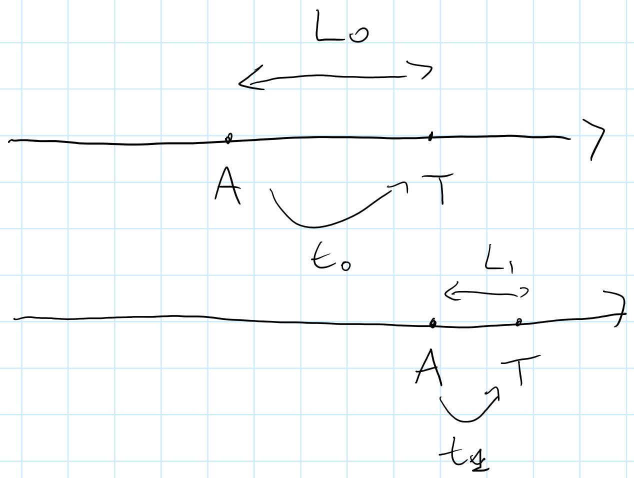
SERIE TEORIA

Serie numeriche

Paradosso di Zenone

: "se Achille dà un seppur piccolo vantaggio alla tartaruga non la raggiungerà mai"



$v_A > v_T$

v_A: velocità di Achille

v_T: velocità tartaruga

t_0 = tempo impiegato da Achille per percorrere $L_0 \Rightarrow t_0 = \dfrac{L_0}{v_A}$

L_1 = spazio percorso dalla tartaruga nel tempo in cui Achille ha percorso $L_0 \Rightarrow L_1 = v_T t_0$

In generale $t_n = \dfrac{L_n}{v_A}$, $L_{n+1} = v_T t_n$

Per induzione $t_n = \dfrac{L_n}{v_A} = \dfrac{v_T t_{n-1}}{v_A} \overset{\alpha = v_T/v_A}{=} t_{n-1}\alpha = \dots$

$= t_0 \alpha^n$

Achille raggiunge la tartaruga se

$$T = t_0 + t_1 + t_2 + \dots < +\infty$$

Sarà vero?

$$T = t_0 + t_1 + t_2 + \dots = t_0 + t_0 d + t_0 d^2 + \dots$$

$$= t_0 \underbrace{\left(1 + d + d^2 + \dots\right)}_{\frac{1}{1-d}} = t_0 \frac{1}{1-d} = \frac{L_0}{v_A - v_T}$$

se $d < 1$
(ok $v_A > v_T$)

Mercoledì 21/11

Serie

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione di numeri reali

Vogliamo definire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n\geq 0} a_n \quad \text{notazioni equivalenti}$$

Esempio importante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Sappiamo sommare solo un numero finito di termini

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\boxed{S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}$$

quantità ben definita $\forall n \in \mathbb{N}$

Cosa succede per $n \to \infty$?

Mi sono costruito a partire da $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ una nuova successione $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Idea: quando $n \to \infty$, il comportamento di $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deve rappresentare la somma degli infiniti termini $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} r^k \quad \text{con } r = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Definizione: Data una successione reale $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice serie di termine generale a_n la successione delle ridotte parziali, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definita da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

S_n è detta somma parziale n-esima

Si indica con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Definizione: Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice

1) convergente, se la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle ridotte parziali è convergente
2) divergente, se la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente
3) indeterminata o irregolare, se tale è $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cioè se $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite

Se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, finito o infinito, allora

S si dice somma della serie e si scrive $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Studiare il carattere di una serie vuol dire determinare se la serie è convergente, divergente o indeterminata

$\boxed{\text{Esempio importante}}$ serie geometrica di ragione $r \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$

(prima abbiamo visto quella di ragione $\frac{1}{2}$)

$$S_n = r^0 + r + r^2 + \dots + r^n =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1 - r^{n+1}}{1-r} & \text{se } r \neq 1 \\ n+1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

$$r^0 + r + \dots + r^n = 1^0 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^n =$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ volte}}$$

- $r = 1 \Rightarrow \lim_n S_n = +\infty$, la serie diverge a $+\infty$

- $r \neq 1$

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{1-r^{n+1}}{1-r} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & \text{se } |r|<1 \\ +\infty & \text{se } r>1 \\ \nexists & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

$\to r^{n+1} \to 0$

$\to r^{n+1} \to +\infty$

$\{r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è indeterminata

La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge $\iff |r|<1$ e in tal caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Esempio

Serie di Mengoli $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

serie telescopica

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] =$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_n S_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \underbrace{1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}}_{k=1} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}}_{k=2} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}}_{k=3} + \dots + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}}_{k=n}$$

La serie converge e la sua somma è 1

Serie telescopica è una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(f(k) - f(k+1)\big) \quad \text{, per qualche}$$

funzione $f : \text{dom} f \to \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \big(f(k) - f(k+1)\big) =$$

$$= \overbrace{f(0) - \cancel{f(1)}}^{k=0} + \overbrace{\cancel{f(1)} - \cancel{f(2)}}^{k=1} + \overbrace{\cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}}^{k=2} +$$

$$+ \underbrace{\cancel{f(3)} - f(\cancel{n})}_{k=3} + \dots + \underbrace{f(\cancel{n}) - f(n+1)}_{k=n} = f(0) - f(n+1)$$

$$\lim_n S_n = \lim_n \big(f(0) - f(n+1)\big)$$

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} =$$

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \frac{(n+1)}{n+2}\right] =$$

$$f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - f(n+1)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = f(1) - f(n+1) =$$

$$= \ln 2 - \ln \frac{n+2}{n+1}$$

$$\lim_n S_n = \ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \qquad S_n = ??$$

Abbiamo bisogno di criteri di convergenza

Proposizione: Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ serie convergenti. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge.

Dim.: $S_n^a = \sum_{k=0}^{n} a_k$, ridotta n-esima di $\sum_n a_n$

$S_n^b = \sum_{k=0}^{n} b_k$, ridotta n-esima di $\sum_n b_n$

$\lim_n S_n^a = S^a \in \mathbb{R}$, $\lim_n S_n^b = S^b \in \mathbb{R}$ perché le serie convergono

Ridotta n-esima di $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) =$$

$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\dots+(a_n+b_n)$$

$$= (a_0+a_1+\dots+a_n)+(b_0+b_1+\dots+b_n) =$$

$$= S_n^a + S_n^b$$

$$\Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n (S_n^a + S_n^b) = S^a + S^b$$

per il teorema sul limite di una somma. //

<u>Proposizione</u>: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serie convergente e $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty}(c\, a_n)$ è convergente e la sua somma è c per la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

<u>Proposizione</u>: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serie divergente e $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n$ è divergente.

Il prossimo risultato ci dice che il carattere di una serie dipende solo dalle code della serie

<u>Proposizione</u>: Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ | $\forall\, n \geq n_0$ $a_n = b_n$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere (entrambe convergono, divergono o sono indeterminate)

- <u>Es.</u>: $a_n = \frac{1}{2^n}$

$$b_n = \begin{cases} n & \text{se } n < 10^5 \\ \frac{1}{2^n} & \text{se } n \geq 10^5 \end{cases}$$

Preso $n_0 = 10^5$, $\forall\, n \geq n_0$ $b_n = a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere (e quindi convergono)

- Il significato della proposizione è che la convergenza di una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

dipende solo da $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$

coda della serie

<u>Dim. della proposizione</u>

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$

$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \quad b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n_0-1}, a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_n, \dots$

$n \geq n_0$

$$S_n^a = \sum_{k=0}^{n} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n_0-1} + a_{n_0} + \dots + a_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

$$S_n^b = \sum_{k=0}^{n} b_n = b_0 + b_1 + \dots + b_{n_0-1} + a_{n_0} + \dots + a_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n_0-1} b_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

n_0 è fissato

$$\lim_n S_n^a = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k \right) \quad \text{esiste}$$

$\to$ numero reale fissato

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

$$\lim_n S_n^b = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} b_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k \right) \text{ esiste}$$

numero reale fissato

$$\Longleftrightarrow \quad \exists \lim_n \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

questo mi dice che le due serie hanno lo stesso carattere //

<u>Teorema</u> $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione reale.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$

<u>N.B.:</u> $\lim_n a_n = 0$ <u>non implica</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Basta prendere $a_n = \frac{1}{n}$

Allora $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, è divergente, come vedremo

Dim.:
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$
$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$$

$$S_n - S_{n-1} = (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) + \\ - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

$$\lim_n S_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_n S_{n-1} = S$$

$$\lim_n a_n = \lim_n (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \ //$$

$\left(\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \lim_n b_n = \lim_n b_{n-1} = \lim_n b_{n+1} \right)$

Conseguenza: se $\lim_n a_n$ non esiste, o esiste, ma è diverso da 0, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge o è indeterminata.

Si può chiedere solo che $a_n \geq 0$ definitivamente

Teorema: Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione a termini non negativi ($a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$). Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente o divergente a $+\infty$. In particolare, non è indeterminata.

Dim.: Consideriamo la successione delle ridotte $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_n}_{=S_n} + a_{n+1} =$$

$$= S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e quindi ha limite, finito o $+\infty$ //

Teorema (Criterio di Cauchy per le serie):

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0 \mid \forall n > N$ e $\forall p \geq 1$ $p \in \mathbb{N}$, vale

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Dim.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ converge la successione $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ delle ridotte parziali $\Leftrightarrow$

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy $\iff$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N>0 \mid$ se $n>N$ e $p\geq 1, p\in\mathbb{N}$

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

$$S_{n+p}-S_n = \sum_{k=0}^{n+p} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k =$$

$$= (\underbrace{a_0+a_1+\dots+a_n}_{S_n} + a_{n+1}+\dots+a_{n+p}) - S_n =$$

$$= a_{n+1}+\dots+a_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

$\Rightarrow \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy (e quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente) $\iff$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N>0 \mid$ se $n>N$ e $p\geq 1, p\in\mathbb{N}$,

vale $\underbrace{\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|}_{=\,|S_{n+p}-S_n|} < \varepsilon$ c.v.d. //

GIOVEDÌ 22/11

Esempio importante

Dimostriamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ serie armonica

E' una serie a termini positivi e quindi non è indeterminata

Per provare che diverge dimostriamo che non soddisfa il criterio di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \mid n > N \text{ e } p \geq 1$$
$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon$$

In particolare, per $p = n$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \varepsilon \qquad \forall n > N$$

Preso $\varepsilon < \frac{1}{2}$ la disuguaglianza non può essere verificata

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ addendi}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}, \quad \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}$$

//

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI (≥ 0)

Teorema: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serie tale che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ (≥ 0) è convergente. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Osservazione: il teorema non dice niente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$, cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ può convergere, divergere o essere indeterminata.

Es.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (vedremo più avanti la dimostrazione). Ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Es.: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$

è indeterminata

$S_0 = 1 \quad S_1 = 0 \quad S_2 = 1 \quad S_3 = 0$

$\dots \quad S_{2n} = 1, \quad S_{2n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim_n S_n$ non esiste

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

Definizione: Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice semplicemente convergente se converge, ma $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge

Osservazione: il teorema precedente si può enunciare anche così:

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, allora converge

Dim. del teorema:

Per ipotesi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Dimostriamo che allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ soddisfa il criterio di Cauchy

Devo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \mid n > N$ e $p \geq 1, p \in \mathbb{N}$,

$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge $\Rightarrow$ soddisfa il criterio di Cauchy

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \mid n > N$ e $p \geq 1, p \in \mathbb{N}$,

$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$

disuguaglianza triangolare

$\varepsilon > 0$ è fissato, $N > 0$ l'ho trovato

somma di un numero finito di termini

$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$ per $n > N$ e $p \geq 1$

Dimostriamo che $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

la serie converge

$n \to +\infty$ $\qquad$ $n \to +\infty$ $\qquad$ la serie converge

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \qquad //$$

Criteri di convergenza

Teorema (criterio del confronto):

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ definitivamente per } n \to +\infty$$

1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

Dim.: Per semplicità assumiamo che $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n^a = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad S_n^b = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Allora $\lim_n S_n^a$ e $\lim_n S_n^b$ esistono entrambi perché le serie sono a termini ≥ 0. Vale

$$S_n^a \le S_n^b \quad \text{perché } a_k \le b_k \ \forall k$$

e $0 \le \lim_n S_n^a \le \lim_n S_n^b$ (teorema del confronto)

1) $\lim_n S_n^b \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_n S_n^a \in \mathbb{R}$, non può essere $+\infty$, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) $\lim_n S_n^a = +\infty \Rightarrow \lim_n S_n^b = +\infty$, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge //

Teorema (criterio asintotico del confronto): Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che

- $a_n, b_n \geq 0$ definitivamente per $n \to +\infty$
- $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l$ $\quad (l \in [0, +\infty])$

1) Se $l \in \mathbb{R}^{>0}$, cioè se $a_n \sim b_n$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\iff$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

2) Se $l = 0$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

3) Se $l = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

Dim.: Supponiamo per semplicità $a_n, b_n > 0$ $\forall n$

1) $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}^{>0}$

$$\Rightarrow \exists N \mid n > N \Rightarrow \frac{l}{2} < \frac{a_n}{b_n} < 2l$$

$n > N$ $\qquad \frac{l}{2} b_n < a_n < 2 l b_n$

$n > N$ $\quad \frac{l}{2} b_n < a_n < 2 l b_n$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, per il criterio del confronto $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{l}{2} b_n = \frac{l}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, allora converge $\sum_{n=0}^{\infty} (2 l b_n)$ e per il criterio del confronto converge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

2) $\lim_{n} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

$\exists N \mid n > N \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} < 1$

$\Rightarrow a_n < b_n \quad \forall n > N$

Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, per confronto converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

3) $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

$\hookrightarrow \exists N>0 \mid n > N \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} > 1$

$n > N \Rightarrow a_n > b_n$

Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge, per confronto diverge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ //

Esempio importante: serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ è un parametro}$$

Vogliamo trovare per quali α la serie converge e per quali diverge

- Se $\alpha \leq 0 \Rightarrow \lim_n \frac{1}{n^\alpha} \neq 0 \Rightarrow$ la serie diverge
- Se $\alpha > 0$?? Se $0 < \alpha \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$
$\Rightarrow$ la serie diverge per confronto

- $\alpha > 1$??

Criterio di condensazione: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione non negativa decrescente. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ converge $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ → termine della successione di posto 2^n

$\alpha > 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $\quad a_n = \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ e $a_{n+1} \leq a_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow$ converge $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{\alpha n}} =$

$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$

$a_{2^n} = \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha n}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n$, serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$, che converge $\Longleftrightarrow 2^{1-\alpha} < 1 \Longleftrightarrow 1-\alpha < 0 \Longleftrightarrow \alpha > 1$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ parametri})$$

converge $\Longleftrightarrow$ $\alpha > 1$ oppure
$\alpha = 1$ e $\beta > 1$

ES.:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{10^6}}{n^2} \text{ converge}$$
$$(\alpha = 2 > 1 \quad e \quad \beta = -10^6)$$

LUNEDÌ 26/11

Teorema (criterio del rapporto)

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione a termini positivi (definitivamente > 0).

1) Se $\exists\ r < 1 \mid \underline{\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r}$ definitivamente per $n \to \infty$,
allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ definitivamente per $n \to +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

- In 1) non deve essere $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, ma deve esistere $r < 1 \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, cioè il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ deve rimanere distante da 1. Es.: $a_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1 \ \forall n$, ma $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

Dim. del criterio del rapporto

1) Per semplicità assumiamo $a_n > 0 \ \forall n \geq 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$

$\forall n \geq 0$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} < r \qquad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow a_n < r a_{n-1} < r(r a_{n-2}) = r^2 a_{n-2}$

$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < r$

$$a_n < r a_{n-1} < r(r a_{n-2}) = r^2 a_{n-2} <$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} < r$$

$$< r^2 (r a_{n-3}) = r^3 a_{n-3} < \dots < r^n a_0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} < r$$

termine generale di una serie geometrica di ragione $0 \le r < 1$

$$\Rightarrow a_n < r^n a_0 \quad \forall n \geq 1$$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (per semplicità)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq 1$$

$$\geq a_{n-3} \geq \dots \geq a_0 > 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \geq 1$$

$$\Rightarrow a_n \geq a_0 \; (>0) \; \forall n$$

$\Rightarrow \lim_n a_n$ non è zero

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

<u>Esempio</u> Trovare per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(convenzione $0! = 1$, $0^0 = 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

- $x = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1$

- $x \neq 0$. Applichiamo il criterio del rapporto

Studiamo la convergenza assoluta (così i termini della serie che studio sono positivi!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \qquad a_n > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|^{\cancel{n+1}}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\cancel{|x|^n}} =$$

$$= \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} |x| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$ definitivamente perché $\lim_n \frac{|x|}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge assolutamente (e quindi converge) $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Teorema (criterio asintotico del rapporto).

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione a termini positivi (definitivamente positivi) e

tale che $\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ $(\in [0,+\infty])$

1) Se $\ell < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) Se $\ell > 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

Osservazione: E se $\ell = 1$??

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad b_n = \frac{1}{n^2}$ $\qquad \lim_{n} \frac{b_{n+1}}{b_n} =$

$\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$= \lim_{n} \frac{n}{n+1} = 1$ $\qquad \sum a_n = +\infty$ $\qquad \sum b_n = \frac{\pi^2}{6}$ $\qquad = \lim_{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$

Dim. del criterio

1) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, 1[$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+l}{2}$ definitivamente per $n \to \infty$

$l < \frac{1+l}{2} < 1$

r

$\Rightarrow$ per il criterio del rapporto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ definitivamente per $n \to +\infty$ per la definizione di limite

$\Rightarrow$ per il criterio del rapporto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge //

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{1+l}{2} \in]1, l[$

Teorema (criterio della radice)

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione a termini non negativi

1) Se $\exists\, r<1 \mid \sqrt[n]{a_n} < r$ definitivamente per $n \to +\infty$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ definitivamente per $n \to +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

---

1) Sia $\sqrt[n]{a_n} < r$ definitivamente

$\Rightarrow \quad a_n < r^n$ definitivamente per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge per confronto con la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$

2) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ definitivamente

$\Rightarrow a_n \geq 1$ definitivamente

$\Rightarrow \lim_{n} a_n$ non è zero

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge //

Esempio Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

converge assolutamente $\forall x \in]-1, 1[$

Devo studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$$

$a_n \geq 0$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \leq \underset{r}{|x|} \in [0, 1[$$

$\sqrt[n]{n} \geq 1$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente, e quindi converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

$\forall x \in]-1, 1]$

N.B.: $a_n = \frac{1}{n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1 \quad \forall n \geq 2,$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

Teorema (criterio asintotico della radice):

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione a termini non negativi tale che

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$$

1) Se $l < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

2) Se $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

N.B.: Se $l = 1$??

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad\qquad$ $b_n = \frac{1}{n^2}$

$\sum_n a_n = +\infty$ $\qquad\qquad$ $\sum_n b_n = \frac{\pi^2}{6} < \infty$

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{b_n} = 1$$

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = \lim_n e^{\frac{1}{n} \ln n} = 1$$

$\rightarrow 0$

Dim. del criterio

1) $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l < 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \frac{1+l}{2}$ definitivamente

$r < 1$

$\Rightarrow$ la serie converge per il criterio della radice

2) $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l > 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > \frac{1+l}{2} > 1$ definitivamente

$\Rightarrow$ la serie diverge per il criterio della radice

Proposizione: Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione a termini positivi. Se $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$

MARTEDÌ 27/11

Serie di Leibniz

Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad , \text{ con } a_n \geq 0 \ \forall n$$

→ serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

Teorema (criterio di Leibniz):

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione a termini non negativi, decrescente $(a_{n+1} \leq a_n)$, infinitesima $(\lim_n a_n = 0)$. Allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. Inoltre, detta S la sua somma, si ha

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k - S \right| \leq a_{n+1}$$

$$\downarrow$$

S_n, ridotta n-esima

N.B.: Nelle ipotesi del teorema è sufficiente chiedere che

- $a_n \geq 0$ definitivamente per $n \to \infty$
- $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente per $n \to \infty$
- $\lim_n a_n = 0$

Es.: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

$x \in]-1, 1]$

Abbiamo dimostrato che la serie converge assolutamente se $x \in]-1,1[$

Cosa succede in $x=1$. La serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

e quindi la serie dei moduli è

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge

Vediamo la convergenza semplice

$a_n = \frac{1}{n} > 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \geq 1$ e

$\lim_n a_n = 0 \Rightarrow$ la serie converge

per il criterio di Leibniz

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

e il criterio di Leibniz implica

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} - \ln 2 \right| < \frac{1}{n+1}$$

Se $n = 100$

$$\left| \sum_{k=1}^{100} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} - \ln 2 \right| < \frac{1}{101}$$

$$\left| \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{100}}_{\text{approssimazione di } \ln 2 \text{ con 2 cifre decimali esatte}} - \ln 2 \right| < \frac{1}{101} \quad //$$

Cenno della dimostrazione del Criterio di Leibniz

$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ successione delle ridotte

$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ si distinguono i casi n pari e n dispari

$j \in \mathbb{N}$

$$S_{2j} = \sum_{k=0}^{2j} (-1)^k a_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{2j-2} (-1)^k a_k}_{S_{2j-2}} \underbrace{- a_{2j-1} + a_{2j}}_{\leq 0} \leq S_{2j-2}$$

Analogamente $S_{2j+1} \geq S_{2j-1}$

$\{S_{2j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ è decrescente

$\{S_{2j+1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ è crescente

e vale $S_{2j+1} \leq S_{2j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{S_{2j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $\{S_{2j+1}\}_{j\in\mathbb{N}}$

convergono e poi si dimostra che il limite è lo stesso perché

$$|S_{2j+1} - S_{2j}| = a_{2j+1} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow \lim_n S_n$ esiste finito //

Es.: abbiamo già notato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge, ma non converge assolutamente

$$\to -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\ln 2$$