CALCOLO DIFFERENZIALE ESERCIZI

MERCOLEDÌ 5/12

Esercizio

prodotto

Calcolare $D\left[\left(\operatorname{sen}(\ln(x^4+e^x))\right)\cdot \tan x\right] =$

$= \tan x \cdot D(\operatorname{sen} \ln(x^4+e^x)) +$

$+ \operatorname{sen} \ln(x^4+e^x)\, D\tan(x) =$

$= \tan x\, (\operatorname{sen})'(\ln(x^4+e^x)) \cdot (\ln)'(x^4+e^x) \cdot$

$\cdot D(x^4+e^x) + (\operatorname{sen} \ln(x^4+e^x))(1+\tan^2 x) =$

$$= (\tan x)(\cos(\ln(x^4+e^x))) \cdot \frac{1}{x^4+e^x} \cdot (4x^3+e^x) +$$

$$+ (\operatorname{sen}(\ln(x^4+e^x))) (1+\tan^2 x)$$

<u>Esercizio</u>

Calcolare $D\ (x^4+1)^{\operatorname{sen} x}$

$$D\, f(x)^{g(x)} = D\, e^{g(x) \ln f(x)} =$$

$$= D \exp(g(x) \ln f(x)) = (\exp)'(g(x) \ln f(x)) \cdot D(g(x) \ln f(x)) =$$

$$= e^{g(x) \ln f(x)} \cdot (\ln f(x) \cdot D g(x) + g(x) \cdot D \ln f(x)) =$$

$$= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x) \right)$$

$$D\ (x^4+1)^{\operatorname{sen} x} = D\, e^{\operatorname{sen} x \ln(x^4+1)} =$$

$$= e^{\operatorname{sen} x \ln(x^4+1)} \cdot \Big[\ln(x^4+1) \cdot D \operatorname{sen} x +$$

$$+ \operatorname{sen} x\, D \ln(x^4+1) \Big] =$$

$$= (x^4+1)^{\operatorname{sen} x} \Big[\ln(x^4+1) \cdot (\cos x) +$$

$$+ \operatorname{sen} x \frac{1}{x^4+1} \cdot 4x^3 \Big]$$

Esercizio

Studiare la derivabilità in $x_0 = 0$ della funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

f è derivabile $\forall x \neq 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1-1}{x} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1}{x} =$$

$\operatorname{sen} x \to x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$ per $x \to 0$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)}{x^2} \overset{PdS}{=} 0 = f'_-(0)$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x_0 = 0$ con derivata nulla

Esercizio

Calcolare

$$D \arcsin \sqrt{2-|x-3|}$$

$$x \longrightarrow x-3 \longrightarrow |x-3| \longrightarrow 2-|x-3| \longrightarrow \sqrt{2-|x-3|} \longrightarrow \arcsin\sqrt{2-|x-3|}$$

$$D \arcsin t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad D\sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad D|t-3| = \operatorname{sgn}(t-3)$$

$$D \arcsin \sqrt{2-|x-3|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2-|x-3|)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-|x-3|}} \cdot \left(-\operatorname{sgn}(x-3)\right)$$

$$D(2-|x-3|) =$$

$$= D2 - D|x-3| = -\operatorname{sgn}(x-3)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{|x-3|-1}} \quad \frac{\operatorname{sgn}(x-3)}{\sqrt{2-|x-3|}}$$

Per quali x posso fare questo conto?

Guardo solo la derivabilità

Per derivare arcsen, $-1 < \sqrt{2-|x-3|} < 1$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{0}}{t} = +\infty$$

Per derivare $\sqrt{2-|x-3|}$, $2-|x-3|>0$

Per derivare $|x-3|$, $x-3 \neq 0$

Tra i punti del dominio di arcsen $\sqrt{2-|x-3|}$ quelli dove posso applicare la regola della catena sono tutti e soli

quelli che soddisfano

$$\begin{cases} -1 < \sqrt{2-|x-3|} < 1 \\ 2-|x-3| > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$$

GIOVEDÌ 6/12

Esercizio

Trovare, se esistono, α, β e $\gamma \in \mathbb{R}$ | la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

sia derivabile in $\mathbb{R}$. Nel caso tali valori esistano, dire se la corrispondente funzione è di classe C^1 in $\mathbb{R}$.

Continuità:

- $x_0 = 0$ Deve essere

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \gamma$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

- $x_0 = 1$ Deve essere

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) =$$
$$= \alpha + \beta + \gamma$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x+1) = 2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha + \beta + \gamma = 2}$$

$$f \text{ è continua} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Derivabilità

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e vale

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 2\alpha x + \beta & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1 = f'_-(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \beta = f'_+(0)$$

per il teorema del limite della derivata

Affinché f sia derivabile in $x_0 = 0$ deve essere $\boxed{\beta = 1}$

- $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} (2\alpha x + \beta) = 2\alpha + \beta = f'_-(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1 = f'_+(1)$$

deve essere $\boxed{2\alpha + \beta = 1}$

Allora f è derivabile $\iff$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \gamma = 0 \end{array}\right\} \text{continuità} \\ \beta = 1 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases} \quad ??$$

non ha soluzioni

<u>Esercizio</u>

Trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ affinché la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (3\beta - 1)\,\operatorname{senh} x - 2(\alpha + 1)\cos 3x & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \beta(x^2 + x) - (\alpha + 1)\,\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

sia derivabile. La funzione così trovata è di classe C^2 (è derivabile 2 volte con derivata seconda continua)?

Devo verificare cosa succede in $x_0 = 0$

Continuità

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = -2(\alpha+1)$$ $\Rightarrow$ se $\alpha = -1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[(3\beta-1)\operatorname{senh} x - 2(\alpha+1)\cos(3x)\right] =$$

$$= -2(\alpha+1)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \Big[\underbrace{\beta(x^7+x)}_{0} - (\alpha+1)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\Big] =$$

$$= \begin{cases} \nexists & \text{se } \alpha \neq -1 \\ 0 & \text{se } \alpha = -1 \end{cases}$$

$\operatorname{sen}\frac{1}{x} \to$?? non ho limite

f è continua $\Leftrightarrow \alpha = -1$

$$f(x) = \begin{cases} (3\beta-1)\operatorname{senh} x & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \beta(x^7+x) & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Derivabilità

f è derivabile per $x \neq 0$ e

$$f'(x) = \begin{cases} (3\beta-1)\cosh x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \beta(2x+1) & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (3\beta-1)\cosh x = 3\beta - 1 = f'_-(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \beta(2x+1) = \beta = f'_+(0)$$

f è derivabile in $x_0 = 0 \iff$

$$f'_-(0) = f'_+(0) \iff 3\beta - 1 = \beta \iff \beta = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sinh x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}(x^2+x) & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$f \in C^1([-1,1])$ perché

$f \in C^1([-1,1] \setminus \{0\})$ banalmente

e in $x_0 = 0$ ho imposto il valore di β

affinché $\lim_{x\to 0} f'(x)$ esiste finito

$f \in C^2$?? Sicuramente f è derivabile 2 volte per $x \neq 0$ e vale

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cosh x & \text{se } -1 \le x \le 0 \\ \frac{1}{2}(2x+1) & \text{se } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sinh x & \text{se } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^-} f''(x) = 0$ ma $\lim_{x \to 0^+} f''(x) = 1$

$\Rightarrow f''$ non può essere continua in $x_0 = 0$, anzi, f non è derivabile 2 volte in $x_0 = 0$ (si utilizza il teorema del limite della derivata per $f'(x)$ e si ottiene $D^+f'(0) = 1$ e $D^-f'(0) = 0$)