FUNZIONI DERIVABILI

TEORIA

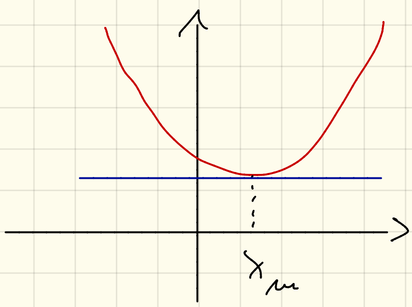
GIOVEDì 6/12

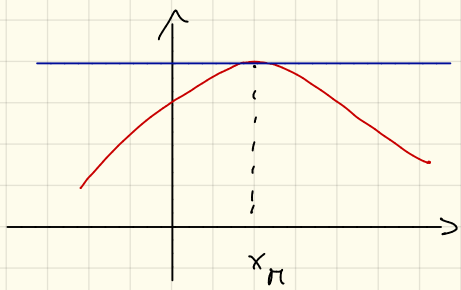
Proprietà delle funzioni derivabili

Es.: Trovare il minimo di

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0$$

e V è dato (5 lt)



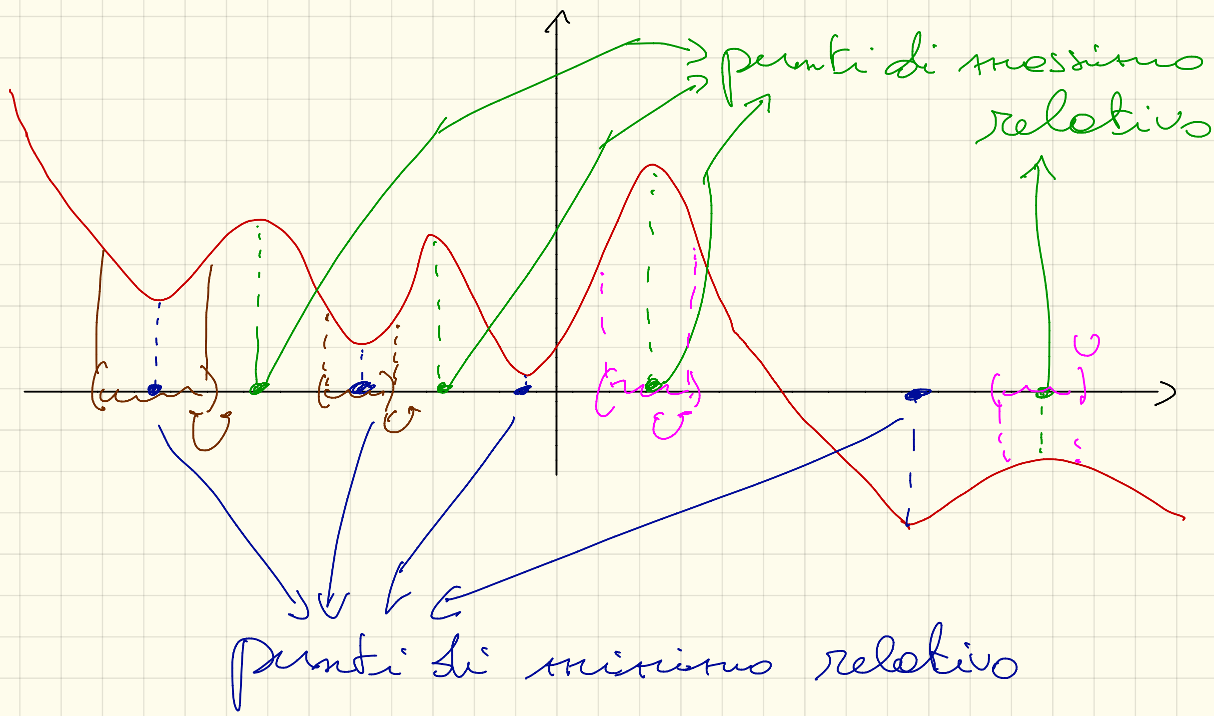


Definizione: Sia f funzione reale di variabile reale. Un punto $x_0 \in \operatorname{dom} f$ si dice di minimo locale o relativo per f se $\exists$ un intorno U di x_0 |

$[f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U \cap \operatorname{dom} f]$

Analogamente x_0 si dice di massimo locale o relativo per f se $\exists$ un intorno U di x_0 |

$[f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in U \cap \operatorname{dom} f]$



Definizione: Se $x_0 \in \text{dom} f$ è punto di massimo per f ($f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in \text{dom} f$), allora x_0 si dice anche punto di massimo globale o assoluto per f

Definizione analoga si dà per i punti di minimo

In particolare, un punto di massimo assoluto è anche di massimo relativo, ed un punto di minimo assoluto è anche di minimo relativo (in generale, non è vero il viceversa)

Teorema di Fermat: Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in]a,b[$. Se x_0 è punto di massimo o minimo relativo per f, allora $f'(x_0)=0$

$x_0 \neq a, b$

Dim.: x_0 di massimo relativo, per fissare le idee. Quindi $\exists \delta > 0$ | $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subseteq]a,b[$ (lo posso fare perché $]a,b[$ è intervallo aperto) e

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies x - x_0 < 0$$

$$\frac{\overset{\leq 0}{f(x) - f(x_0)}}{\underset{<0}{x - x_0}} \geq 0 \implies f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ f'(x_0) \end{array} \qquad \geq 0$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies x - x_0 > 0$$

$$\frac{\overset{\leq 0}{f(x) - f(x_0)}}{\underset{>0}{x - x_0}} \leq 0 \implies f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ f'(x_0) \end{array} \qquad \leq 0$$

$$\implies f'(x_0) = 0 \quad //$$

LUNEDÌ 10/12

Definizione: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$. Se $f'(x_0) = 0$, allora x_0 si dice punto stazionario o critico per f.

Definizione: Se f ha un punto di massimo o minimo relativo in $x_0 \in \text{dom} f$, allora x_0 si dice anche punto di estremo relativo per f

Il teorema di Fermat si può riformulare dicendo che se $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in]a,b[$ ed x_0 è punto di estremo relativo per f, allora x_0 è punto critico per f.

Es.: $f(x) = (x-1)^3$, $x_0 = 1$ è punto critico per f

$\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono punti critici per sen

Oss.: il fatto che x_0 sia interno ad $]a,b[$ è necessario per concludere che, se è punto di estremo e lì f è derivabile, allora $f'(x_0) = 0$.

Se x_0 cade sugli estremi di $[a,b]$, non è detto che $f'(x_0)$ sia nulla.

$f(x) = x$, $x \in [0,1]$ $\qquad f'(x) = 1 \ \forall x$

e $x_0 = 0$ è punto di minimo,

$x_1 = 1$ è di massimo

$$f'(x_0) = f'(x_1) = 1 \neq 0$$

Oss.: Il teorema di Fermat fornisce una condizione necessaria affinché un punto sia di estremo per una funzione, ma tale condizione non è sufficiente

($f'(x_0)=0$ $\not\Rightarrow$ che x_0 sia di massimo o di minimo relativo)

$f(x)=x^3$, che è strettamente crescente, $f'(0)=0$, ma $x_0=0$ non è di massimo o minimo relativo per f

Oss.: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$

I punti di estremo (massimo o minimo) di f cadono

1) negli estremi di I
2) nei punti critici interni ad I
3) nei punti di non derivabilità della funzione

Es.: problema dei barattoli.
Cercare il punto di minimo di $S(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$, $r>0$

Il punto di minimo soddisfa $S'(r)=0$

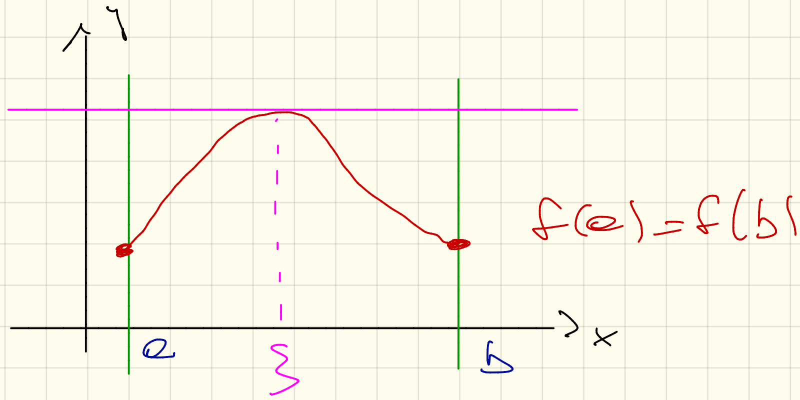
$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

$$S'(r)=0 \iff 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \overset{r>0}{\iff}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$ unico punto critico di f in $]0,+\infty[$

Poiché f ha minimo e nel punto di minimo $f'(r)=0$, $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ deve essere punto di minimo

Teorema di Rolle: $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ e tale che $f(a)=f(b)$. Allora $\exists\, \xi \in]a,b[\;|\; f'(\xi)=0$



Dim.: f è continua in $[a,b]$, quindi ha massimo e minimo (assoluti) per il teorema di Weierstrass. Sia x_m il punto di minimo e x_M il punto di massimo.

Se $x_m \in]a,b[$ o $x_M \in]a,b[$, allora $\xi = x_m$ o $\xi = x_M$ per il teorema di Fermat.

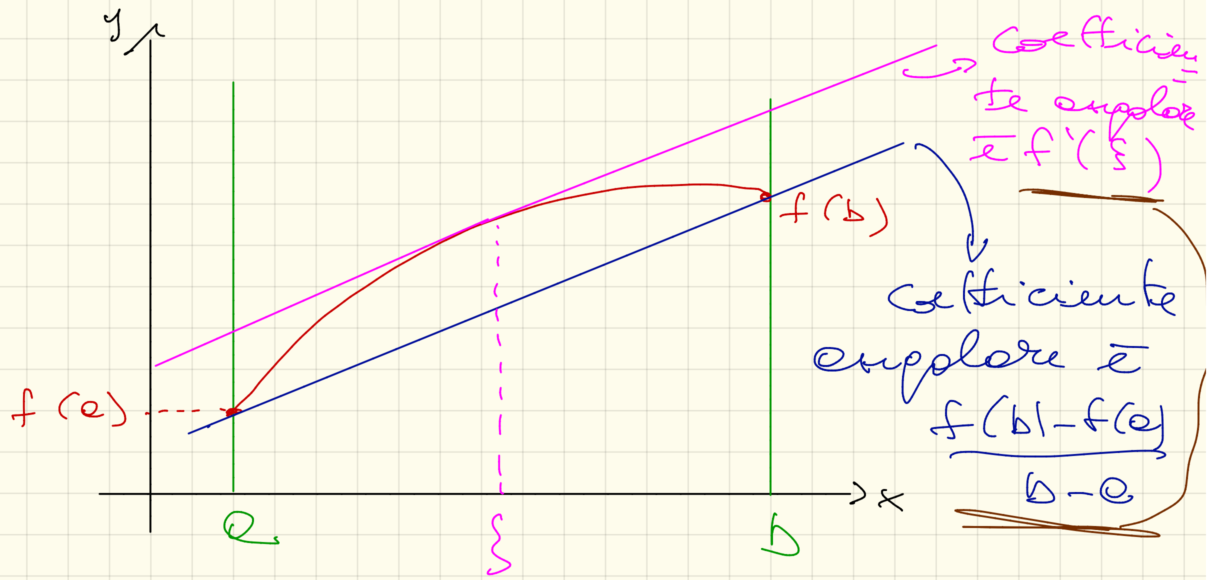
Se $x_m, x_M \in \{a,b\}$, cioè x_m e x_M cadono entrambi agli estremi di $[a,b]$, allora

$f(x_m) = f(x_M)$ perché $f(a) = f(b)$, e quindi f è costante $\Rightarrow f'(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$. //

Teorema di Lagrange o del valor medio:

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora $\exists\, \xi \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$



Oss.: Se $f(a)=f(b)$, si riottiene il teorema di Rolle

Dim.:

$$h(x)=[f(b)-f(a)](x-a) +$$
$$-[f(x)-f(a)](b-a)$$

- $h:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$
- h è continua in $[a,b]$ perché differenza di funzioni continue in $[a,b]$
- h è derivabile in $]a,b[$ perché differenza di funzioni derivabili in $]a,b[$

$h(a) = 0 \qquad h(b) = 0$

Per il teorema di Rolle $\exists\, \xi \in]a,b[$ tale che $h'(\xi) = 0$

$$0 = h'(\xi) = f(b) - f(a) - f'(\xi)(b-a)$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad //$$

Proposizione: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f'(x) = 0 \ \forall x \in I$. Allora f è costante, cioè $\exists\, c \in \mathbb{R}$ |

$f(x) = c \quad \forall x \in I$

Oss.: l'ipotesi che I sia intervallo è fondamentale

$$f: [0,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R} \ |$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 2 & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$$

Allora $f'(x) = 0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f$, ma f non è costante

Dim.: Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

dobbiamo dimostrare che $f(x_1) = f(x_2)$

Applichiamo il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[a,b] = [x_1, x_2]$

$\exists\ \xi \in]x_1, x_2[\ |$

per ipotesi

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0$$

Allora $f(x_2) - f(x_1) = 0$ //

Teorema di Cauchy: $a, b \in \mathbb{R}$,

$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Allora $\exists\ \xi \in]a,b[$ tale che

$$g'(\xi)[f(b)-f(a)] = f'(\xi)[g(b)-g(a)]$$

In particolare, se $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a,b[$, vale

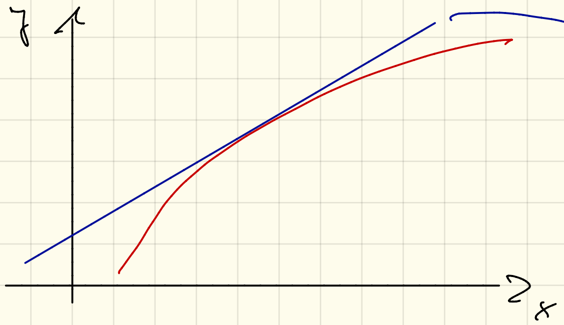
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(si ottiene Lagrange con $g(x) = x$)

Monotonia e derivata prima

Teorema: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è monotona crescente $\boxed{\iff}$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Simmetricamente, f è monotona decrescente $\boxed{\iff}$ $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$



coefficiente angolare ≥ 0

Dim.: Proviamo che f è crescente $\iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow$) Ipotesi: f crescente

Tesi: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

$x_0 \in I$ e calcoliamo $f'(x_0)$

Studiamo il segno di

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se $x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Se $x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

per il teorema del confronto

$\Leftarrow$) Ipotesi: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Tesi: f è crescente, cioè, se $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$

x_1, x_2, $x_1 < x_2$. Applichiamo il teorema di Lagrange ad f nell'intervallo

$[a, b] = [x_1, x_2]$ ($\subseteq I$, dove f è derivabile, e quindi continua)

$\exists\ \xi \in]x_1, x_2[$ tale che

$$\frac{\overset{\geq 0}{f(x_2)-f(x_1)}}{\underset{> 0}{x_2 - x_1}} = f'(\xi) \geq 0$$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ //

Oss.: L'ipotesi che f sia definita in un intervallo è fondamentale.

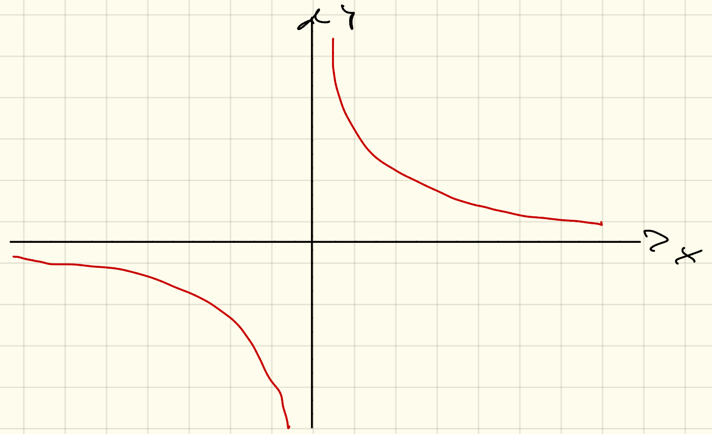
Ad esempio, si prende

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$ → non è un intervallo!

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Allora $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f$,

ma f non è decrescente



Teorema: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile.

Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, allora f è strettamente crescente

Se $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, allora f è strettamente decrescente

$\boxed{\text{N.B.:}}$ Non è un se e solo se!!

$f(x) = x^3$ è strettamente crescente, ma $f'(0) = 0$ (e quindi non è vero che $f'(x) > 0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f$)

Dim.: Ipotesi: $f'(x)>0 \ \forall x \in I$

Tesi: f è strettamente crescente, cioè, se $x_1, x_2 \in I$ e $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Applichiamo il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[a,b]=[x_1, x_2]$.

$\exists \ \xi \in]x_1, x_2[$ tale che

$$\underbrace{\frac{\overbrace{f(x_2)-f(x_1)}^{>0}}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}} = f'(\xi) > 0$$

$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ //

MARTEDÌ 11/12

Proposizione: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

tali che valga una delle due condizioni

1) $f(a) \geq g(a)$ e $f'(x) \geq g'(x) \ \forall x \in [a,b]$

2) $f(b) \geq g(b)$ e $f'(x) \leq g'(x) \ \forall x \in [a,b]$

Allora $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [a,b]$

Dim.:

Dimostriamo supponendo vera l'ipotesi 1), l'altro caso è analogo

Ipotesi: $f(a) \geq g(a)$ e $f'(x) \geq g'(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Tesi: $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

$\Rightarrow h$ è crescente $\Rightarrow h(x) \geq h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$ $\forall x \in [a,b)$ $\Rightarrow f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ //

Es.: $e^x \geq x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^x \qquad g(x) = x+1$

- $[0, +\infty[$ $\quad f(0) = 1 = g(0)$
  $\Rightarrow f(0) \geq g(0)$
  $f'(x) = e^x \geq 1 = g'(x) \quad \forall x \geq 0$
  $\Rightarrow e^x \geq x+1 \quad \forall x \geq 0$
- $]-\infty, 0]$ $\quad f(0) = 1 = g(0)$
  $\Rightarrow f(0) \leq g(0)$
  $f'(x) = e^x \leq 1 = g'(x) \quad \forall x \leq 0$
  $\Rightarrow e^x \geq x+1 \quad \forall x \leq 0$

Es.: dimostriamo che

$$e^x \geq x^2+1 \quad \forall x \geq 0$$

$f(x)=e^x \qquad g(x)=x^2+1$

- $[0,1]$ $\qquad f(0)=1=g(0)$

$\Rightarrow f(0) \geq g(0)$

$f'(x)=e^x \qquad g'(x)=2x$

E' vero che $e^x \geq 2x \quad \forall x \in [0,1]$?

$e^x \geq x+1 \geq x+x=2x \quad \forall x \in [0,1]$

$\Downarrow$ $\qquad$ vero!

$1 \geq x$

$\Rightarrow e^x \geq x^2+1 \quad \forall x \in [0,1]$

- $[1,+\infty[$ $\qquad f(1)=e \qquad g(1)=2$

$f(1) \geq g(1)$

$f'(x)=e^x \qquad g'(x)=2x$

E' vero che $e^x \geq 2x \quad \forall x \geq 1$?

$f_1(x)=e^x \qquad g_1(x)=2x$

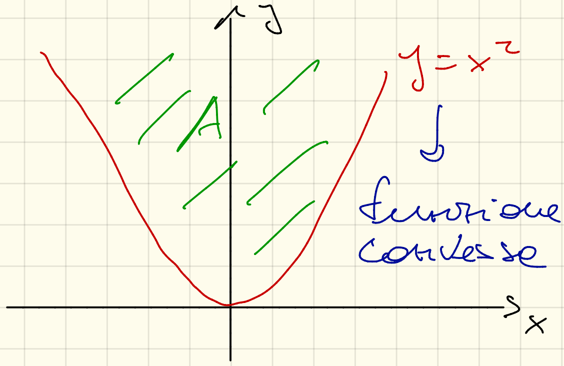
$f_1(1)=e \geq 2=g_1(1)$

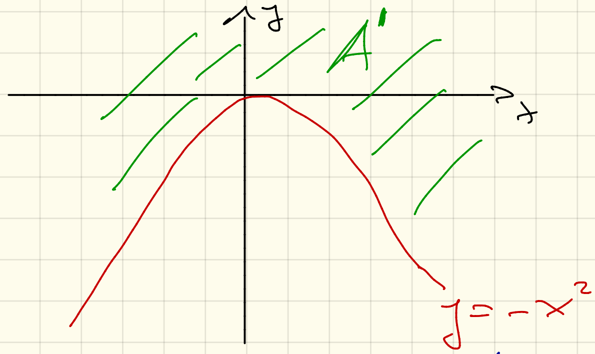
$f_1'(x)=e^x \qquad g_1'(x)=2$

$e^x \geq 2 \quad \forall x \geq 1$ perché $e^x \geq e$ $\forall x \geq 1$

$\Rightarrow e^x \geq 2x \quad \forall x \geq 1 \Rightarrow e^x \geq x^2+1$ $\forall x \geq 1$

Convessità, concavità e derivata seconda





$f(x) = x^2$, $f''(x) = 2 > 0$

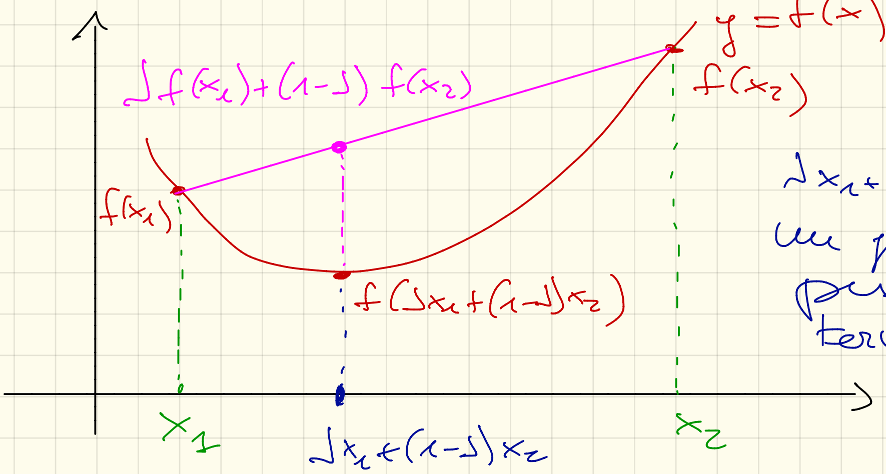
funzione concava

$f(x) = -x^2$ $f''(x) = -2 < 0$

A è convesso se
presi due punti di A
il segmento che li congiunge
è interamente contenuto in A

Definizione : $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.
$f : I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se
$\forall \lambda \in [0,1]$ e $x_1, x_2 \in I$ si ha

$$\boxed{f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)}$$



$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ è un generico punto dell'intervallo di estremi x_1 e x_2

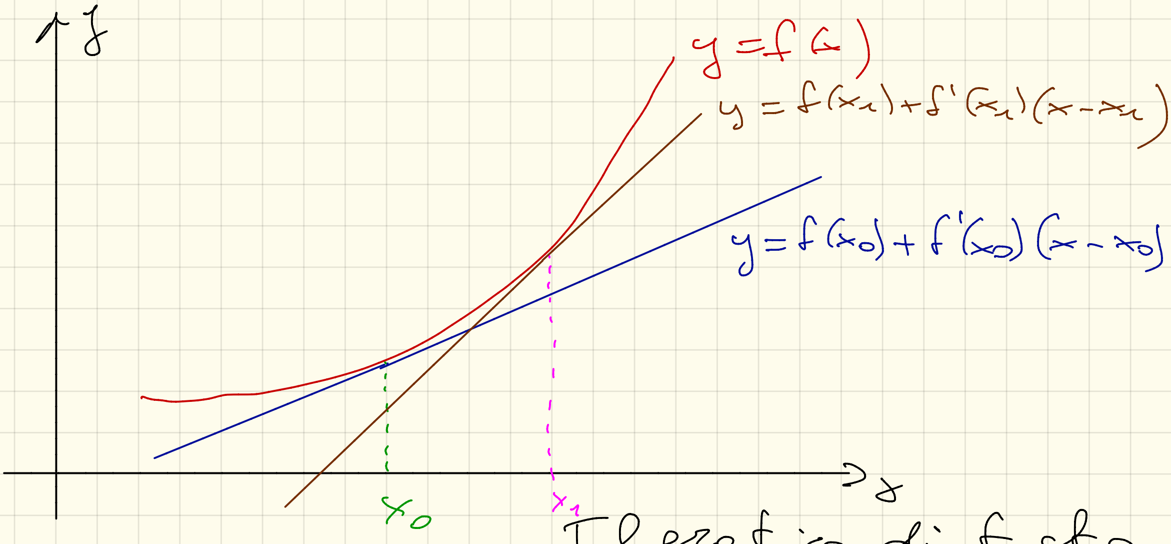
f si dice concava se $-f$ è convessa

N.B.: $f(x) = mx + q$ è sia convessa che concava

Lemma: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa $\iff$

$$\left[f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in I \right]$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$



Il grafico di f sta sempre sopra il grafico di una sua generica retta tangente

Lemma: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora f è convessa $\iff$ f' è funzione monotona crescente, cioè se e solo se

$$x_2 > x_1 \implies f'(x_2) \geq f'(x_1), \quad x_1, x_2 \in I$$

Dim.: $\implies$) Ipotesi: f convessa
Tesi: f' crescente

Fissiamo $x_1, x_2 \in I$ con $x_2 > x_1$

$x = x_2 \to f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \quad \forall x \in I$

$x = x_1 \to f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \quad \forall x \in I$

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

Sommo membro a membro

$$\cancel{f(x_2)} + \cancel{f(x_1)} \geq \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_2)} + f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

$$\left(f'(x_1) - f'(x_2)\right)\underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \leq 0$$

$$\implies f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

$\impliedby$) Ipotesi: f' crescente
Tesi: f convessa

Dobbiamo dimostrare che, fissato $x_0 \in I$, si ha

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x \in I,$$

cioè che

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x \in I$$

- $x = x_0$ banale
- $x > x_0$ $\exists\ \xi \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \geq f'(x_0) \text{ perché}$$

f' è crescente e $\xi > x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0)$

$x - x_0 > 0$

- $x < x_0$ $\exists\ \xi \in]x, x_0[\ |$

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = f'(\xi) \leq f'(x_0)$$

perché f' è crescente e $\xi < x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0) \quad //$$

$x - x_0 < 0$

<u>Teorema</u>: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Allora f è convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

<u>Dim</u>: f convessa $\iff f'$ è crescente $\iff (f')'(x) = f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ //

<u>Es.</u>: $f(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x > 0$

$\Rightarrow$ è convessa

$$e^x \geq e^{x_0} + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$e^x \geq e^{x_0} + e^{x_0}(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}$$

$x_0 = 0 \Rightarrow e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Es.</u>: $f(x) = \ln(1+x) \quad , x > -1$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$

$\Rightarrow f$ è concava

$$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 > -1$$

$x_0 = 0 \qquad f'(0) = 1 \qquad f(0) = 0$

$$\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > -1$$

$$\Rightarrow \ln x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$$

Definizione: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua. Sia x_0 punto interno di I tale che valga una delle due

1) f è convessa in un intorno sinistro di x_0 e concava in un intorno destro
2) f è concava in un intorno sinistro di x_0 e convessa in un intorno destro

Allora x_0 si dice punto di flesso per f.
Se $f'(x_0)=0$, si dice punto di flesso a tangente orizzontale; se $f'(x_0)=\pm\infty$, si dice punto di flesso a tangente verticale

Teorema: $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ continua e derivabile una volta in $]a,b[$ e due volte in $x_0 \in]a,b[$. Se x_0 è punto di flesso, allora $f''(x_0)=0$

N.B.: $f''(x_0)=0 \not\Rightarrow x_0$ punto di flesso

$f(x)=x^4 \qquad f''(x)=12x^2 \geq 0$

$\Rightarrow f$ è convessa, ma $f''(0)=0$

Dim.: Supponiamo per semplicità che f sia derivabile due volte in $]a,b[$.

Per fissare le idee assumiamo che f sia convessa in un intorno sinistro di x_0 e concava in un intorno destro

- $\exists\, \delta_1 > 0 \mid f$ è convessa in $[x_0 - \delta_1, x_0]$

e $\exists\, \delta_2 > 0 \mid f$ è concava in $[x_0, x_0 + \delta_2]$

$\Rightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0]$

$\Rightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta_2]$

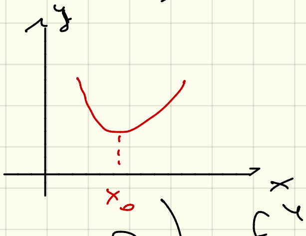
$f''(x_0) \geq 0$

$f''(x_0) \leq 0$

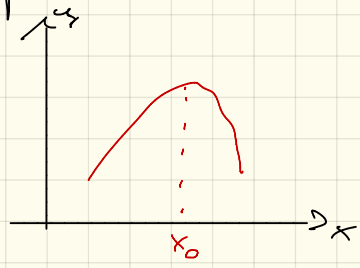
$\Rightarrow f''(x_0) = 0 \quad //$

<u>Lemma</u>: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, $x_0 \in I$ punto critico per f $(f'(x_0) = 0)$. Sia f derivabile 2 volte in x_0

1) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo relativo per f



2) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di massimo relativo per f



GIOVEDÌ 13/12

LA FORMULA DI TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

- In generale ho una funzione f e voglio approssimarla con un polinomio di grado $n \geq 1$ fissato
- Stima dell'errore: che cos'è $o(x^2)$ nelle formule sopra scritte

Il polinomio di Taylor con il resto di Peano

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$

se f è derivabile in $x_0 \in I$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{polinomio di primo grado, } T^{1,x_0}} + o(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T^{1,x_0}(x)}{x - x_0} = 0$$

$$T^{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte e cerchiamo un polinomio

$$T^{2,x_0}(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + b(x-x_0)^2$$

che approssimi bene f vicino a x_0

$\to T^{2,x_0}(x_0) = f(x_0)$

$a = ?$
$b = ?$

$$E(x) = f(x) - T^{2,x_0}(x) \quad , \quad \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x-x_0)^2} = 0}$$

$\to$ errore che commetto nel calcolare $f(x)$ con $T^{2,x_0}(x)$

Troviamo $a, b \in \mathbb{R} \mid$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T^{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

- Imponiamo che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T^{2,x_0}(x)}{x - x_0} = 0$

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x-x_0) - b(x-x_0)^2}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} - a - \underbrace{b(x-x_0)}_{\to 0} \right] = f'(x_0) - a$$

$$\Rightarrow a = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow T^{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + b(x-x_0)^2$$

- Imponiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T^{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^2} = 0$

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - b(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} - b \right]$$

??

$$\Rightarrow b = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} \overset{(H)}{=}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

rapporto incrementale di f' in x_0

$$\Rightarrow T^{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

Es.: $f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$$e^x = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + o(x^2)$$

$$f'(0) = e^0 = 1 \qquad f''(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Teorema: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $n-1$ volte in I, $n \geq 1$, e n volte in x_0.

Allora

$$f(x) = T^{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n)$$

resto di Peano

dove

$$T^{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

formula di Taylor di f di grado o ordine n in x_0 con il resto di Peano.

Si dice formula di MacLaurin se $x_0 = 0$

T^{n,x_0} si dice polinomio di Taylor (di MacLaurin se $x_0=0$) di f in x_0 di grado o ordine n

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

<u>Es</u>.: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0=0$, $n=3$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 + (\operatorname{sen})'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen})''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}(\operatorname{sen})^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3)$$

$\operatorname{sen} 0 = 0$ $\quad (\operatorname{sen})'(0) = \cos(0) = 1$

$(\operatorname{sen})''(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$

$(\operatorname{sen})^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$

$x_0 = 0$

$$\operatorname{sen} x = \underbrace{\operatorname{sen} x_0}_{=0} + \underbrace{(\operatorname{sen})'(x_0)}_{=1}(x-x_0) + \frac{1}{2}\underbrace{(\operatorname{sen})''(x_0)}_{=0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{(\operatorname{sen})^{(3)}(x_0)}_{=-1}(x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Formule di Mac Laurin (o sviluppi di Mac Laurin)

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{senh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Il resto di Lagrange nella formula di Taylor

$$E(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

→ errore che commetto nel valutare f nel punto x con il suo polinomio di Taylor di grado 2 e centro x_0

So che $E(x) = o(|x-x_0|^2)$ e cerco una stima migliore

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x-x_0)^2} = 0 \qquad \text{Rispetto che } E(x) \approx (x-x_0)^3$$

f derivabile tre volte e stimiamo

$$\frac{E(x)}{(x-x_0)^3}$$

teorema di Cauchy

ξ_1 punto tra x_0 e x

$$\frac{E(x)}{(x-x_0)^3} = \frac{E(x) - \overbrace{E(x_0)}^{=0}}{(x-x_0)^3} = \frac{E'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$$

$\hookrightarrow g(x) - g(x_0)$ con $g(x) = (x-x_0)^3$

$$E'(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)$$

$$g'(x) = 3(x-x_0)^2$$

$$\frac{E(x)}{(x-x_0)^3} = \frac{f'(\xi_1) - f'(x_0) - f(x_0)(\xi_1 - x_0)}{3(\xi_1 - x_0)^2}$$

$$= \frac{E'(\xi_1)}{3(\xi_1 - x_0)^2} = \frac{E'(\xi_1) - \overbrace{E'(x_0)}^{=0}}{3(\xi_1 - x_0)^2} =$$

$g(x) = 3(x-x_0)^2$

teorema di Cauchy

$$= \frac{E''(\xi_2)}{6(\xi_2 - x_0)} \qquad \text{per qualche } \xi_2 \text{ tra } x_0 \text{ e } x$$

$$\frac{E(x)}{(x-x_0)^3} = \frac{E''(\xi_2)}{6(\xi_2-x_0)} = \frac{E''(\xi_2)-E''(x_0)}{6(\xi_2-x_0)}$$

$=0$

$=$

teorema di Lagrange

$$E''(x) = f''(x) - f''(x_0)$$

$$= \frac{E^{(3)}(\xi)}{6} = \frac{E^{(3)}(\xi)}{3!} = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}$$

per qualche ξ tra x_0 e x

$$\Rightarrow \quad E(x) = \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)(x-x_0)^3$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)(x-x_0)^3$$

per qualche ξ tra x_0 e x

Teorema: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in I. Allora, dati $x_0, x \in I$ $\exists$ un punto ξ compreso tra x_0 ed x tale che

$$f(x) = T^{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

resto di Lagrange

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

formula di Taylor (o Maclaurin se $x_0=0$) di ordine n e centro x_0 con il resto di Lagrange