CALCOLO DIFFERENZIALE TEORIA

LUNEDÌ 3/12

Calcolo differenziale

Il problema della velocità

$s = s(t)$ legge oraria

Calcolare la velocità $v(t_0)$ ad un certo istante t_0 fissato

Si considera un intervallo $[t_0, t_0+h]$

La velocità media in quell'intervallo

$$v_m[t_0](h) = \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h}$$

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h}$$

rapporto incrementale di s tra t_0 e t_0+h

Il problema dell'approssimazione lineare

$f(x) = \text{sen}(2x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

voglio cercare il "migliore" polinomio di primo grado che approssima f vicino a x_0

$$p(x) = m(x-x_0) + q$$

Cerco m e q $\quad p(x_0) = f(x_0)$

$$\Rightarrow q = f(x_0)$$

Cerco m in modo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{x - x_0} = 0$

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - (m(x - x_0) + \operatorname{sen}(2x_0))}{x - x_0} =$$

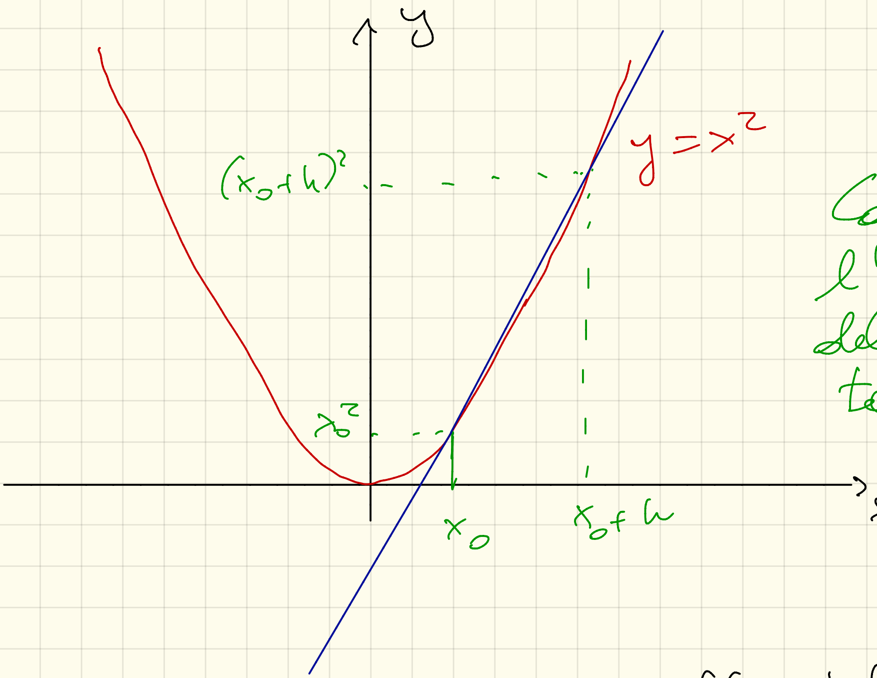
$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(2x_0)}{x - x_0} - m \right]$$

rapporto incrementale di f tra x_0 e x_0+h =

$$\Rightarrow m = \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(2x_0)}{x - x_0} \overset{h = x - x_0}{=} 2\cos(2x_0)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2(x_0+h)) - \operatorname{sen}(2x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Il problema del calcolo della retta tangente



Calcolare l'equazione della retta tangente nel punto (x_0, x_0^2)

L'equazione della secante è $y = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$

$$y = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}(x - x_0) + x_0^2$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

rapporto incrementale di f tra x_0 e x_0+h

Il coefficiente angolare della retta tangente è

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0$$

Definizione: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$. Se esiste, il

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

$h = x - x_0$

si dice derivata o derivata prima di f in x_0, ed è indicata con una delle seguenti notazioni

$$\boxed{f'(x_0)}, \quad Df(x_0), \quad \frac{d}{dx} f(x_0), \quad \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0},$$

$$Df(x)\Big|_{x=x_0}$$

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora f si dice derivabile in x_0. Se f è derivabile in ogni punto di I, f si dice derivabile in I

Osservazione importante: Se f è derivabile in x_0, allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

per $x \to x_0$

perché $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Teorema: Se $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, è derivabile in $x_0 \in I$, allora è continua in x_0

Dim.: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\downarrow\, 0} \right] = f(x_0) \quad //$$

derivabile in x_0 $\Longrightarrow$ continua in x_0

$\not\Longleftarrow$

Esempio: $f(x) = |x|$, continua

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = $$
$$= \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x \quad \nexists$$

$\Rightarrow f$ non è derivabile in $x_0 = 0$

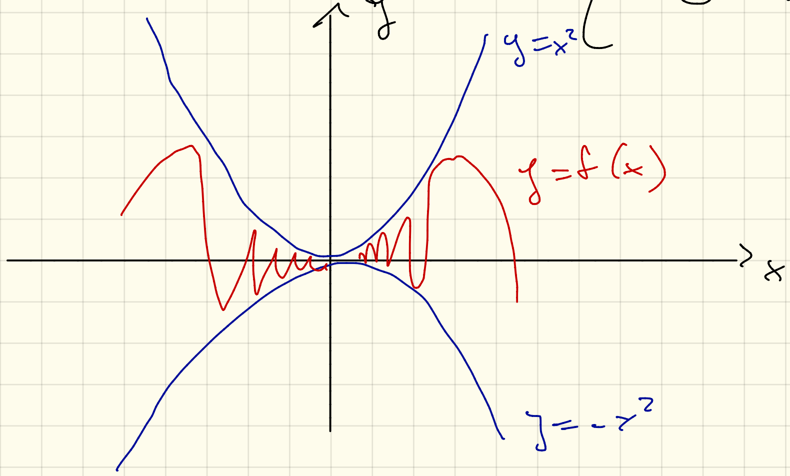
Definizione: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$. Si definisce **retta tangente** al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

la retta di equazione

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Es.:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ la retta $y = 0$ è tangente al grafico di f in $(0,0)$

MARTEDÌ 4/12

Esempi importanti

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$

e dimostriamo che f è derivabile

- $n=0$ $\quad f(x) = 1 \quad \forall x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1-1}{x-x_0} = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile con derivata nulla in ogni punto

- $n=1$ $\quad f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

- $n>1$ $\quad f(x) = x^n$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

n sopra k

formula del binomio di Newton

[Triangolo di Tartaglia

$$(a+b)^n = ??a^n + ??ab^{n-1} + ??a^2b^{n-2} + \dots + ??a^{n-1}b + ??b^n$$

$(a+b)$ 1 1

$(a+b)^2$ 1 2 1

$(a+b)^3$ 1 3 3 1

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1]

$$(x_0+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k =$$

$$= x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k}$$

≥ 2

$k=0$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$

$k=1$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$= x_0^n + n x_0^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k$$

$$\frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\cancel{x_0^n} + n x_0^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - \cancel{x_0^n}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[n x_0^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k\right] =$$

$$= n x_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\cancel{h}} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{\cancel{k}\, k-1} \Bigg] =$$

$$= n x_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \quad \geq 1$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[n x_0^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} \underset{\downarrow\, 0}{h^{k-1}} \quad \geq 1\right] =$$

$$= n x_0^{n-1}$$

$$\boxed{D x^n = n x^{n-1}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{D x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}} \qquad \forall x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

• Proviamo che $\boxed{D\cos x = -\operatorname{sen} x}$

cioè che cos è derivabile in ogni punto e la sua derivata in x_0 è $-\operatorname{sen} x_0$

$$D\cos x_0 = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} h - \cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\cos x_0 \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \operatorname{sen} x_0 \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1} \right] = -\operatorname{sen} x_0$$

Analogamente si dimostra che sen è derivabile in $\mathbb{R}$ e vale

$$\boxed{D\operatorname{sen} x = \cos x}$$

• Proviamo che

$$\boxed{De^x = e^x} \qquad \exp(x) = e^x$$

$$D\exp(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} e^{x_0} \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} = e^{x_0}$$

In modo analogo si dimostra che

$$\boxed{D a^x = (\ln a)\, a^x} \qquad a>0$$

. Proviamo che

$$\boxed{D \ln|x| = \frac{1}{x}} \qquad x \neq 0$$

$$D \ln|x_0| = \lim_{h\to 0} \frac{\ln|x_0+h| - \ln|x_0|}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left|\frac{x_0+h}{x_0}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left| 1 + \frac{h}{x_0} \right|$$

>0 definitivamente per $h\to 0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right) =$$

$$t = h/x_0$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{x_0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x_0}$$

$\to 1$

Analogamente

$$\boxed{D \log_a |x| = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}} \qquad x \neq 0$$

$a>0,\ a\neq 1$

Teoremi sul calcolo delle derivate

Teorema: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in I$. Allora $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e, se $g(x_0) \neq 0$, f/g sono derivabili in x_0 e

$$\boxed{\begin{aligned} (f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \end{aligned}}$$

Dim.:

- $$(f+g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow \; f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow \; g'(x_0)} \right]$$

$= f'(x_0) + g'(x_0)$ per il teorema sul limite di una somma

$$- (f\cdot g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x_0+h) - (f\cdot g)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0)\, g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0) g(x_0+h) + f(x_0) g(x_0+h) - f(x_0) g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow\; f'(x_0)} \underbrace{g(x_0+h)}_{\downarrow\; g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow\; g'(x_0)} \right]$$

perché g è continua in x_0

$$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

La formula per $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)$ si dimostra provando prima che

$$\boxed{D\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}}$$

e poi scrivendo

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e utilizzando la formula per la derivata di un prodotto

- $$\boxed{D \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$D \tan x = D \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot D \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \, D \cos x}{\cos^2 x} =$$

$\cos x$ $\quad - \operatorname{sen} x$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

In modo analogo si dimostra che

$$\boxed{D \cot x = -1 - \cot^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$x \neq k\pi$

- Calcoliamo $D \tanh x = D \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

$$\boxed{D \operatorname{senh} x = \cosh x}$$

$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$(\operatorname{senh})'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{senh}(x_0 + h) - \operatorname{senh} x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{e^{x_0+h}+e^{-x_0-h}}{2} - \frac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{2}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} - \frac{e^{-x_0-h}-e^{-x_0}}{h}\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2}\left[e^{x_0}\underbrace{\frac{e^{h}-1}{h}}_{\downarrow\, 1} - e^{-x_0}\underbrace{\frac{e^{-h}-1}{h}}_{\downarrow\, -1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x_0}+e^{-x_0}\right) = \cosh x_0$$

Analogamente, si dimostra che

$$\boxed{D \cosh x = \sinh x}$$

$$D \tanh x = D\, \frac{\sinh x}{\cosh x} =$$

$$= \frac{\cosh x (D \sinh x) - \sinh x (D \cosh x)}{\cosh^2 x} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\boxed{D\tanh x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}}$$

- $$D \coth x = D\left(\frac{1}{\tanh x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\tanh^2 x}\left(\cdot D\tanh x\right) =$$

$$= -\frac{\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x} = -\frac{\overbrace{1}^{= \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}}{\operatorname{senh}^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

- Come calcolo, se $\exists$, $D \arctan x$?

$$D \arctan x_0 = \lim_{h \to 0} \frac{\arctan(x_0+h) - \arctan x_0}{h}$$

$$D \arcsin x_0 = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x_0+h) - \operatorname{arcsen} x_0}{h}$$

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$D \tan(\arctan x) = Dx = 1$$

Teorema: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua, invertibile e derivabile in $x_0 \in I$ con $f'(x_0) \neq 0$. Allora $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

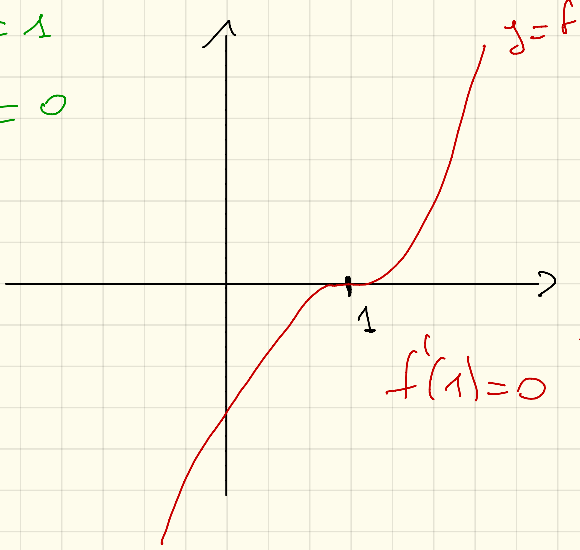
$$\begin{tikzcd} f^{-1}(y_0) = x_0 \arrow[rr, bend left, "f"] & & f(x_0) = y_0 \arrow[ll, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

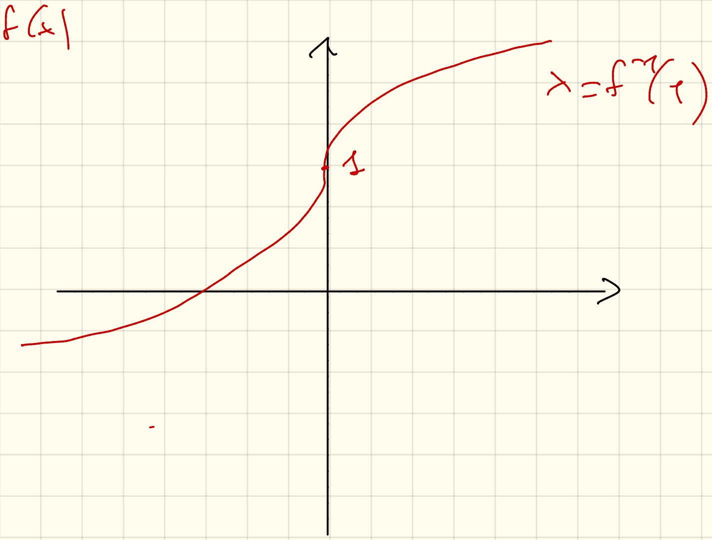
Es.: $f(x) = (x-1)^3$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} + 1 & \text{se } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} + 1 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

$x_0 = 1$

$y_0 = 0$





$$\operatorname{arctan} = \left(\tan\Big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \right)^{-1}$$

$$D \tan x = 1 + \tan^2 x \neq 0$$

$\Rightarrow$ arctan è derivabile in ogni punto

$$\boxed{D \operatorname{arctan} x = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$D \operatorname{arctan} x = \frac{1}{\left(\tan\Big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)'(\operatorname{arctan} x)}$$

$f = \tan\Big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$

$f^{-1} = \operatorname{arctan}$

$$\Rightarrow D \operatorname{arctan} x = \frac{1}{1+\left[\tan(\operatorname{arctan} x)\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

- Dimostriamo che

$$\boxed{D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1}$$

$$\operatorname{arcsen} = \left(\operatorname{sen}\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} \right)^{-1}$$

$$(\operatorname{sen})'(x) = \cos x \quad , x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{sen}\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)'(x) \neq 0 \iff x \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

Per quali y $\operatorname{arcsen} y = \pm \frac{\pi}{2}$??

$$\iff y = \pm 1$$

$\Rightarrow$ arcsen è derivabile in $]-1,1[$

$x \in]-1,1[$

$$D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\left(\operatorname{sen}\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)'(\operatorname{arcsen} x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)]^2}} =$$

$\Uparrow$ $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\hookrightarrow$ qui cos è ≥ 0

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Analogamente

$$\boxed{D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , x \in]-1,1[}$$

$$\boxed{D \,\mathrm{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}}$$

Teorema (regola della catena):

Siano f e g funzioni reali di variabile reale con $g \circ f$ definita in un intervallo I. Sia $x_0 \in I$ tale che f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)}$$

(Composizione di funzioni derivabili è derivabile)

- $D\left(g(f(x))\right) = g'(f(x))\, f'(x)$

- $D\, e^{\operatorname{sen} x}$

$$x \xrightarrow[\text{sen}]{f} \operatorname{sen} x \xrightarrow[\exp]{g} e^{\operatorname{sen} x}$$

$$D\, e^{\operatorname{sen} x} = (\exp)'(\operatorname{sen} x) \cdot (\operatorname{sen})'(x) =$$

$$= e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$

- $D a^x \qquad a^x = e^{x \ln a}$

$$x \longrightarrow x \ln a \xrightarrow{\exp} e^{x \ln a}$$

$$D a^x = (\exp)'(x \ln a) \cdot D(x \ln a) =$$

$$= e^{x \ln a}\left(\ln a + x \underbrace{(D \ln a)}_{= 0}\right) =$$

$$= a^x \ln a$$

- $D x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \quad x > 0$

$$x \longrightarrow \alpha \ln x \xrightarrow{\exp} e^{\alpha \ln x}$$

$$D x^\alpha = (\exp)'(\alpha \ln x) \cdot D(\alpha \ln x) =$$

$$= e^{\alpha \ln x} \cdot \big[\underbrace{(D\alpha)}_{=0} \ln x + \alpha \underbrace{D \ln x}_{=1/x} \big] =$$

$$= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\tan(\arctan x) = x$$

$$D \tan(\arctan x) = D x = 1$$

$$1 = D \overset{g}{\tan}(\overset{f}{\arctan x}) =$$

$$= (\tan)'(\arctan x) \cdot D \arctan x =$$

$$= \left(1 + (\tan(\arctan x))^2\right) \cdot D \arctan x$$

$$= (1 + x^2) \, D \arctan x$$

$$\Rightarrow D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

(qui stiamo dando per scontata la derivabilità di arctan)

MERCOLEDÌ 5/12

- $D(h(g(f(x)))) = D(h \circ g \circ f)(x) =$

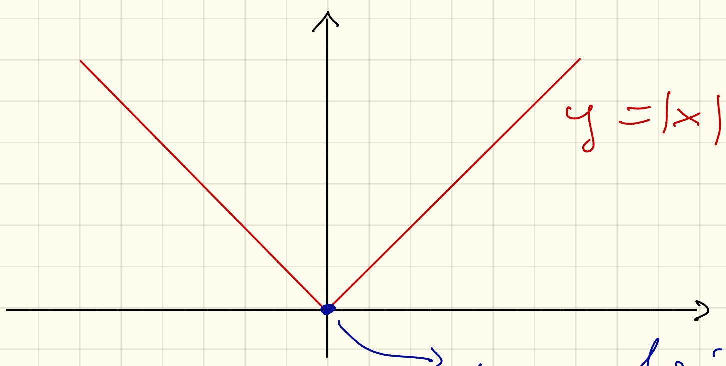
$$= D[(h \circ g) \circ f](x) =$$

$$= (h \circ g)'(f(x))\, f'(x) =$$

$$= h'(g(f(x)))\, g'(f(x))\, f'(x)$$

Analisi dei punti di non derivabilità

Derivate destra e sinistra



non derivabile in $x_0 = 0$

perché $\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ non esiste.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1$$

Def.: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$. Se $\exists$ finito

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

f si dice derivabile da destra in x_0. Il valore del limite si dice derivata destra di f in x_0 ed è indicato con

$$f'_+(x_0) \quad \text{o} \quad D^+f(x_0)$$

Se $\exists$ finito

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

f si dice derivabile da sinistra in x_0. Il valore del limite si dice derivata sinistra di f in x_0 ed è indicato con

$$f'_-(x_0) \quad \text{o} \quad D^-f(x_0)$$

- Se f è derivabile da destra in x_0, allora $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

• Se f è derivabile da sinistra in x_0, allore
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Teorema: $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in]a,b[$ $\iff$ f è derivabile da destra e da sinistra in x_0 e vale $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. In tal caso,
$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

Definizione: $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in]a,b[$ e tale che $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistono entrambe, almeno una delle due è finita (cioè non è uno dei simboli $\pm\infty$) e vale $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$. Allora x_0 si dice punto angoloso per f

Es.: $x_0 = 0$ per $x \mapsto |x|$

Es.: $g(x) = e^{|x-1|}$ g è derivabile per $x \neq 1$ perché composizione di exp e $x \mapsto |x-1|$ che non è derivabile in $x=1$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{|x-1|}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{1-x}-1}{x-1} = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{|x-1|}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = 1$$

$\Rightarrow$ f ha un punto angoloso in $x=1$

$$D\, e^{|x-1|} = D(\exp(|x-1|)) =$$

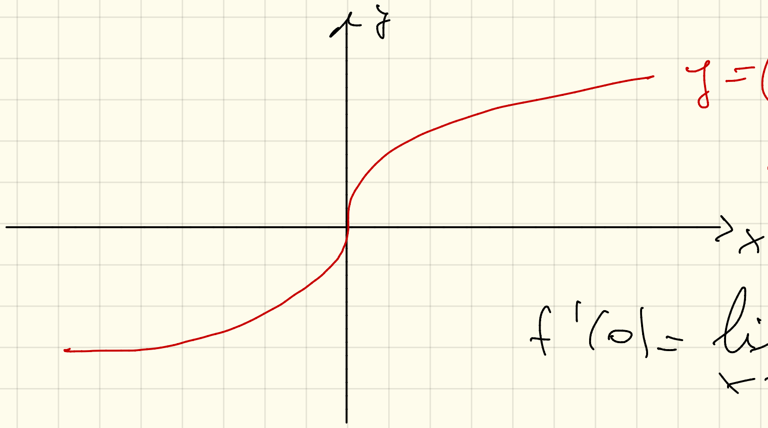
$$D\,|x| = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases} = \operatorname{sgn} x, \quad x \neq 0$$

$$= (\exp)'(|x-1|) \cdot D|x-1| =$$

$$= e^{|x-1|} \operatorname{sgn}(x-1)$$

Definizione: $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in]a,b[$ e tale che $f'(x_0) = +\infty$ o $f'(x_0) = -\infty$. Allora x_0 si dice (punto di) flesso a tangente verticale

Es.: $f(x) = (\operatorname{sgn} x)\sqrt{|x|}$



$y = (\operatorname{sgn} x)\sqrt{|x|}$

$x_0 = 0$ è flesso e tangente verticale

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x \frac{\sqrt{|x|}}{x} =$$

$= \operatorname{sgn} x \sqrt{x^2}$

$x = (\operatorname{sgn} x)|x|$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$$

Definizione: $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in]a,b[$ e tale che

$f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$

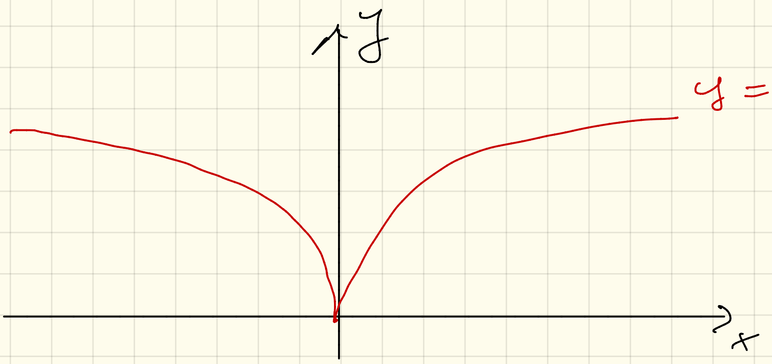
oppure

$f'_+(x_0) = -\infty$ e $f'_-(x_0) = +\infty$

(derivate destra e sinistra sono entrambe infinite, ma di segno opposto)

Allora x_0 si (punto di) cuspide per f

Es.: $f(x) = \sqrt{|x|}$



$y = \sqrt{|x|}$

$x_0 = 0$ è cuspide per f

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{|x|} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{\sqrt{|x|}} = -\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{|x|} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty$$

Ci sono altri casi che non sono classificati, e sono quelli dove una delle due derivate destra o sinistra non esiste

Es.:

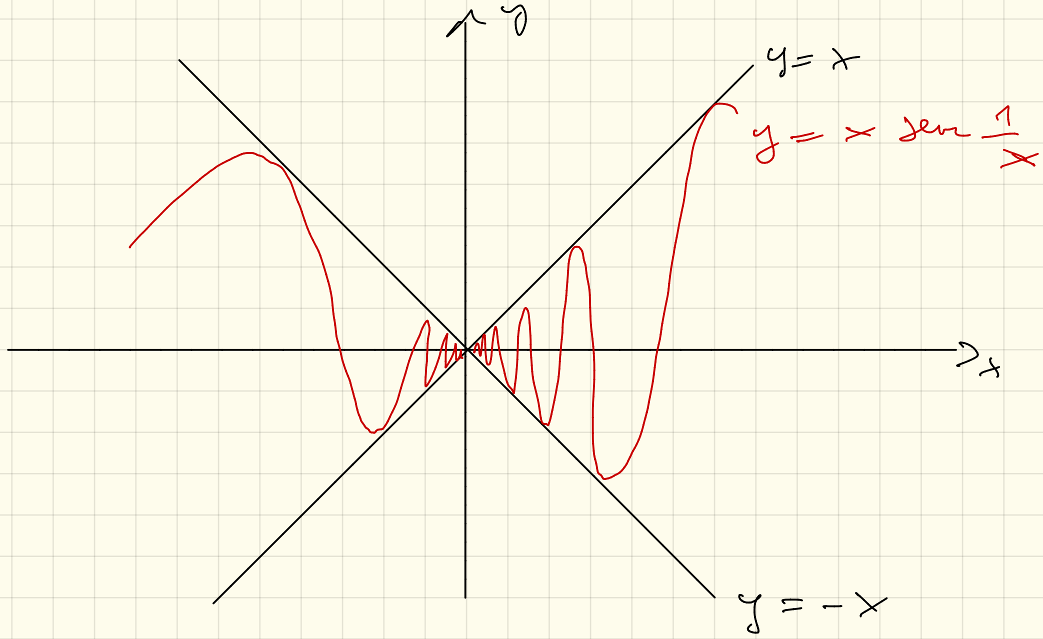
$$\varphi(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

φ è continua in $x_0 = 0$, ma

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \ \nexists, \text{ e}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \ \nexists$$

f non ha derivata destra e sinistra in $x_0 = 0$



La funzione derivata e le derivate successive

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$D = \{ x \in I \mid f \text{ è derivabile in } x \}$

posso definire la (funzione) derivata

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

Es.: $f = \operatorname{sen}$ $\quad D = \mathbb{R}$ $\quad f' = \cos$

$f = \ln$ $\quad D = \mathbb{R}^{>0}$ $\quad f' : x \longmapsto \frac{1}{x}$

$f = |\cdot|$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f' = \operatorname{sgn}$

Teorema del limite della derivata:

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, f continua in x_0. Se f è derivabile in I escluso al più il punto x_0 e $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x)$, allora $\exists f'(x_0)$ e vale $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.

In particolare, se $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ esiste finito, allora f è derivabile in x_0.

Es.:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

φ è continua in $x_0 = 0$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $x \neq 0$, $\varphi'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^2 D\left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) =$

$$= 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^2 \cdot \left(\cos \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \varphi'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) \quad \nexists$$

$2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \to 0$; $\cos\frac{1}{x} \to$???

$$0 \le \left|2x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le 2|x|$$

$\Rightarrow$ il limite in zero di $\varphi'(x)$ non esiste, ma

φ è derivabile in $x_0 = 0$

$$\varphi'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

Es.:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ φ è continua in $x_0 = 0$ e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $x \neq 0$

$$\varphi'(x) = D\,\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $\operatorname{sen} x \to x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2} \overset{PdS}{=} 0$$

$\Rightarrow \varphi$ è derivabile con $\varphi'(0) = 0$ //

N.B.: Se non si verifica l'ipotesi di continuità di f in x_0 si possono prendere delle cantonate

$f(x) = \operatorname{sgn} x$, che non è continua in $x_0 = 0$

e $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$

Es.:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x + \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 7 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \quad \forall\, x \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$

Ma $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow f$ non è continua in $x_0 = 0$, e quindi neanche derivabile

Teorema di De L'Hôspital :

$f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, derivabili

Supponiamo che

1) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

2) $f(x), g(x) \to 0$ per $x \to a^+$ oppure

$|f(x)|, |g(x)| \to +\infty$ per $x \to a^+$

Se $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, allora $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Un risultato analogo vale per il limite per $x \to b^-$

$\boxed{\text{N.B. :}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{x + \operatorname{sen} x}^{f(x)}}{\underbrace{x - \operatorname{sen} x}_{g(x)}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = ??$$

questo non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \overbrace{\operatorname{sen} x}^{o(x) \text{ per } x \to +\infty}}{x - \operatorname{sen} x} = 1$$

$\boxed{\text{N.B.:}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{f(x)}{1-\cos x^4}}{\underset{g(x)}{x \ln(1+x^7)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^8}{2}+o(x^8)}{x^8+o(x^8)} \overset{PdS}{=} \frac{1}{2}$$

$$\cos x^4 = 1 - \frac{x^8}{2} + o(x^8)$$

$$\ln(1+x^7) = x^7 + o(x^7)$$

GIOVEDÌ 6/12

Es.:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per induzione

1) è vero per $n=1$ e $n=2$

2) se $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(n+1)x^n} = +\infty$$

Se $\alpha > 0$, $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

perché $[\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha]+1$

$\longrightarrow$ parte intera di α

Se $x > 1 \Rightarrow x^\alpha \leq x^{[\alpha]+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{x^{[\alpha]+1}} \Rightarrow \frac{e^x}{x^\alpha} \geq \frac{e^x}{x^{[\alpha]+1}} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x\to+\infty$$

n

e si conclude con il teorema del confronto

Es.:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln x}}{\underset{\to +\infty}{\frac{1}{x}}} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) E' vero per $n = 1$

2) Se $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^n = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^{n+1} = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^{n+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^{n+1}}{\frac{1}{x}} \overset{(H)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(n+1)(\ln x)^n \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -(n+1)\, x\, (\ln x)^n = 0$$

per ipotesi induttiva

Come primo, si deduce che se $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x\,|\ln x|^\alpha = 0 \qquad [\alpha] \leq \alpha \leq [\alpha]+1$$

Se $0 < x < \frac{1}{e} \Rightarrow |\ln x| > 1$

$$\Rightarrow \quad |\ln x|^\alpha \leq |\ln x|^{[\alpha]+1}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x>0}}{0 \leq} x\,|\ln x|^\alpha \leq \underbrace{x\,|\ln(x)|}_{\downarrow\, 0}{}^{[\alpha]+1}$$

$n \in \mathbb{N}$

Si conclude con il teorema dei due carabinieri

Derivate successive alla prima

Definizione: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. Se f' è derivabile in x_0, cioè se $\exists$ finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h},$$

allora f si dice derivabile due volte in x_0 e il valore del limite è detto derivata seconda di f in x_0 ed è indicato con

uno dei simboli

$$f''(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

Es.:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x$$

$$\operatorname{sen}''(x) = D(\operatorname{sen}'(x)) =$$

$$= D \cos x = -\operatorname{sen} x$$

Analogamente, $D \cos x = -\cos x$

Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte in I, posso considerare $D(f'')$

$$f'': I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f''(x)$$

e vedo se $\exists$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0}$$

Se $\exists$ finito lo chiamo derivata terza di f in x_0

$$f'''(x_0), \quad f^{(3)}(x_0), \quad D^3 f(x_0), \quad \frac{d^3}{dx^3} f(x_0)$$

Definizione: Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $n-1$ volte in I. Se la derivata di ordine $n-1$ di f in I,

$$f^{(n-1)}: I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f^{(n-1)}(x)$$

$(n = 3, \quad n-1 = 2)$

è derivabile in $x_0 \in I$, allora f si dice derivabile n volte in I e

$$Df^{(n-1)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

si dice derivata n-esima di f in x_0 ed è indicata con

$$f^{(n)}(x_0) \quad , \quad D^n f(x_0) \quad , \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x_0)$$

Es.: $\quad \operatorname{sen}''(x) = -\operatorname{sen} x$

$$\operatorname{sen}^{(3)}(x) = D(-\operatorname{sen} x) = -\cos x$$

$$\operatorname{sen}^{(4)}(x) = D(\operatorname{sen}^{(3)}(x)) = D(-\cos x) = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}^{(5)}(x) = D(\operatorname{sen}^{(4)}(x)) = D(\operatorname{sen} x) = \cos x$$

Es.: $\quad f(x) = e^x = \exp(x)$

$$\exp'(x) = e^x \quad , \quad \exp''(x) = (D \exp'(x)) = D(e^x) = e^x$$

$$\exp^{(3)}(x) = D(\exp''(x)) = D(e^x) = e^x$$

$$D^n(e^x) = e^x \qquad \forall n \geq 1$$

Es.: $\quad P_1(x) = x \qquad P_1'(x) = 1 \quad P_1''(x) = 0$

$$\Rightarrow P_1^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 2$$

- $P_2(x)=x^2$, $P_2'(x)=2x$,

$$P_2''(x)=D\left(P_2'(x)\right)=2$$

$$P_2^{(3)}(x)=D\left(P_2''(x)\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad P_2^{(n)}(x)=0 \quad \forall n\geq 3$$

- $P_k(x)=x^k \qquad k\geq 3$

$P_k'(x)=kx^{k-1} \qquad P_k''(x)=k(k-1)x^{k-2}$

$P_k^{(3)}(x)=k(k-1)(k-2)x^{k-3}$

$$P_k^{(k)}(x)=k\cdot(k-1)(k-2)\cdots 1\; x^{k-k}$$

$$\;\,\overset{\mid}{=}\; k(k-1)(k-2)\cdots 1 = k!$$

$$D^n x^k=0 \qquad \forall n\geq k+1$$

$$\left(D^{k+1}x^k=D\left(P_k^{(k)}(x)\right)=D\,k!=0\right)$$

Teorema (formula di Leibniz): $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo, $f,g:I\to\mathbb{R}$ derivabili n volte in I. Allora

$$(f\cdot g)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)\,g^{(k)}(x_0)$$

Notazioni

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$$C^0(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua} \}$$

$$C^1(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile in } I \text{ e } f' \in C^0(I) \}$$

$$C^2(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile 2 volte in } I \text{ e } f'' \in C^0(I) \}$$

$n \geq 1$

$$C^n(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile } n \text{ volte in } I \text{ e } f^{(n)} \in C^0(I) \}$$

Se $f \in C^n(I)$, f si dice di classe C^n in I

$$C^\infty(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ è derivabile } n \text{ volte in } I \ \forall n \geq 1 \}$$

Es.: sen, cos, exp $\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\ln \in C^\infty(\mathbb{R}^{>0})$, polinomi sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$

Es.:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

φ è derivabile in $\mathbb{R}$, ma $\varphi \notin C^1(\mathbb{R})$

perché $\lim_{x \to 0} \varphi'(x)$ non esiste

Invece, $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Somma, prodotto, quoziente con denominatore diverso da zero, e composizione di funzioni di classe C^n sono di classe C^n