FUNZIONI CONTINUE
ESERCIZI

GIOVEDÌ 28/11

Esercizio Stabilire per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ è continua la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{se } x \leq -1 \\ e^{x+\beta} & \text{se } -1 < x < 2 \\ 2x + \alpha & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Se P è polinomio $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ i polinomi sono funzioni continue

$$\Rightarrow f \in C^0(]-\infty,-1[) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$e \ f \in C^0(]2,+\infty[) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0} \quad , \ e>0 \ , \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x \mapsto e^x \text{ è continua}$$

$$\Rightarrow f \in C^0(]-1,2[) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Dobbiamo verificare cosa succede in -1 e in 2

- $x_0 = -1$

Affinché f sia continua in -1 deve essere

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 1+\alpha$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^2+\alpha) = 1+\alpha$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} e^{x+\beta} = e^{\beta-1}$$

$\Rightarrow$ affinché f sia continua in -1 deve essere $e^{\beta-1} = 1+\alpha$

• $x_0 = 2$

Affinché f sia continua in 2 deve essere

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4 + \alpha$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} e^{x+\beta} = e^{\beta+2}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x+\alpha) = 4 + \alpha$$

$\Rightarrow$ affinché f sia continua in 2 deve essere $e^{\beta+2} = 4 + \alpha$

f è continua $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} e^{\beta-1} = 1+\alpha \\ e^{\beta+2} = 4+\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = e^{\beta-1} - 1 \\ \alpha = e^{\beta+2} - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\beta-1} - 1 = e^{\beta+2} - 4$$

$$e^{\beta+2} - e^{\beta-1} = 3$$

$$e^{\beta}\left(e^2 - \frac{1}{e}\right) = 3 \qquad e^{\beta} = \frac{3e}{e^3-1}$$

$$\Rightarrow \beta = \ln \frac{3e}{e^3-1} \qquad \alpha = e^{\beta-1} - 1 = \frac{3}{e^3-1} - 1 \quad //$$

Esercizio Stabilire per quali $\alpha, \beta > 0$ è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x-\alpha| & \text{se } x \le -1 \\ \ln(x^2+\beta) & \text{se } -1 < x \le 3 \\ \operatorname{sen}\left(x \frac{\pi}{2}\right) + 3x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0 \quad \forall x_0 > 0$$

$$\Rightarrow \ln \in C^0(]0, +\infty[)$$

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x-\alpha \longmapsto |x-\alpha| \longmapsto \ln|x-\alpha|$$

$\Rightarrow x \mapsto \ln|x-\alpha|$ è composizione di funzioni continue, ed è quindi continua nel suo dominio.

Poiché $\alpha > 0$, $x-\alpha \neq 0 \quad \forall x \le -1$

$$\Rightarrow f \in C^0(]-\infty, -1[)$$

Per lo stesso motivo $f \in C^0(]-1, 3[)$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}\right)$$

$x \mapsto \operatorname{sen}\left(x\frac{\pi}{2}\right)$ è continua

$\Rightarrow \quad x \mapsto \operatorname{sen}\left(x\frac{\pi}{2}\right) + 3x$ è continua

perché somma di funzioni continue

$$\Rightarrow f \in C^0(]3, +\infty[)$$

Affinché f sia continua è sufficiente controllare cosa succede in -1 e in 3

- $x_0 = -1$

deve essere $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = \ln|-1-\alpha| =$

$= \ln(\alpha+1)$

perché $\alpha > 0$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \ln|x-\alpha| = \ln(\alpha+1)$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \ln(x^2+\beta) = \ln(\beta+1)$$

affinché f sia continua in -1 deve essere $\ln(\beta+1) = \ln(\alpha+1)$

• $x_0 = 3$

deve essere $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = \ln(9+\beta)$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \ln(x^2+\beta) = \ln(9+\beta)$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \left[\operatorname{sen}\left(x\frac{\pi}{2}\right) + 3x \right] =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 9 = 8$$

affinché f sia continua in 3 deve essere $\ln(9+\beta) = 8$

$\Rightarrow f$ è continua $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \ln(\beta+1) = \ln(\alpha+1) \\ \ln(9+\beta) = 8 \end{cases}$$

$\alpha, \beta > 0$

$$\begin{cases} \beta + 1 = \alpha + 1 \\ \beta + 9 = e^8 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta = e^8 - 9 > 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = e^8 - 9 \quad //$$

Esercizio per casa

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue tali che $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{Q}$

1) E' vero o falso che allora
$f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$?
2) Cosa cambia se f e g non sono entrambe continue?

Esercizio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che
$\exists\, c > 0 \mid$
$$|f(x_2) - f(x_1)| \geq c|x_2 - x_1|$$
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere

1) f è iniettiva
2) f è strettamente monotona
3) f è limitata
4) $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$
5) f è iniettiva ma non monotona

1) Iniettiva vuol dire

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(o detto altrimenti

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \,)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| > 0$$

$$\Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| \geq c\,|x_2 - x_1| > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1) \Rightarrow f \text{ è iniettiva}$$

2) f è definita su un intervallo, continua e invertibile (perché iniettiva) $\Rightarrow$ è strettamente monotona

5) è falsa

3) f limitata $\quad \exists M > 0 \mid$

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per fissare le idee, assumiamo f strettamente crescente

$$(x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1))$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \geq c\,|x_2 - x_1|$$

$x_1 = 0 \qquad x > 0 \qquad |f(x) - f(0)| = f(x) - f(0)$

$|x - 0| = x \qquad f(x) - f(0) \geq cx \Rightarrow f(x) \geq f(0) + cx$

$\Rightarrow f$ non è limitata

a) inf $(= f(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$? (f crescente)

$f(\mathbb{R})$ è un intervallo

f è superiormente illimitata

Se dimostro che f è inferiormente illimitata $\Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$x<0 \qquad f(x) - f(0) < 0$

$|f(x) - f(0)| = f(0) - f(x) \geq c|x| = -cx$

$f(x) \leq f(0) + cx \to -\infty$ per $x \to -\infty$

$\Rightarrow f$ è inferiormente illimitata //

<u>Esercizio</u>

Si calcoli, se esiste, il limite della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

definita da

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = e^{-a_n} a_n^2, \quad n \geq 0$$

[$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} x^2$

$a_0 = 1$ e $a_{n+1} = f(a_n)$

$a_1 = f(1) = \frac{1}{e} \qquad a_2 = f(a_1) =$

$= f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2} e^{-1/e}$]

- Proviamo a dimostrare che

$$0 \le a_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) $n=0$ vero!

2) procediamo per induzione

Ipotesi induttiva: $0 \le a_n \le 1$

Proviamo che allora $0 \le a_{n+1} \le 1$

≤ 1 perché $a_n \ge 0$

$$a_{n+1} = e^{-a_n} a_n^2$$

≤ 1 perché $0 \le a_n \le 1$

$$\Rightarrow \quad 0 \le a_{n+1} \le 1$$

$\Rightarrow \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è successione limitata

- Dimostriamo che è monotona

$$a_{n+1} = e^{-a_n} a_n^2 =$$

$$= \underset{\in [0,1]}{e^{-a_n}} \cdot \underset{\in [0,1]}{a_n} \cdot a_n \le a_n$$

$\Rightarrow$ la successione è decrescente e quindi ha limite $l \in \mathbb{R}$, essendo limitata

$$\Rightarrow \lim_n a_n = l = ?? \quad l \in [0,1]$$

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad , \quad f \text{ è continua}$$

$n \to +\infty$: $\quad a_{n+1} \to l$, $\quad f(a_n) \to f(l)$ perché f è continua

$$\Rightarrow l = f(l)$$

$$l = e^{-l} l^2 \qquad l(l e^{-l} - 1) = 0$$

$l = 0$ è soluzione. Ce ne sono altre?

$$l e^{-l} = 1 \qquad e^{l} = l \quad \text{Mai verificata}$$

perché $\quad e^x > x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_n a_n = 0$$