché la successione è crescente.
Allora basta prendere $N = n_0$ nella definizione di limite

- $S \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che

$\forall \varepsilon>0 \; \exists N>0 \mid n>N \Rightarrow |a_n - S| < \varepsilon$ $\quad S - a_n \quad (S \geq a_n)$

cioè

$\forall \varepsilon>0 \; \exists N>0 \mid n>N \Rightarrow \underbrace{S - a_n < \varepsilon}_{a_n > S-\varepsilon}$

Fissato $\varepsilon>0$, trovo n_0 |
$a_{n_0} > S - \varepsilon$ (seconda proprietà dell'estremo superiore)

$n > n_0 \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > S - \varepsilon$

$\Rightarrow$ basta prendere $N = n_0$ nella definizione di limite //

<u>Es.:</u> progressione geometrica di ragione q, $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- è monotona strettamente crescente se $q>1$, $\lim_n q^n = +\infty$
- è monotona strettamente decrescente se $0<q<1$, $\lim_n q^n = 0$
- $q=0$, $\lim_n q^n = 0$
- $q=1$ $q^n = 1$ $\forall n$ $\lim_n q^n = 1$
- $q<0$ la successione non è monotona

- $-1<q<0 \Rightarrow \lim_n q^n = 0$
- $q \leq -1$ la successione è indeterminata

<u>Esempio importante</u>

$$\boxed{\lim_n \frac{n!}{n^k} = +\infty} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$1! = 1$ $\qquad 2! = 1\cdot 2 = 2$ $\qquad 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots n$. Per convenzione $0! = 1$

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1}_{(n-1)!} = n\cdot(n-1)!$$

$$n^k = o(n!) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\frac{n!}{n^k} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}^{\text{k fattori} \geq n-k+1}\cdot(n-k)!}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ \cdots\ \cdot n}_{\substack{\text{k fattori}\\ \text{tutti uguali ad } n}}} \qquad n>k$$

è il più piccolo fra tutti i precedenti

$$= \underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}_{\text{k fattori}}\cdot(n-k)! \geq$$

$$\geq \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k (n-k)! =$$

$$= \left(1+\frac{1-k}{n}\right)^k (n-k)! \longrightarrow +\infty$$

per $n \to +\infty$

Esempio importante

$$\longrightarrow \lim_n \frac{3^n}{n} = +\infty$$

e in generale, $\displaystyle \lim_n \frac{a^n}{n^k} = +\infty$

$\forall a>1$ e $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{3^n}{n} = \frac{3^{n/2}}{n} \cdot 3^{n/2}$$

e dimostriamo che $\frac{3^{n/2}}{n} \geq 1$

$\forall\ n \geq 1$, cosicché

$$\frac{3^n}{n} \geq 3^{n/2} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } n \to +\infty,$$

e si conclude

per induzione

- $n = 1 \qquad \frac{3^{1/2}}{1} = \sqrt{3} \geq 1$

- devo dimostrare che

$$\frac{3^{n/2}}{n} \geq 1 \implies \frac{3^{\frac{(n+1)}{2}}}{n+1} \geq 1$$

$$3^{n/2} \geq n \implies 3^{\frac{(n+1)}{2}} \geq n+1$$

$$3^{\frac{(n+1)}{2}} = 3^{n/2} \cdot \sqrt{3} \geq n \cdot \sqrt{3}$$

ipotesi induttiva

Se dimostro che $n \cdot \sqrt{3} \geq n+1$, sono a posto. Questo è vero se

$$n \geq \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \in \,]1, 2[$$

devo verificare cosa succede con $n = 2$

$\frac{3}{2} \geq 1$ vero!

Da $\lim_n \frac{2^n}{n} = +\infty$ → per caso

si deduce che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$x > 0$, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{2^x}{x}$ perché $e > 2$

$[x]$ → parte intera di x

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{2^x}{x} \geq \frac{2^{[x]}}{x} \geq \frac{2^{[x]}}{[x]+1} = \frac{1}{2} \frac{2^{[x]+1}}{\underset{\mathbb{N}}{\underbrace{[x]+1}}}$$

$[x] \leq x < [x]+1$

$+\infty$ per $x \to +\infty$

Esempio importante

$$\boxed{\begin{gathered} \lim_n \frac{n!}{2^n} = +\infty \\ \text{e, in generale,} \\ \lim_n \frac{n!}{a^n} = +\infty \quad \forall a > 0 \end{gathered}}$$

$\Rightarrow a^n = o(n!)$ per $n \to +\infty$

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{\overbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2}}_{n \text{ fattori}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \to +\infty$$

per $n \to +\infty$

Esempio importante

$$\boxed{\lim_n \frac{n^n}{n!} = +\infty}$$

$n! = o(n^n)$

per $n \to +\infty$

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{\overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}^{n \text{ fattori}}}{\underbrace{n \cdot (n-1) \cdots 1}_{n \text{ fattori}}} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2}}_{n-1 \text{ fattori} \geq 1} \cdot n \geq n \to +\infty$$

Gerarchia di infiniti

$$\boxed{n^n \gg n! \gg a^n \gg n^k \gg \log_a n \quad \text{per } n \to +\infty \text{ e } \forall a > 1 \text{ e } \forall k \geq 1}$$

Esistenza del limite e sottosuccessioni

Enunciamo un risultato che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente affinché una successione sia convergente.

Diamo prima una definizione

def: Una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice di Cauchy o fondamentale se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero N tale che

$$n,m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Oss: La definizione dice che una succ. è di Cauchy quando man mano che n cresce i suoi termini sono sempre più vicini tra loro

$|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2 \quad \forall n$ $\qquad$ $|n^2 - (n+1)^2| = 2n+1 \to +\infty \quad n\to+\infty$

Per esempio $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ non sono di Cauchy.

Teorema (Criterio di Cauchy): condizione necessaria e sufficiente affinché una successione converga è che essa sia di Cauchy.

Oss: il criterio di Cauchy dice che una successione è convergente se e solo se i suoi termini si avvicinano tra loro sempre più al crescere di n. Il criterio dà una condizione intrinseca ad una successione per stabilire se essa è convergente oppure no.

Solo con la def. di limite non è possibile farlo, perché fa intervenire anche il valore del limite

Invece il fatto di essere di Cauchy per una successione coinvolge solo i termini della successione stessa.

Oss: La sufficienza del criterio di Cauchy per la convergenza di una succ. equivale alla completezza. Infatti un analogo criterio che stabilisca che una succ. di Cauchy a valori razionali converge ad un numero razionale non si può enunciare. Infatti è possibile costruire una successione di numeri razionali convergente (e quindi di Cauchy) a $\sqrt{2}$ ($\notin \mathbb{Q}$).

Es: $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 1/2$, $s_3 = 1 + 1/2 + 1/3$, $s_4 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Abbiamo che $|s_{n+1} - s_n| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

E' di Cauchy? NO. Infatti

$$|s_{2n} - s_n| = \left| \left(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + 1/{n+1} + \dots \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right|$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{2n} \\ \vee\!/ & \vee\!/ & \vee\!/ \\ 1/2n & 1/2n & 1/2n \end{array}$$

Preso $\varepsilon < 1/2$, posso scegliere n grande quanto voglio, ma

$|s_{2n} - s_n| > \varepsilon \Rightarrow \{s_n\}_{n \geq 1}$ non è di Cauchy.

Oss: Utilizzando il criterio di Cauchy è possibile dimostrare che $\{\operatorname{sen} n\}_{n \geq 1}$ non è convergente.

Si dimostra che $\forall n \in \mathbb{N}$ tale che

$\exists k \geq 1 : -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq n \leq 2k\pi$ → int. di ampiezza $\pi/2 > 1$

(cioè $n \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi]$ per qualche $k \geq 1$)

si ha $\quad |\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} n| \geq \underbrace{\min\{1-\cos 1, \operatorname{sen} 1\}}_{C} > 0$

Infatti:

Osservo che $\quad \operatorname{sen}(n+1) = \operatorname{sen} n \cos 1 + \cos n \operatorname{sen} 1$, da cui

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} n &= \operatorname{sen} n \cos 1 + \cos n \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} n \\ &= \operatorname{sen} n \cdot (\cos 1 - 1) + \cos n \operatorname{sen} 1\end{aligned}$$

Si prende n tale che $\operatorname{sen} n \leq 0$ e $\cos n \geq 0$

$\left[\text{per esempio } n \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right] \quad k \geq 1 \right]$

Si ha $\quad |\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} n| = (1-\cos 1)|\operatorname{sen} n| + \operatorname{sen} 1 \, |\cos n|$

$$\geq C \underbrace{(\cos n - \operatorname{sen} n)}_{\geq 1} \geq C$$

si mostra

Se $0 < \varepsilon < C$, allora per infiniti $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} n| \geq C > \varepsilon$$

e quindi $\{\operatorname{sen} n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è successione di Cauchy.

Sottosuccessioni

Es $\quad \{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$1 \quad 1 \quad 1$ ← posto pari

$-1 \quad -1 \quad -1$ ← posto dispari

Posso pensarla

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Es: $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n \geq 1}$

$$-1, \ \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ -\frac{1}{5}, \ \frac{1}{6}$$

$$-1 \qquad -\frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{5} \leftarrow \text{punti dispari}$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{6} \leftarrow \text{punti pari}$$

Posso pensarla come

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ pari}, n \neq 0 \\ -\frac{1}{n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Ma volendo posso estrarre anche i punti multipli di 3 e ottenere una nuova successione

$$-\frac{1}{3}, \ \frac{1}{6}, \ -\frac{1}{9}, \ \dots$$

def: data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice sottosuccessione estratta di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ogni successione $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione strettamente crescente di numeri naturali (cioè $n_k\in\mathbb{N}$ e $n_{k+1}>n_k$ per ogni $k\in\mathbb{N}$).

Es: • $\{\overbrace{(-1)^n}^{a_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

estraiamo la sottosuccessione di termini di posto pari: $n_k=2k$ (strettamente crescente) e $(-1)^n$ con $n=2k$ diventa $\underbrace{(-1)^{2k}}_{a_{n_k}}=1\ \forall k$

estraiamo la sottosuccessione di termini di posto dispari $n_k=2k+1$ e $(-1)^n$ con $n=2k+1$ diventa $\underbrace{(-1)^{2k+1}}_{a_{n_k}}=-1\ \forall k$

• $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$

estraiamo la successione dei termini di posto multiplo di 3: $n_k=3k$ e $\frac{(-1)^n}{n}$ con $n=3k$ diventa $\frac{(-1)^{3k}}{3k}=\frac{(-1)^k}{3k}$

$\Rightarrow a_{n_k}=\frac{(-1)^k}{3k}\quad\forall\, k\geq 1$

Successioni (Teoria) - 20/11/2018

martedì 20 novembre 2018 11:36

Esempi di sottosuccessioni

Es: $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Estraiamo la sottosuccessione dei termini di posto pari

$n_k = 2K \quad K\in\mathbb{N}$

Prendo $(-1)^n$ e metto $n = 2K$.

Ottengo

$$(-1)^{2k} = 1 \quad \forall\ K$$

$a_{n_k} = 1 \quad \forall\ K\in\mathbb{N}$

Estraggo i termini di posto dispari

$n_k = 2k+1 \quad \forall\ K\in\mathbb{N}$

$(-1)^n$ con $n = 2K+1$ e ottengo

$$(-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall\ K\in\mathbb{N}$$

$a_{n_k} = -1 \quad \forall\ K\in\mathbb{N}$

Es: $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\geq 1}$

$\{ \quad n \quad \}_{n \geq 1}$

Termini di posto multiplo di 3

$$n_k = 3k \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

$\dfrac{(-1)^n}{n}$ e metto $n = 3k$

Ottengo $$\frac{(-1)^{3k}}{3k} = \frac{(-1)^k}{3k}$$

$$a_{n_k} = \frac{(-1)^k}{3k} \qquad \forall\ k \geq 1$$

__Proposizione__: Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. reale. Allora $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha limite ℓ se e solo se ogni sua sottosuccessione converge ad ℓ.

__Oss__: Per dimostrare che $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non ha limite è suff. trovare una sottosucc. che non ha limite o due sottosucc. che hanno limite diverso

__Es__: $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha due sottosucc. che convergono a due numeri diversi: $\{(-1)^{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{(-1)^{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$

$$\{(-1)^{2k}\}_{k \in \mathbb{N}} \to 1 \qquad \{(-1)^{2k+1}\}_{k \in \mathbb{N}} \to -1$$

$\Rightarrow \{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ __non__ converge

$\Rightarrow \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ <u>non</u> converge

<u>Es</u>: $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+2n^3+1}} \operatorname{sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\dfrac{n^2}{\sqrt{n^4+2n^3+1}} \to 1$$

$$\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ 1 & n = 4k+1 \quad \exists k\in\mathbb{N} \\ -1 & n = 4k+3 \quad \exists k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

[per esempio: $\operatorname{sen}\left((4k+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$]

$\{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sottosucc. t.c. $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k} = 0$

$\{a_{4k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sottosucc. t.c. $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{4k+1} = 1$

$\Rightarrow \{a_n\}_n$ ha limite

<u>Teorema</u> (di Bolzano-Weierstrass):

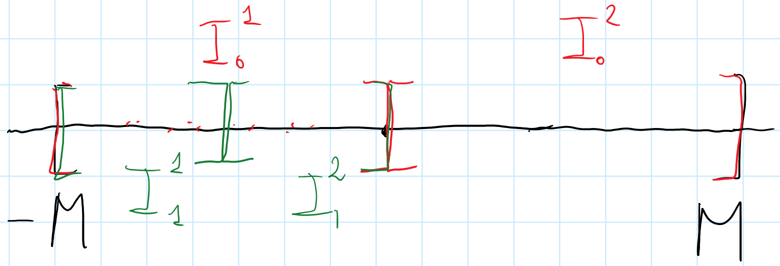
Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. reale limitata.

$\}_{n\in\mathbb{N}}$

Allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosucc. convergente.

<u>Idea</u> : $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata $\Rightarrow \exists\, M>0 \;\big|\; |a_n|\le M \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$-M \le a_n \le M \quad \forall n\in\mathbb{N}$



$\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I_0^1\}$ o $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I_0^2\}$

è un insieme infinito

p. es. questo

$\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I_1^1\}$ o $\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\in I_1^2\}$

è un insieme infinito

p. es. questo

continuo a dividere a metà

e ottengo intervalli di ampiezza sempre più piccola dove cadono termini della mia succ. per una quantità infinita di indici

... $\Rightarrow$ mi permette di costruire una sottosucc. di Cauchy (e quindi convergente)

<u>Limiti di successione e limiti di funzione</u>

Limiti di successione e limiti di funzione

Teorema: Sia f funzione reale e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to di acc. per dom f. Allora f ha limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \longrightarrow x_0$ se e solo se per ogni succ. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a valori in dom $f \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0 si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

dim: Supp. che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e che

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia succ. in dom $f \setminus \{x_0\}$ conv.

a x_0. Applico il cambio di variabile:

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \overset{y = a_n}{=} \lim_{y \to x_0} f(y) = l$$

Viceversa, supp. che per ogni succ. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in dom $f \setminus \{x_0\}$ conv. a x_0 si abbia

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

Voglio mostrare che

$$f(x) = l$$

Per semplicità, supp. $x_0 \in \mathbb{R}$

Supp. per assurdo che f non abbia limite l per $x \longrightarrow x_0$. Allora $\exists\ V$ int. di l t.c. $\forall\ \delta > 0\ \ \exists\ x \in \operatorname{dom} f$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta$ e $f(x) \notin V$

Cons. $\delta = \frac{1}{n}$ per ciascun $n \geq 1$

- $n = 1$ $\exists\ a_1 \in \operatorname{dom} f$ t.c. $0 < |a_1 - x_0| < \frac{1}{1}$ e $f(a_1) \notin V$
- $n = 2$ $\exists\ a_2 \in \operatorname{dom} f$ t.c. $0 < |a_2 - x_0| < \frac{1}{2}$ e $f(a_2) \notin V$
- Per ciascun $n \geq 1$ ho $a_n \in \operatorname{dom} f$ t.c. $0 < |a_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e $f(a_n) \notin V$

Ho che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = x_0 \quad \text{e} \quad f(a_n) \not\longrightarrow l \text{ per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ ASSURDO!!! #

Es: il teorema è spesso utilizzato per dimostrare che una funzione non ha limite in un punto

Es: Cons.

$$\lim_{x\to 0} \overbrace{g\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}^{h(x)}$$

ove

$$g(y) = \begin{cases} \cos y & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi n} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$h(a_n) = g\left(a_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right) =$$

$$= g(a_n) = \cos\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right) \longrightarrow 1 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$h(b_n) = g\left(b_n \operatorname{sen}(2\pi n)\right) = g(0) = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Ho trovato due succ. infinitesime $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ t.c.

$$\lim_{n} h(a_n) = 1 , \lim_{n \to +\infty} h(b_n) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} h(x) \ \underline{\underline{\text{non}}} \ \text{esiste}$$

__Teorema__ : Siano f funzione reale e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ p.to di acc. per dom f. Allora f ha limite finito per $x \to x_0$ se e solo se $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ U$ int. di x_0 t.c.

$$x_1, x_2 \in U \cap \operatorname{dom} f , x_1, x_2 \neq x_0 \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

__Oss__: la condizione è intrinseca, nel senso che non fa intervenire il valore del limite.

__Oss__: Si può mostrare che una funzione f periodica (non costante) di periodo $T > 0$ non ha limite finito per $x \to +\infty$

Infatti, siano $\alpha, \beta \in [0, T[$ t.c.

$$f(\alpha) - f(\beta) \neq 0$$

Definisco

$$\alpha_k = \alpha + kT , \quad \beta_k = \beta + kT \quad \forall k \geq 1$$

Sia ε t.c.

$$0 < \varepsilon < |f(\alpha) - f(\beta)|$$

Fissato un qualunque intorno U di $+\infty$ troviamo $k \in \mathbb{N}$ t.c. $\alpha_k, \beta_k \in U$ e per cui vale

$$|f(\alpha_k) - f(\beta_k)| = |f(\alpha + kT) - f(\beta + kT)|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ periodica}}}{=} |f(\alpha) - f(\beta)| > \varepsilon$$

e quindi la condizione del teorema non può essere vera.