SERIE ESERCIZI

GIOVEDÌ 22/11

Esercizio Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left[\underbrace{n + \operatorname{sen}(n^{-n}) \ln n}_{\to\, n + o(n)} \right]}{4^n} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Cerco b_n tale che → e termini ≥ 0

- $\dfrac{3^n \left[n + \operatorname{sen}(n^{-n}) \ln n \right]}{4^n} \leq b_n$ definitivamente
- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

$$n + \sin(n^n)\ln n \leq n + \ln n$$

$$\underbrace{\frac{3^n\left[n + \sin(n^n)\ln n\right]}{4^n}} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (n + \ln n)$$

Cerco $r > 0$ |

$\frac{3}{4} \cdot r < 1$ e $n + \ln n < r^n$ definitivamente

$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{10} < 1$ $\left(r = \frac{6}{5}\right)$

$$\lim_n \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^n}{n + \ln n} = +\infty$$

$$\frac{3^n\left[n + \sin(n^n)\ln n\right]}{4^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (n + \ln n) \leq$$

$$\leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{9}{10}\right)^n}_{b_n}$$

$\sum \left(\frac{9}{10}\right)^n < +\infty$ perché

serie geometrica di ragione $|r| < 1$

<u>Esercizio</u> Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{\frac{n^4 + n^3}{n^3 + 1}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{n^4+n^3}{n^3+1}} = \sqrt[5]{\frac{n^4+o(n^4)}{n^3+1}} \sim \sqrt[5]{\frac{n^4}{n^3}} = \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ la serie diverge

Esercizio Sia $\alpha > 0$ un parametro. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha} \right)$$

$\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ per $n \to +\infty$

$$\to \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{3!} \frac{1}{n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{3!} \frac{1}{n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^{3\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{6}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$\to$ la serie è a termini definitivamente < 0

$\to$ la serie è a termini definitivamente > 0

in ogni caso posso applicare il criterio asintotico del confronto

$$\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n^\alpha} \sim \begin{cases} -\frac{1}{n^\alpha} & \text{se } 0<\alpha<1 \\ \frac{1}{n^3} & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{n} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \operatorname{sen}\frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

LUNEDÌ 26/11

__Esercizio__ Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini non negativi (≥ 0). Dimostrare che, se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

converge, allora $a_n = 0 \ \forall n \geq 1$

So che $\lim_n S_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} = \frac{S_n}{n}. \quad \text{Se } S \neq 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{S_n}{n}}{\frac{S}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{S} = 1$$

$\frac{S_n}{n} \sim \frac{S}{n}$ $(S \neq 0)$ è il termine generale di una serie divergente

$\Rightarrow$ per il criterio asintotico del confronto $\sum_n \frac{S_n}{n}$ divergerebbe.

Allora, se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ converge, $S = 0$

$$0 = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow a_n = 0$$

(perché $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$) //

<u>Esercizio</u> Studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(2n+1)^n} \quad a_n$$

Proviamo con il criterio asintotico del rapporto

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(2n+3)^{n+1}}}{\dfrac{(2n)!}{n!\,(2n+1)^n}} =$$

$$(2n+2)(2n+1)(2n)!$$

$$= \lim_n \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(2n+3)^{n+1}} \cdot \frac{n!\,(2n+1)^n}{(2n)!} =$$

$$(n+1)\,n!$$

$$= \lim_n \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)^{n+1}} \cdot (2n+1)^n =$$

$$2n+3-2$$

$$= \lim_n \frac{2n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+1} =$$

$$= (2n+3)\,\frac{n+1}{2n+3}$$

$$= \lim_n \frac{2n+2}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^{n+1} =$$

$$\frac{1}{2}$$

$$= \lim_n 2 \left[\left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^{2n+3}\right]^{\frac{n+1}{2n+3}} = \frac{2}{e} < 1$$

$$e^{-2}$$

$\Rightarrow$ la serie converge

Esercizio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Utilizziamo il criterio asintotico del rapporto

$$\lim_n \underbrace{\frac{5^{n+1} \left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}}_{a_{n+1} \cdot (a_n)^{-1}} =$$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$

$$= \lim_n 5 \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5}{4} > 1$$

$\Rightarrow$ la serie diverge

Esercizio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(n+1)^4 + n^4 + e^n}{(3n+1)! + (2n)!}$$

Prima confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(n+1)^4}{(3n+1)!}$

$$\lim_{n} \frac{\dfrac{(2n)!(n+1)^n + n^n + e^n}{(3n+1)! + (2n)!}}{\dfrac{(2n)!(n+1)^n}{(3n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n} \frac{(2n)!(n+1)^n + \overbrace{n^n + e^n}^{=o((2n)!(n+1)^n)}}{(3n+1)! + \underbrace{(2n)!}_{=o((3n+1)!)}} \cdot \frac{(3n+1)!}{(2n)!(n+1)^n} =$$

$$\underset{PdS}{=} 1$$

$\Rightarrow$ la serie data converge $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(2n)!(n+1)^n}{(3n+1)!}}_{a_n}$ converge

Applichiamo il criterio asintotico del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{(2n+2)!}^{=(2n+2)(2n+1)(2n)!}(n+2)^{n+1}}{(3n+4)!} \cdot \frac{(3n+1)!}{(2n)!(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(n+2)^{n+1}}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)(3n+1)!} \cdot \frac{(3n+1)!}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n} \underbrace{\frac{(2n+2)(2n+1)(n+2)}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)}}_{\to \frac{4}{27}} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \frac{4}{27}e < 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \to e$$

$\Rightarrow$ la serie converge

Esercizio

Sia $r \in]0,1[$.

Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} r^{n} \qquad a_n$$

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{n^{\alpha} r^{n}} =$$

$$= \lim_n r \, n^{\alpha/n} = r < 1$$

$$n^{\alpha/n} \rightsquigarrow e^{\frac{\alpha}{n} \ln n} \qquad \frac{\alpha}{n}\ln n \to 0$$

$\Rightarrow$ la serie converge $\forall \alpha$

Esercizio per casa

Sia $r > 1$. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} r^{n} \quad \text{diverge } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

MARTEDÌ 27/11

Esercizio Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n}{3n^2+2}}$

Prima la convergenza assoluta, e quindi studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{3n^2+2}}$$

$$\sqrt{\frac{n}{3n^2+1}} \sim \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_n \frac{\sqrt{\frac{n}{3n^2+2}}}{1/\sqrt{n}} = \lim_n \sqrt{\frac{n^2}{3n^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge

$\Rightarrow$ la serie non converge assolutamente.

Studiamo la convergenza semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n}{3n^2+2}} \qquad \sqrt{\frac{n}{3n^2+2}} = a_n$$

serie di Leibniz

$\lim_n a_n = 0$ banalmente

$a_n \geq 0 \quad \forall n$ banalmente

Dobbiamo vedere se

$a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente per $n \to \infty$

$$a_{n+1} \le a_n \iff \sqrt{\frac{n+1}{3(n+1)^2+2}} \le \sqrt{\frac{n}{3n^2+2}}$$

$$\iff \frac{n+1}{3(n+1)^2+2} \le \frac{n}{3n^2+2} \iff$$

$$(n+1)(3n^2+2) \le n(3n^2+6n+5)$$

$$\iff 3\cancel{n^3}+2n+3n^2+2 \le 3\cancel{n^3}+6n^2+5n$$

$$\iff 3n^2+3n-2 \ge 0$$ definitivamente

è vero!

$\Rightarrow$ la serie converge per il criterio di Leibniz

<u>Esercizio</u> Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n-\ln n|}$$

$\ln n = o(n)$ per $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $n - \ln n > 0$ definitivamente per $n \to \infty$

$$\left(= n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)\right) \qquad \frac{\ln n}{n} \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

Studio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

$\frac{1}{n-\ln n} \sim \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$\Rightarrow$ la serie data non converge assolutamente. Studio la convergenza semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$$

$a_n \geq 0$ definitivamente

$\lim_n a_n = 0$

Mi serve stabilire se $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente

$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{1}{n+1-\ln(n+1)} \leq \frac{1}{n-\ln n}$

$\iff n - \ln n \leq n+1 - \ln(n+1)$

$n-\ln n > 0$ definitivamente

posso moltiplicare per $n-\ln n$ e $(n+1-\ln(n+1))$ per $n > N$, $\exists N > 0$

$\iff \ln(n+1) - \ln n \leq 1$

$\iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 1$

vero definitivamente per $n \to \infty$ perché $\lim_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$

$\Rightarrow$ la serie data converge semplicemente

Esercizio Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^n + n!)\left[n \tan\frac{1}{n} - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) - \frac{\alpha}{n^2}\right]$$

$$\tan\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ per $x \to 0$

$$\cos\frac{\sqrt{2}}{n} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{4!}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^4 + o\left(\frac{1}{n^4}\right)}_{= o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$

$$\ln(n^n + n!)\left[n \tan\frac{1}{n} - \cos\frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{\alpha}{n^2}\right] =$$

$$= \ln(n^n + n!)\left[n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) + \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \frac{\alpha}{n^2}\right] =$$

$$= \ln(n^n + n!)\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha}{n^2}\right] = \ln(n^n + n!)\left[\left(\frac{4}{3} - \alpha\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$\ln(n^4+n!)\left[n\tan\frac{1}{n}-\cos\frac{\sqrt{2}}{n}-\frac{\alpha}{n^2}\right]=$$

$$=\ln(n^4+n!)\left[\left(\frac{4}{3}-\alpha\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$\left(\frac{4}{3}-\alpha\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)>0$ definitivamente se $\frac{4}{3}-\alpha>0$

$\left(\frac{4}{3}-\alpha\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)<0$ definitivamente se $\frac{4}{3}-\alpha<0$

Se $\alpha\neq\frac{4}{3}$

$$\ln(n^4+n!)\left[n\tan\frac{1}{n}-\cos\frac{\sqrt{2}}{n}-\frac{\alpha}{n^2}\right]=$$

$$=\ln(n^4+n!)\left[\left(\frac{4}{3}-\alpha\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\sim$$

$$\sim\ln(n^4+n!)\left(\frac{4}{3}-\alpha\right)\frac{1}{n^2}\sim$$

$$\sim\frac{\ln(n^4+n!)}{n^2}=\frac{\ln n^4+\ln\left(1+\frac{n!}{n^4}\right)}{n^2}\sim$$

$\sim\frac{n\ln n}{n^2}=\frac{\ln n}{n}$, che è il termine generale di una serie divergente $\Rightarrow$ la serie diverge

$$\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\ln\left(n^n + n!\right)\left[n \tan\frac{1}{n} - \cos\frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{\alpha}{n^2}\right] =$$

$$= \ln\left(n^n + n!\right)\left[\underbrace{\left(\frac{4}{3} - \alpha\right)\frac{1}{n^2}}_{=\,0} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] =$$

$$= \ln\left(n^n + n!\right) \cdot o\left(\frac{1}{n^3}\right) =$$

$$= \left(n \ln n + \ln\left(1 + \frac{n!}{n^n}\right)\right) o\left(\frac{1}{n^3}\right) =$$

$$= o\left(n \ln n \cdot \frac{1}{n^3}\right) = o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

$\Rightarrow$ definitivamente per $n \to +\infty$ vale

$$\left|\ln\left(n^n + n!\right)\left[n \tan\frac{1}{n} - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) - \frac{4}{3}\frac{1}{n^2}\right]\right| \le$$

$$\le \frac{\ln n}{n^2}$$, che è il termine generale di una serie convergente $\Rightarrow$ per il criterio del confronto la serie converge assolutamente, e quindi converge

Esercizio Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(n - \cos n^{\alpha})}_{\geq 0} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

$\frac{1}{n^{2\alpha}} \to 0$ per $n \to \infty$ perché $\alpha > 0$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \frac{1}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{2\alpha}} - \frac{1}{6} \frac{1}{n^{6\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{6\alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^{6\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{6\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^{6\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{6\alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^{2\alpha}} = \begin{cases} -\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) & \text{se } 2\alpha < 1 \\ \frac{1}{6} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) & \text{se } 2\alpha = 1 \\ \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) & \text{se } 2\alpha > 1 \end{cases}$$

$$(n - \cos n^{\alpha}) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) =$$

$$= (n + o(n)) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen} \frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{n^{2\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right) & \text{se } 2\alpha < 1 \\ \frac{1}{6} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) & \text{se } 2\alpha = 1 \\ 1 + o(1) & \text{se } 2\alpha > 1 \end{cases}$$

Se $2\alpha > 1$, $\lim_{n} (n - \cos n^{\alpha}) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right) = 1$,

e quindi la serie diverge

Se $2\alpha = 1$

$$(n - \cos n^{\alpha}) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right) \sim \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente

Se $2\alpha < 1$

$$(n - \cos n^{\alpha}) \left(\frac{1}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right) \sim \frac{1}{n^{2\alpha - 1}} \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie diverge

Esercizio Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha} + (-1)^n}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

Studiamo prima la convergenza assoluta, cioè la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|n^{\alpha} + (-1)^n|}$$

Se $\alpha < 0$, $\lim_n \frac{1}{|n^\alpha + (-1)^n|} = 1$,

e, in particolare, $\lim_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \neq 0$

(fa ± 1)

$\Rightarrow$ la serie non converge

(ricordare che $\lim_n b_n = 0 \iff \lim_n |b_n| = 0$)

Se $\alpha > 0$ $\quad n^\alpha + (-1)^n > 0$ per $n \geq 2$

$n^\alpha + (-1)^n \sim n^\alpha$ perché $n^\alpha \to \infty$

$$\frac{1}{|n^\alpha + (-1)^n|} = \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{|n^\alpha + (-1)^n|}$ converge $\iff$

$\alpha > 1$ per il criterio asintotico del confronto

Resta da stabilire cosa succede per $0 < \alpha \leq 1$. La serie non converge assolutamente, bisogna studiare la convergenza semplice

- $0 < \alpha \leq 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n}$$

a_n

- $a_n > 0 \quad \forall n \geq 2$
- $\lim_n a_n = 0$
- E' vero che $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente per $n \to +\infty$?

n pari $\Rightarrow$ $n+1$ è dispari

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^\alpha + (-1)^{n+1}}$$

-1 perché $n+1$ è dispari

$$= \frac{1}{(n+1)^\alpha - 1}$$

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n}$$

1 perché n è pari

$$= \frac{1}{n^\alpha + 1}$$

$a_{n+1} \leq a_n$?

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha - 1} \leq \frac{1}{n^\alpha + 1}$$

$$n^\alpha + 1 \leq (n+1)^\alpha - 1$$

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha \geq 2$$ definitivamente, con n pari

Se $\lim_n \left[(n+1)^\alpha - n^\alpha\right] > 2$, sono a posto

Calcoliamo $\lim_n \left[(n+1)^\alpha - n^\alpha\right]$

$$\lim_n \left[(n+1)^\alpha - n^\alpha\right] =$$

$$= \lim_n n^\alpha \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right]$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$ per $x \to 0$

$$= \lim_n n^\alpha \left[\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \overset{\text{PdS}}{=}$$

$$= \lim_n \alpha\, n^{\alpha-1} \underset{0<\alpha\leq 1}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ non è vero che $a_{n+1} \le a_n$ definitivamente per $n \to +\infty$!

$\Rightarrow$ non possiamo applicare il criterio di Leibniz

Riportiamo da $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)}_{b_n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{c_n}$$

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge per il criterio di Leibniz

- 1) Se $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ converge, allora anche $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge

  2) Se $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge, allora, essendo $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} - c_n$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ converge

Quindi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge $\Longleftrightarrow$

$\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ converge

$\Rightarrow$ studiamo la convergenza di $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right] =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^\alpha - n^\alpha - (-1)^n}{(n^\alpha + (-1)^n)\, n^\alpha} \right] =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^n (-1)^{n+1}}^{=-1}}{n^\alpha (n^\alpha + (-1)^n)} =$$

$$= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (n^\alpha + (-1)^n)}$$

$d_n > 0$

$d_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} d_n$ converge $\Longleftrightarrow 2\alpha > 1$

$\Rightarrow$ la serie converge semplicemente

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha \leq 1$