FUNZIONI CONTINUE
TEORIA

MERCOLEDÌ 28/11

FUNZIONI CONTINUE

Definizione : f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \mathrm{dom} f$. Allora f si dice continua in x_0 se è verificata una delle due condizioni

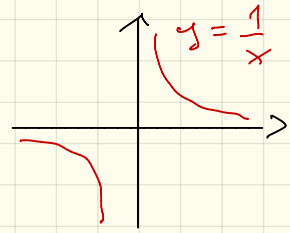
1) x_0 è punto isolato per $\mathrm{dom} f$

2) Se $x_0 \in \text{dom} f$ è punto di accumulazione per $\text{dom} f$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Es.: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



f è funzione continua, cioè continua in ogni punto del suo dominio

Def.: f si dice continua se è continua in x_0 $\forall x_0 \in \text{dom} f$

Dalla definizione segue che f è continua in $x_0 \in \text{dom} f$ se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |x - x_0| < \delta \text{ e } x \in \text{dom} f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

Se $x_0 \in \text{dom} f$ è isolato, allora

$$\exists \delta > 0 \mid \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap \, \text{dom} f = \{x_0\}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

$$\forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap \, \text{dom} f$$

Es.: $f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$

$\mathrm{dom}\, f = \{0\} \cup [1, +\infty[$

deve essere $x^2(x-1) \geq 0$

$\Rightarrow$ f è continua in $x_0 = 0$ (è punto isolato per dom f), ma non posso calcolare $\lim_{x \to 0} f(x)$

Def.: Dato $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ si indica con $C^0(X)$ o $C(X)$ l'insieme

$$C^0(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua in } x_0 \ \forall x_0 \in X \}$$

Se f non è continua in $x_0 \in \mathrm{dom}\, f$, si dice anche discontinua in x_0

Es.: $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{sgn}\, x = 1$, $\lim_{x \to 0^-} \mathrm{sgn}\, x = -1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}\, x$ non esiste $\Rightarrow$ la funzione è discontinua in $x = 0$, mentre è continue in tutti gli altri punti

$sgn \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

ma $sgn \notin C^0(\mathbb{R})$

<u>Es.:</u> $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ p, q \in \mathbb{Z} \text{ primi tra loro, } q > 0 \\ 0 & \text{altrimenti, cioè se } x = 0 \text{ o } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si può dimostrare che $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi$ è continua su $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$

e φ è discontinua in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

<u>Teorema</u>: Sia f continua in x_0.
Allora $\exists M > 0$ e un intorno I di x_0 tali che $|f(x)| \le M$ $\forall x \in I \cap \mathrm{dom} f$
(locale limitatezza)

<u>Teorema</u>: Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$, allora $\exists$ un intorno I di x_0 tale che $f(x) > 0$ $\forall x \in I \cap \mathrm{dom} f$
(permanenza del segno)

Teorema: Sia f continua in x_0. Allora anche $|f|$ è continua in x_0

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |f(x_0)| \right)$$

è la funzione $x \mapsto |f(x)|$

Teorema: Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, continue in $x_0 \in X$. Allora $f+g$ e $f \cdot g$ sono continue in x_0 e, se $g(x_0) \neq 0$, anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0

(teorema sul limite di somme, prodotto e quoziente di funzioni)

Teorema: Siano f e g funzioni reali di variabile reale tali che $g \circ f$ è definita in un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$. Sia $x_0 \in X$.

Se

1) g è continua in $f(x_0)$
2) f è continua in x_0,

allora $g \circ f$ è continua in x_0

$$x_0 \xrightarrow{f} f(x_0) \xrightarrow{g} g(f(x_0)) = g \circ f(x_0)$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

Es.: $x \mapsto \cos x^2$ è continua

$f(x) = x^2 \qquad g(y) = \cos y$

$\cos x^2 = g \circ f\,(x) = g(f(x))$

$\Rightarrow$ la composizione di funzioni continue è continua.

Dim. del teorema

Devo dimostrare che $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in X$, cioè che

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid |x - x_0| < \delta,\ x \in X \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid |x - x_0| < \delta$ e $x \in X \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

Cose so

1) g è continua in $f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_g > 0 \mid |y - f(x_0)| < \delta_g$ e

$y \in \operatorname{dom} g \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

2) f è continua in x_0

$\forall \varepsilon' > 0\ \exists \delta_f > 0 \mid |x - x_0| < \delta_f$ e $x \in \operatorname{dom} f$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$

$\varepsilon' = \delta_g$

Preso $\varepsilon' = \delta_g$, trovo $\delta = \delta_f$ tale che

$|x - x_0| < \delta \; (= \delta_f)$ e $x \in X$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon' = \delta_g$

$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ //

Proposizione (teorema del cambio di variabile nei limiti): f, g funzioni reali di variabile reale tali che $g \circ f$ sia definita in un sottoinsieme non vuoto X di $\mathbb{R}$ che ammette $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ come punto di accumulazione

Sia $y_0 \in \operatorname{dom} g$ di accumulazione per $\operatorname{dom} g$. Se

1) g è continua in y_0

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$,

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0)$$

Analisi dei punti di discontinuità

- Es.: La funzione segno ha limiti destro e sinistro finiti in $x_0=0$ e sono diversi tra loro. Si dice che la funzione segno ha in $x_0=0$ un punto di salto o discontinuità di prima specie

Def.: f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \operatorname{dom} f$ di accumulazione per $\operatorname{dom} f$ da destra e da sinistra. Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistono entrambi

finiti, allora x_0 si dice punto di salto o discontinuità di prima specie

- Es.:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

Def.: f funzione reale di variabile reale, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per $\operatorname{dom} f$, se almeno uno dei limiti di f in x_0

da destra o da sinistra è uno dei simboli $\pm\infty$, x_0 si dice punto di infinito per f. Se $x_0 \in \mathrm{dom} f$, allora f in x_0 ha una discontinuità di seconda specie.

Es.:

$$h(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} h(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ non esistono

Anche in questo caso si parla di discontinuità di seconda specie (almeno

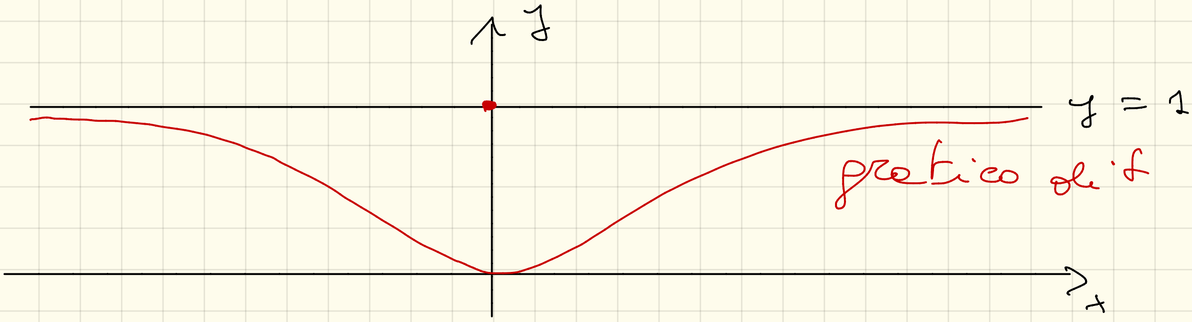
uno dei limiti da destra e da sinistra non esiste)

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$

Si dice che f ha in $x_0 = 0$ una discontinuità eliminabile



Si può definire

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \lim_{x \to 0} f(x) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e $\tilde{f}$ è continua, anche in $x_0 = 0$

perché $\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0} f(x)$

(ho cambiato il valore di f in un punto!)

Es.:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

perché rapporto di funzioni continue con denominatore non nullo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

Si dice che f è prolungabile per continuità in $x_0 = 0$

Definisco $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \lim_{x \to 0} f(x) = 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ si dice prolungamento per continuità di f e risulta $\tilde{f} \in C^0(\mathbb{R})$

(ho aggiunto un punto a dom f!)

GIOVEDÌ 28/11

Proprietà delle funzioni continue

Teorema di Weierstrass: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato. Allora f ha massimo e minimo, cioè $\exists\, x_m, x_M \in [a,b] \mid$

$$f(x_m) = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(x_M) = \max_{x [a,b]} f(x)$$

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a,b]$$

Dim.:

Bisognerà utilizzare il teorema di Bolzano-Weierstrass

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata, questa ammette una sottosuccessione convergente

Per fissare le idee, dimostriamo l'esistenza del minimo, cioè del punto di minimo x_m

Sicuramente esiste $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = I$

Costruisco una successione minimizzante

cioè una successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ tale che

- $x_n \in [a,b] \quad \forall n \geq 1$
- $\lim\limits_{n} f(x_n) = I$

Come faccio?

- $I \in \mathbb{R}$. $\forall n \geq 1 \quad \exists\, x_n \in [a,b] \mid$

$I \leq f(x_n) \leq I + \frac{1}{n}$ per la seconda proprietà dell'estremo inferiore

$\lim\limits_{n} f(x_n) = I$ per i due carabinieri

• $I = -\infty$ $\quad \forall n \geq 1 \ \exists x_n \in [a,b] \mid$

$f(x_n) \leq -n$ $\Rightarrow \lim_n f(x_n) = -\infty = I$

Mi sono procurato $\{x_n\}_{n\geq 1}$ e vale

$a \leq x_n \leq b \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n\geq 1}$ è limitata $\Rightarrow$

ammette una sottosuccessione convergente,

$\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$. Sia $x_m = \lim_k x_{n_k}$

e dimostriamo che $x_m \in [a,b]$ e $f(x_m) = I$

Poiché $a \leq x_{n_k} \leq b \quad \forall k \geq 1$

$\Rightarrow a \leq x_m \leq b$ per confronto

Poiché $x_{n_k} \to x_m$ e f è continua,

sia $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x_m)$

Però $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I \Rightarrow f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} I$

$\Rightarrow f(x_m) = I$ per l'unicità del limite. //

Es.: Ho bisogno di costruire 5000 barattoli di latte da 5 lt ciascuno. Ho assegnato il volume V, devo decidere il raggio di base r, supponendo il barattolo cilindrico. Voglio utilizzare meno latta possibile e quindi devo minimizzare la superficie $S(r)$ del barattolo

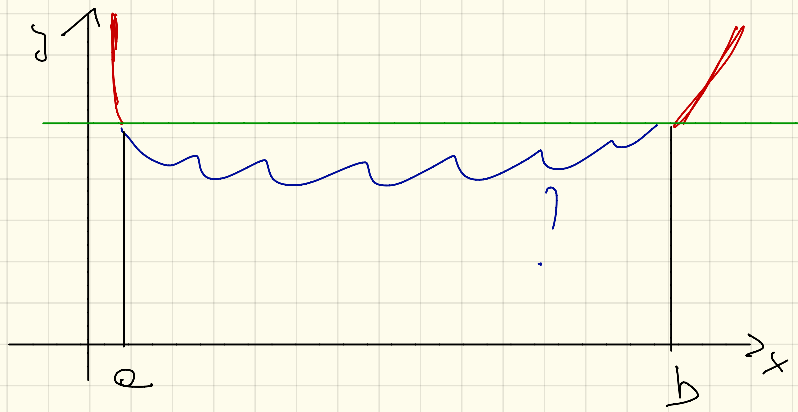
$$S(r) = \underbrace{(\text{area delle due basi})}_{2\pi r^2} + \underbrace{(\text{superficie laterale})}_{2\pi r \cdot h = \frac{2V}{r}}$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r \in \left]0, +\infty\right[$$

$\exists$ il minimo di $S(r)$?

$$\lim_{r \to +\infty} S(r) = \lim_{r \to 0^+} S(r) = +\infty$$



Fisso $r_0 > 0 \Rightarrow \exists\ a, b > 0$ tali che

$$S(r) > S(r_0) \quad \forall\, 0<r<a \;\; e \;\; \forall\, r>b$$

Per il teorema di Weierstrass, S ha minimo in $[a,b] \Rightarrow \exists\; r_m \in [a,b] \;|$

$$S(r) \geq S(r_m) \quad \forall\, r \in [a,b]$$

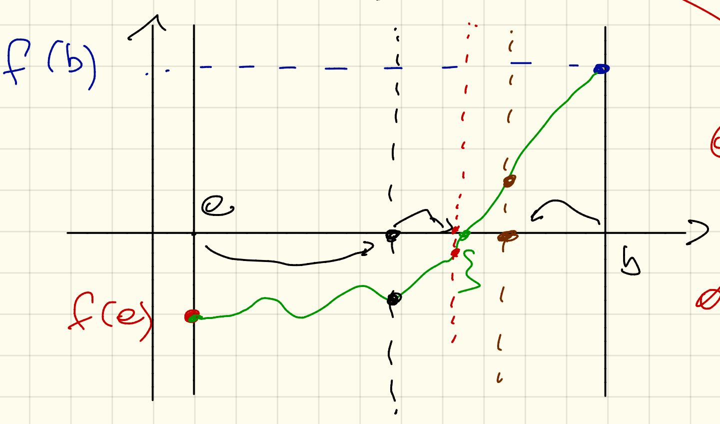
Sicuramente $r_0 \in [a,b]$, perché se $r \notin [a,b]$, $S(r) > S(r_0)$

$$\Rightarrow S(r_m) \leq S(r_0) < S(r) \quad \forall\, r \notin [a,b]$$

$\Rightarrow S(r_m)$ è il minimo di S in $]0,+\infty[$ //

Teorema di Bolzano o degli zeri:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(a)f(b)<0$ (cioè f assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a,b]$). Allora $\exists\; \xi \in]a,b[$ tale che $f(\xi)=0$.



$\exists$ in $[a,b]$ almeno una soluzione dell'equazione $f(x)=0$

Dim.: Metodo di bisezione

Per fissare le idee, assumiamo $f(a)<0$ e $f(b)>0$

Costruiamo due successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

1) $a \le a_n \le b_n \le b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente

3) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \quad \forall n$

4) $f(a_n) \le 0 \le f(b_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se riesco a costruire queste due successioni, sono a posto.

1) e 2) $\Rightarrow \exists\ l_a = \lim_n a_n$ e $l_b = \lim_n b_n$ e si ha $l_a, l_b \in [a,b]$

3) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0 \quad n \to +\infty$

$$\Rightarrow l_a = l_b = \xi$$

perché $b_n - a_n \to l_a - l_b$

4) $f(a_n) \le 0 \le f(b_n)$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$f(\xi) \le 0 \le f(\xi)$ $\qquad$ f è continua $\Rightarrow f(\xi) = 0$

Costruiamo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Pongo $a_0 = a$ e $b_0 = b$

Calcolo $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$

3 casi: 1) $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) < 0$

$\Rightarrow a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ e $b_1 = b_0$

$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

2) $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) > 0$

$\Rightarrow a_1 = a_0$ e $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$

3) $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = 0 \Rightarrow$ mi fermo

$\Rightarrow \xi = \frac{a_0+b_0}{2}$

Se $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) \neq 0$

si ha $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$

Calcolo $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$

3 casi: 1) $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$

$\Rightarrow a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e $b_2 = b_1$

$b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$

2) $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$

$\Rightarrow a_2 = a_1$ e $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$

3) $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \xi = \frac{a_1+b_1}{2}$ e ho finito

Costruiti a_n e b_n con $f(a_n)<0$ e $f(b_n)>0$, si calcola $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$

3 casi: 1) $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0$

$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ e $b_{n+1}=b_n$

$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{b_n-a_n}{2}=$

2) $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0$

$=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2^2}=$

$\Rightarrow a_{n+1}=a_n$ e $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$

$=\dots=\frac{b-a}{2^{n+1}}$

3) $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0 \Rightarrow \xi=\frac{a_n+b_n}{2}$ e ho finito

$\Rightarrow$ o trovo ξ o mi sono procurato $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$!!

Es.: $f(t)=(1+t)^3-2$, $t\in[0,1]$

$(1+t)^3$ è il capitale accumulato in 3 anni avendo depositato 1€ ad un tasso di interesse annuale t

Cerco t_0 | $f(t_0)=0$, cioè tale che

$(1+t_0)^3=2$

$f(0)=-1<0$ $\quad f(1)=6>0$

$\Rightarrow f$ ha uno zero in $[0,1]$

Siccome è strettamente crescente, tale zero è unico

LUNEDÌ 3/12

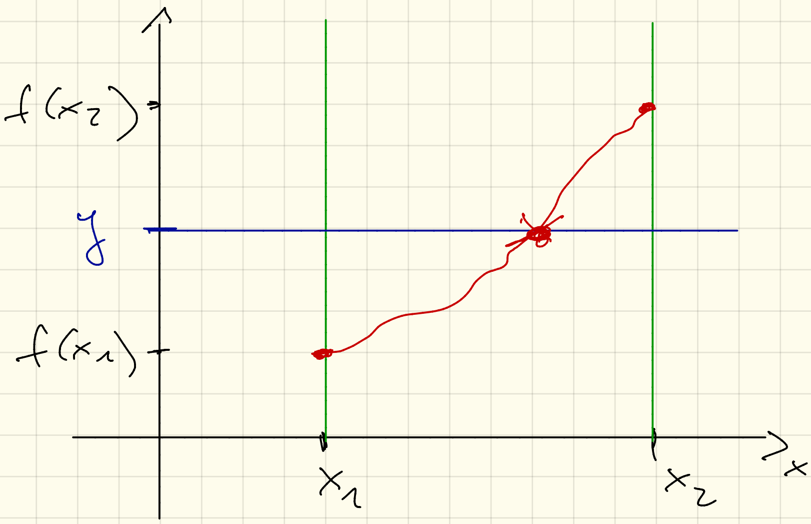
Teorema dei valori intermedi: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua. Allora

$$f(I) = \{ f(x) \mid x \in I \}$$

è un intervallo

$\Downarrow$

presi $x_1, x_2 \in I$, con $f(x_1) < f(x_2)$, se $f(x_1) < y < f(x_2)$, allora $\exists\, \xi \in I \mid f(\xi) = y$ $\longrightarrow \in f(I)$



Dim.: $x_1, x_2 \in I$, con $f(x_1) < f(x_2)$ e sia $f(x_1) < y < f(x_2)$. Dobbiamo provare che $\exists\, \xi \in I \mid f(\xi) = y$

Per fissare le idee assumiamo $x_1 < x_2$ e definiamo $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ come $g(x) = f(x) - y$

- g è continua
- $g(x_1) = f(x_1) - y < 0$
- $g(x_2) = f(x_2) - y > 0$

per come abbiamo preso y

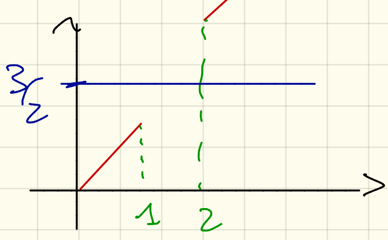
$\Rightarrow$ per il teorema di Bolzano

$\exists\, \xi \in\,]x_1, x_2[\, \subseteq I \mid g(\xi) = y \Rightarrow f(\xi) = y$ //

N.B.: f deve essere definita continua su un intervallo I affinché, in generale, $f(I)$ sia un intervallo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 1+x & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

$f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ è continua



$f(x) \neq \frac{3}{2}$ $\forall x \in \operatorname{dom} f$

Corollario: Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato.
Detti m e M il minimo e il massimo di f in $[a,b]$, rispettivamente (che esistono per il teorema di Weierstrass) si ha che $f([a,b]) = [m, M]$

Teorema: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f: I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile. Allora

1) f è strettamente monotona

2) la funzione inversa di f, $f^{-1}: f(I) \longrightarrow I$, è continua

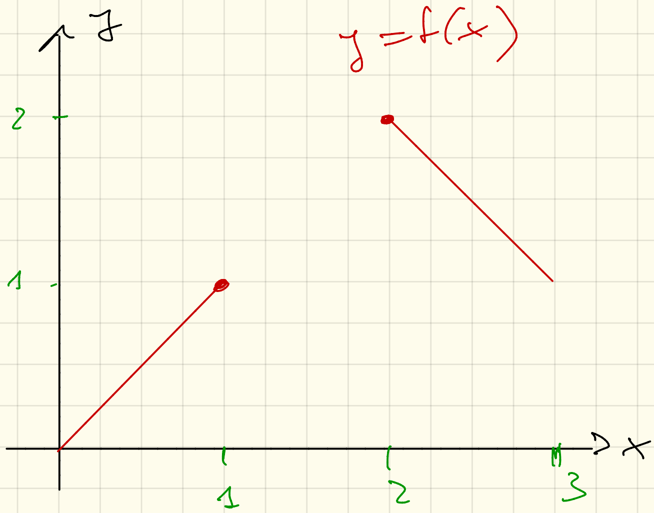
Es.: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è invertibile,

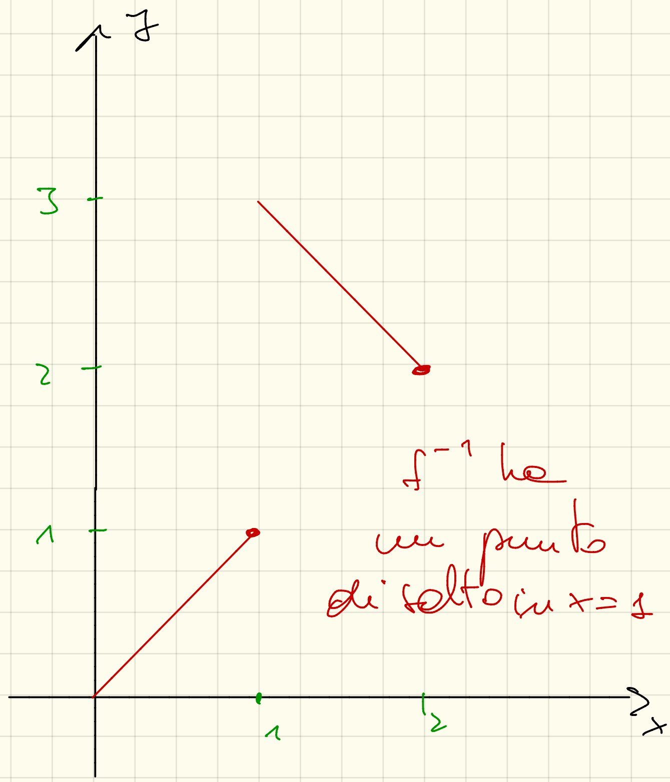
$x \longmapsto \frac{1}{x}$ ma non è monotona

N.B.: anche nel teorema appena enunciato l'ipotesi che I sia un intervallo è fondamentale

$f: [0,1] \cup [2,3[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 4-x & \text{se } x \in [2,3[\end{cases}$$





$\operatorname{im} f = [0, 2]$

$x \in [2, 3[\,,\ f(x) = 4 - x$

$f([2, 3[) =]1, 2]$

$f^{-1}(x) = 4 - x$