FUNZIONI DERIVABILI
ESERCIZI

LUNEDÌ 10/12

Esercizio

Trovare gli intervalli di monotonia della funzione definita da

$$f(x) = \frac{|e^x - 2|}{x - 1}$$

$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1, \ln 2\}$

la funzione $x \mapsto |e^x - 2|$, e quindi, non è derivabile quando $e^x - 2 = 0$

$x \neq 1, \ln 2$ $\qquad f(x) = \dfrac{|e^x-2|}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{(x-1)\, D\left(|e^x-2|\right) - |e^x-2|\, D(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(x-1)\, \operatorname{sgn}(e^x-2)\, e^x - |e^x-2|}{(x-1)^2}$$

$|e^x-2| =$
$= (e^x-2)\operatorname{sgn}(e^x-2)$
$|y| = y \operatorname{sgn} y$

$$= \frac{(x-1)\, \operatorname{sgn}(e^x-2)\, e^x - (e^x-2)\operatorname{sgn}(e^x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(e^x-2) \cdot \frac{(x-1)e^x - e^x + 2}{(x-1)^2} =$$

$$= \operatorname{sgn}(e^x-2) \cdot \frac{(x-2)e^x+2}{(x-1)^2}$$

f è continua in $x = \ln 2$

$$\lim_{x\to \ln 2^-} f'(x) = \lim_{x \to \ln 2^-} - \frac{(x-2)e^x+2}{(x-1)^2} =$$

$$= - \frac{(\ln 2 - 2)\cdot 2 + 2}{(\ln 2 - 1)^2} = - \frac{2\ln 2 - 2}{(\ln 2 - 1)^2} = f'_-(\ln 2)$$

$$\lim_{x\to \ln 2^+} f'(x) = \frac{2 \ln 2 - 2}{(\ln 2 - 1)^2} = f'_+(\ln 2)$$

$x = \ln 2$ è punto angoloso

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 2) \cdot \frac{(x-2)e^x + 2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \operatorname{sgn}(e^x - 2)\left[(x-2)e^x + 2\right] \geq 0$$

$$\operatorname{sgn}(e^x - 2) > 0 \iff e^x - 2 > 0 \iff$$
$$x > \ln 2$$

Studiare il segno di

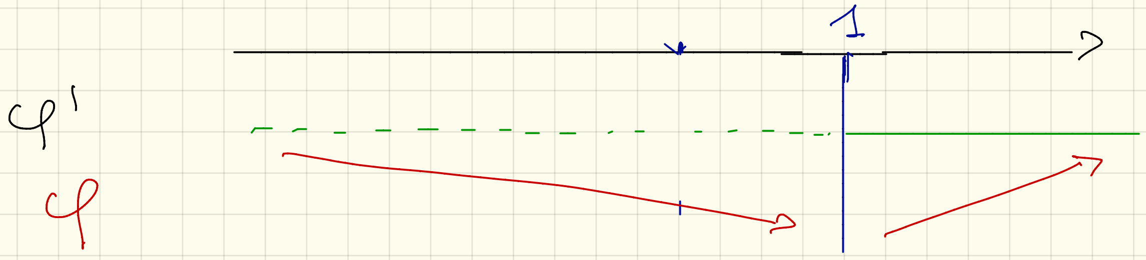
$$\varphi(x) = (x-2)e^x + 2 \qquad \varphi(0) = 0$$

Per studiare il segno di φ studio i segni

intervalli di monotonia

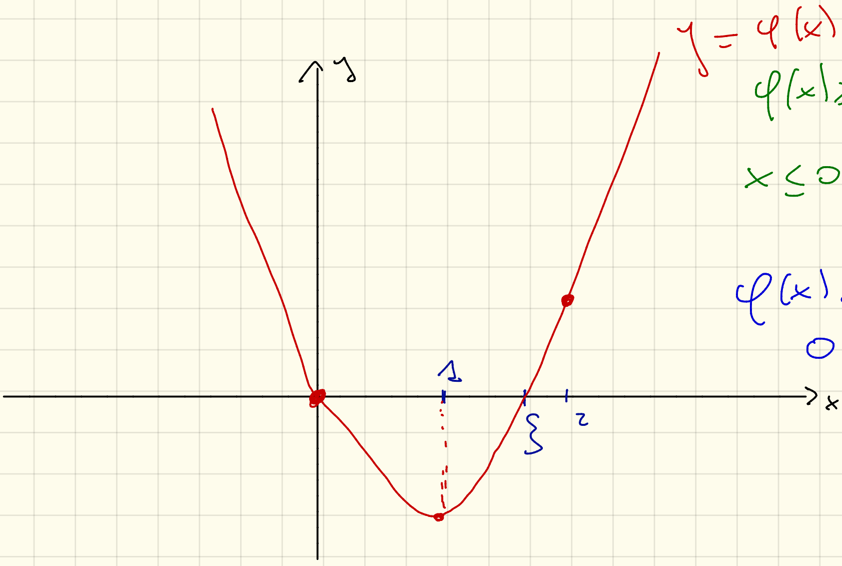
$$\varphi(x) = (x-2)e^x + 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\varphi'(x) = e^x + (x-2)e^x = e^x(x-1)$$



$$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi(1) = -e + 2 < 0$$
$$\varphi(2) = 2 > 0 \implies \exists!\, \xi \in]1,2[$$
$$\varphi(\xi) = 0$$

MARTEDÌ 11/12

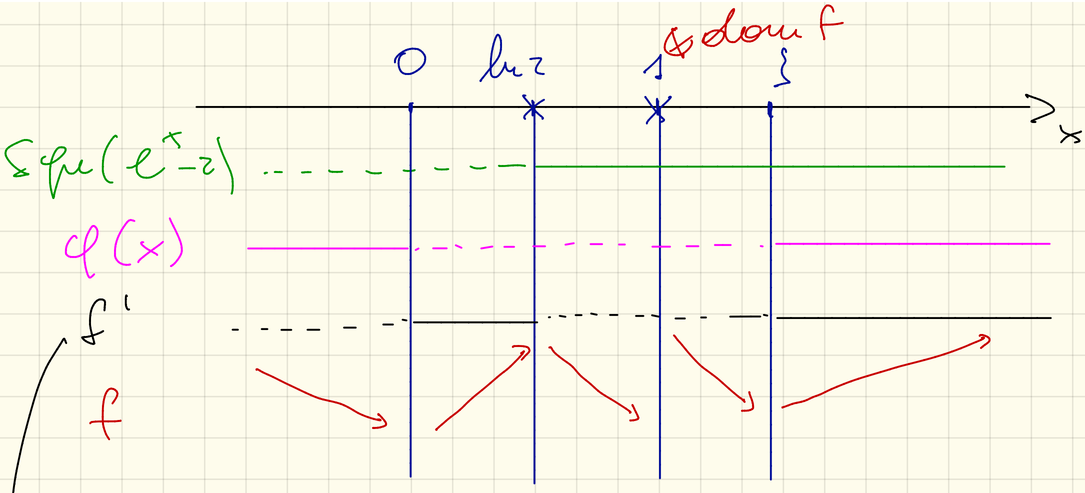


$\varphi(x) \geq 0 \iff$

$x \leq 0$ o $x \geq \xi$

$\varphi(x) \leq 0 \iff$

$0 \leq x \leq \xi$



f è crescente in $[0, \ln 2]$ e in $[\xi, +\infty[$

f è decrescente in $]-\infty, 0]$, in $[\ln 2, 1[$ e in $]1, \xi]$

$$f'(x) = (\operatorname{sgn}(e^x - 2))\,\varphi(x)$$

Non posso dire che f è decrescente in $[\ln 2, \xi] \setminus \{1\}$ perché questo non è un intervallo

Esercizio

Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2} - \ln n}$$

Convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2} - \ln n} \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\left|\sqrt{n^4+2} - \ln n\right|}$$

$$\frac{\overbrace{n+1}^{\sim n}}{\left|\underbrace{\sqrt{n^4+2}}_{\sim \sqrt{n^4} = n^2} - \underbrace{\ln n}_{"o(n^2)"}\right|} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \text{ che è}$$

il termine generale di una serie divergente $\Rightarrow$ la diverge assolutamente

Studiamo la convergenza semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2} - \ln n} = a_n$$

$\lim_n a_n = 0$

e $a_n \geq 0$ definitivamente

Dobbiamo dimostrare che

$a_{n+1} \le a_n$ definitivamente,

cioè che

$$\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)^4+2}-\ln(n+1)} \le \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2}-\ln n}$$

definitivamente per $n \to +\infty$

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^4+2}-\ln x}\ , \quad f(n+1)\le f(n)$$

Se dimostro che f è decrescente in un intorno di $+\infty$, allora $f(n+1)\le f(n)$ definitivamente

$\to f'(x) \le 0$ definitivamente per $x \to +\infty$

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^4+2}-\ln x}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^4+2}-\ln x-(x+1)\left[\frac{1}{2\sqrt{x^4+2}}\cdot 4x^3-\frac{1}{x}\right]}{\left(\sqrt{x^4+2}-\ln x\right)^2}=$$

$$= \frac{x\sqrt{x^4+2}\left(\sqrt{x^4+2}-\ln x\right)-(x+1)\left[2x^4-\sqrt{x^4+2}\right]}{x\sqrt{x^4+2}\left(\sqrt{x^4+2}-\ln x\right)^2}$$

$f'(x) \leq 0$ definitivamente per $x \to +\infty$

$\iff$

$x\sqrt{x^4+2}\left(\sqrt{x^4+2}-\ln x\right)-(x+1)\left[2x^4-\sqrt{x^4+2}\right] \leq 0$ definitivamente per $x \to +\infty$

Non devo risolvere la disequazione... fino

$$x\sqrt{x^4+2}\left(\sqrt{x^4+2}-\ln x\right)-(x+1)\left[2x^4-\sqrt{x^4+2}\right] =$$

$$= x(x^4+2) - x\sqrt{x^4+2}\,\ln x - 2x^5 - 2x^4 +$$
$$+ (x+1)\sqrt{x^4+2} =$$

$$= -x^5 - 2x^4 - \underbrace{x\sqrt{x^4+2}\,\ln x}_{\sim x^3 \ln x} + \underbrace{(x+1)\sqrt{x^4+2}}_{\sim x^3} + 2x$$

$$= -x^5 + o(x^5) < 0$$ definitivamente per $x \to +\infty$

$\Rightarrow$ la serie converge per il criterio di Leibniz //

Trovo $f : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ |

$f(n) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$?

funzione gamma di Eulero

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \qquad x > 0$$

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

$$n! = \Gamma(n+1)$$

$$f(x) = \Gamma(x+1)$$

MERCOLEDÌ 17/12

Esercizio

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \ln|e^{2x} - 4e^x|$$

- dominio (naturale) di f

$$|e^{2x} - 4e^x| > 0 \iff e^{2x} - 4e^x \neq 0$$

Risolviamo $e^{2x} - 4e^x = 0 \iff e^x(e^x - 4) = 0 \iff$

$$e^x = 4 \iff x = \ln 4$$

$$\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 4\}$$

- eventuali simmetrie (notevoli)

f è pari o dispari? Cioè, vale

$f(-x) = f(x)$ o $f(-x) = -f(x)$

$\forall x \in \operatorname{dom} f$?

No, perché dom f non è simmetrico rispetto a $x_0 = 0$.

In ogni caso

$f(-x) = \ln|e^{-2x} - 4e^{-x}| \neq \pm f(x)$, in generale

- segno

$\boxed{x \neq \ln 4}$

$f(x) \geq 0 \iff \ln|e^{2x} - 4e^{x}| \geq 0$

$\iff |e^{2x} - 4e^{x}| \geq 1$

$\nearrow e^{2x} - 4e^{x} \geq 1$

$\searrow e^{2x} - 4e^{x} \leq -1$

($|\alpha| \geq c \iff \alpha \leq -c$ o $\alpha \geq c$, con $c > 0$)

I° caso $e^{2x} - 4e^{x} \geq 1$

$e^{2x} - 4e^{x} - 1 \geq 0$ $\qquad t = e^{x} > 0$

$t^2 - 4t - 1 \geq 0$

$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5} \implies t \geq 2+\sqrt{5}$

$e^x \geq 2+\sqrt{5} \iff x \geq \ln(2+\sqrt{5})$

- II° caso $\quad e^{2x} - 4e^x \leq -1$

$e^{2x} - 4e^x + 1 \leq 0 \qquad t = e^x > 0$

$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \implies 2-\sqrt{3} \leq t \leq 2+\sqrt{3}$

$2-\sqrt{3} \leq e^x \leq 2+\sqrt{3} \iff$

$\ln(2-\sqrt{3}) \leq x \leq \ln(2+\sqrt{3})$

$f(x) \geq 0 \iff x \geq \ln(2+\sqrt{5})$ o $\ln(2-\sqrt{3}) \leq x \leq \ln(2+\sqrt{3})$

- eventuali asintoti

- asintoti verticali : sono rette di equazione $x = x_0$ tali che almeno uno dei limiti da destra e da sinistra di f in x_0 sia $+\infty$ o $-\infty$

Poiché $f \in C^0(\mathrm{dom} f)$ perché composizione di funzioni continue, l'unico punto x_0 candidato è $\ln 4$, che l'unico punto di $\mathbb{R}$ esterno a dom$f$ e di accumulazione per dom$f$

$$\lim_{x \to \ln 4^-} f(x) = \lim_{x \to \ln 4^-} \ln|e^{2x} - 4e^x| = -\infty$$

$$\lim_{x \to \ln 4^+} f(x) = \lim_{x \to \ln 4^+} \ln|e^{2x} - 4e^x| = -\infty$$

$\Rightarrow$ la retta di equazione $x = \ln 4$ è asintoto verticale

- asintoti orizzontali

Sono rette di equazione $y = y_0$ tali che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$

(Es: la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ per arctan, e la retta di equazione $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per arctan a $-\infty$)

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$, allora

la retta di equazione $y = y_0$ si dice asintoto orizzontale completo per f

$\lim_{x \to +\infty} \ln|e^{2x} - 4e^x| = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \ln|e^{2x} - 4e^x| = -\infty$

$\Rightarrow$ f non ha asintoti orizzontali

- asintoti obliqui: la retta di equazione $y = mx + q$, $m \neq 0$, si dice asintoto obliquo a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per f se

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - (mx+q)| = 0$$

$$\left(\text{risp. } \lim_{x \to -\infty} |f(x) - (mx+q)| = 0\right)$$

f ha asintoto obliquo a $+\infty$ (risp. $-\infty$)

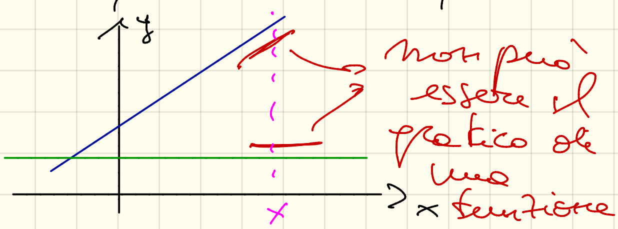
$\Leftrightarrow$ esistono entrambi finiti

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \quad q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

(risp.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0, \quad q = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] \Big)$$

N.B.: asintoti obliqui e orizzontali sono incompatibili: se c'è uno, non c'è l'altro



Siccome $f(x) = \ln|e^{2x} - 4e^{x}|$ non ha asintoti orizzontali, cerchiamo asintoti obliqui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|e^{2x} - 4e^{x}|}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - 4e^{x})}{x} =$$

$e^{2x} - 4e^{x} \geq 0$ definitivamente per $x \to +\infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{2x}(1 - 4e^{-x}))}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \ln(1 - 4e^{-x})}{x} = 2 = m$$

$$\lim_{x \to +\infty} [\ln|e^{2x} - 4e^{x}| - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 - 4e^{-x}) = 0$$

$\Rightarrow$ la retta di equazione $y = 2x$ è asintoto obliquo a $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln|e^{2x} - 4e^{x}|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(4e^{x} - e^{2x})}{x} =$$

$e^{2x} - 4e^{x} \leq 0$ definitivamente per $x \to -\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(e^{x}(4 - e^{x}))}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \ln(4 - e^{x})}{x} =$$

$$= 1 = m$$

$$\lim_{x \to -\infty} [\ln|e^{2x} - 4e^{x}| - x] = \lim_{x \to -\infty} \ln(4 - e^{x}) = \ln 4 =$$

$$= q$$

$\Rightarrow$ la retta di equazione $y = x + \ln 4$
è asintoto obliquo a $-\infty$

Studio della derivata prima

$f(x) = \ln|e^{2x} - 4e^x|$

$f \in C^\infty(\operatorname{dom} f)$ perché composizione
di funzioni di classe C^∞

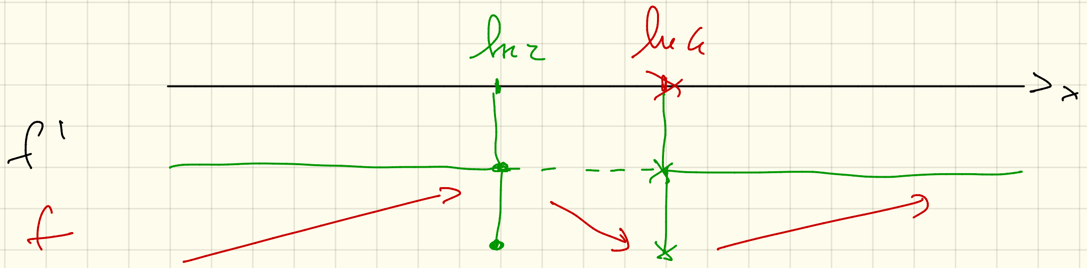
($t \mapsto \ln|t|$ è derivabile nel suo
dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la sua derivata è
$\frac{1}{t}$)

$$f'(x) = \frac{1}{e^{2x} - 4e^x} \cdot D(e^{2x} - 4e^x) =$$

$$= \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x} = \frac{2e^x(e^x - 2)}{e^x(e^x - 4)} =$$

$$= 2\,\frac{e^x - 2}{e^x - 4}$$

$f'(x) \geq 0 \iff e^x \leq 2$ o $e^x > 4 \iff$
$x \leq \ln 2$ o $x > \ln 4$



f è crescente in $]-\infty, \ln 2]$ e in $]\ln 4, +\infty[$
ed è decrescente su $[\ln 2, \ln 4[$

$\Rightarrow$ $x = \ln 2$ è punto di massimo relativo per f

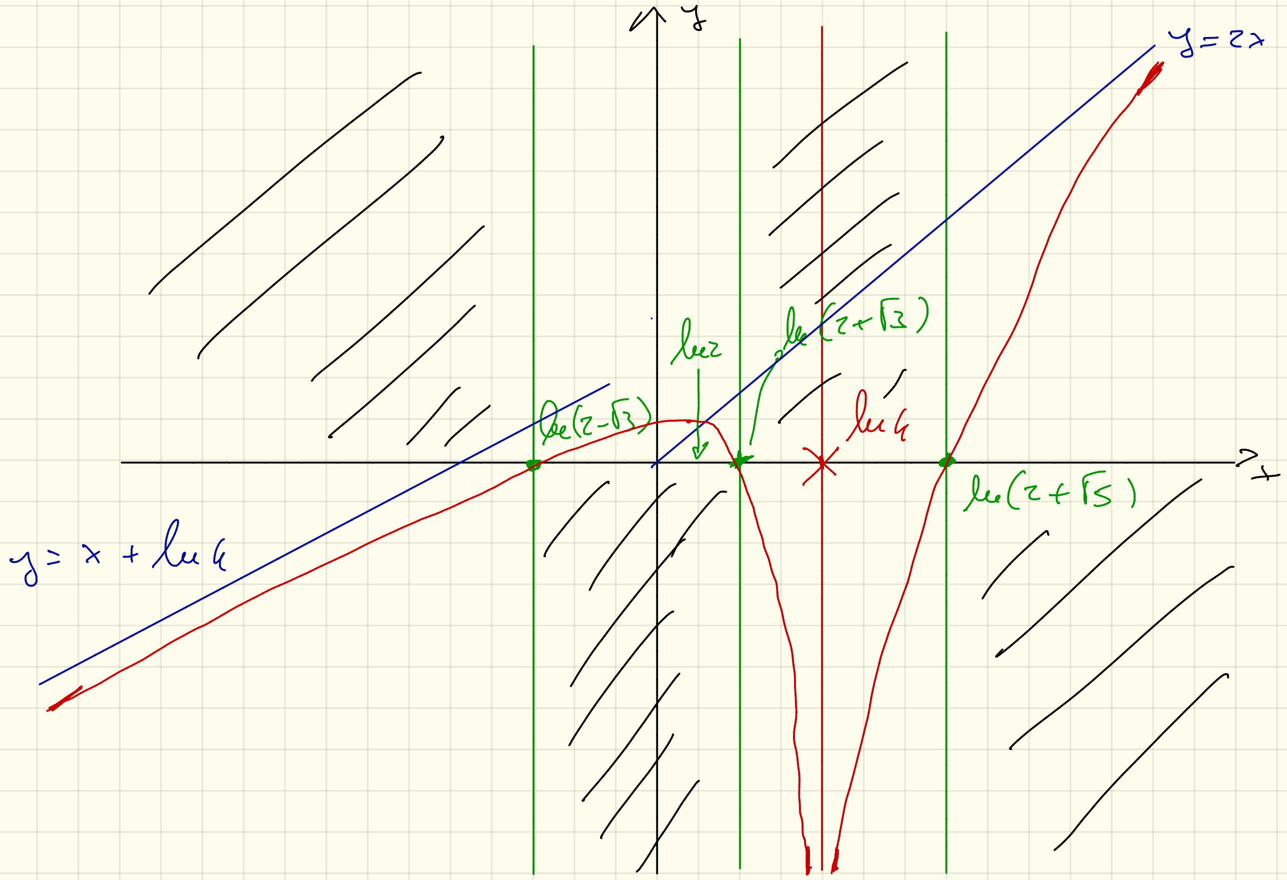
Studio della derivata seconda

$$f'(x) = 2\,\frac{e^x - 2}{e^x - 4}$$

$$f''(x) = 2\,\frac{e^x(e^x-4) - e^x(e^x-2)}{(e^x-4)^2} =$$

$$= -\frac{4e^x}{(e^x-4)^2} < 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$$

$\Rightarrow$ f è concava in $]-\infty, \ln 4[$ e in $]\ln 4, +\infty[$



Esercizio

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \left| \frac{x-2}{1+x^2} + \arctan x \right|$$

- dominio $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

(Se f fosse periodica di periodo T, basta studiarla nell'intervallo [0, T]

le funzioni periodiche non hanno asintoti orizzontali e obliqui)

- segno $\quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (\operatorname{sgn} \varphi(x))\, \varphi(x) \qquad (|t| = (\operatorname{sgn} t)\, t)$$

dove $\varphi(x) = \dfrac{x-2}{1+x^2} + \arctan x$

$f(x) = 0 \iff \varphi(x) = 0$

Studiamo φ

$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \implies \exists\, \xi \in \mathbb{R} \mid \varphi(\xi) = 0$

la retta di equazione $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per φ a $-\infty$ e la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale per φ a $+\infty$

$\Rightarrow$ la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale completo per f perché $f(x) = |\varphi(x)|$

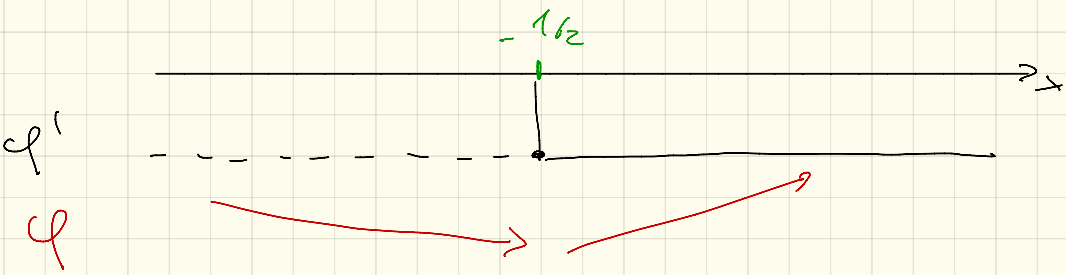
Studiamo φ'

$$\varphi(x) = \frac{x-2}{1+x^2} + \arctan x$$

$$\varphi'(x) = \frac{1+x^2-2x(x-2)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= 2\,\frac{2x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$\varphi'(x) \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$$



$$0 > \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\frac{\pi}{2} > \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$$

φ è strettamente crescente in $[-\frac{1}{2}, +\infty[$

e $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2} > 0$

$$\Rightarrow \exists !\, \xi \mid \varphi(\xi) = 0 \text{ e } \xi > -\frac{1}{2}$$

$\varphi(0) = -2 < 0$ $\qquad$ $\varphi(1) = -\frac{1}{2} + \arctan 1 =$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \xi \in \,]0, 1[$$

$f(x) = |\varphi(x)| = 0 \iff \varphi(x) = 0$

$\iff x = \xi$, che è punto di minimo assoluto per f

f non ha asintoti verticali né obliqui

Studio della derivata prima

f è derivabile in $\mathbb{R}$ tranne al più il punto ξ.

Se $x \neq \xi \Rightarrow f'(x) = (\operatorname{sgn} \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \operatorname{sgn} \varphi(x) \cdot \frac{2x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$\lim_{x \to \xi^+} f'(x) = \lim_{x \to \xi^+} 2 \frac{2x+1}{(1+x^2)^2} = 2 \frac{2\xi+1}{(1+\xi^2)^2} = f'_+(\xi)$$

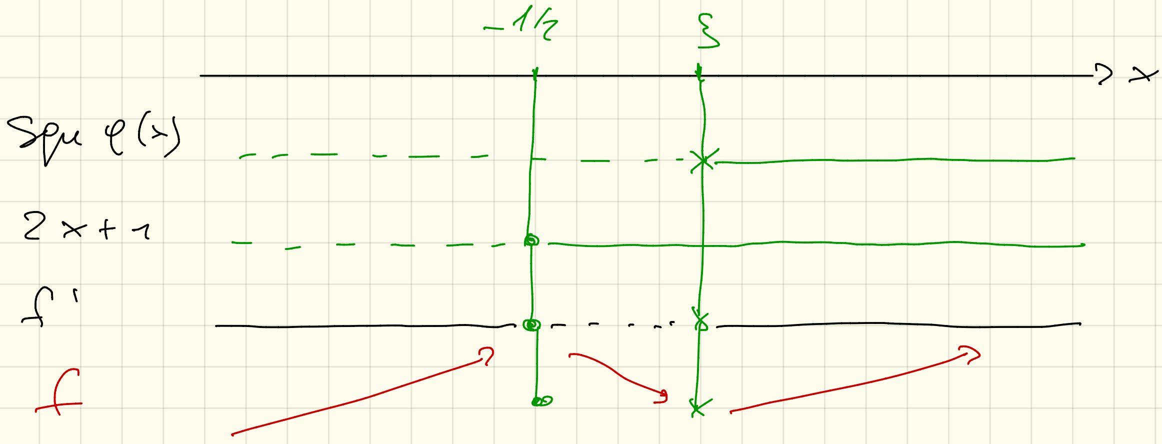
$\varphi(x) > 0$ se $x > \xi$

$$\lim_{x \to \xi^-} f'(x) = \lim_{x \to \xi^-} -2 \frac{2x+1}{(1+x^2)^2} = -2 \frac{2\xi+1}{(1+\xi^2)^2} = f'_-(\xi)$$

$\varphi(x) < 0$ se $x < \xi$

Poiché f è derivabile in ξ da destra e da sinistra e $f'_-(\xi) \neq f'_+(\xi) \Rightarrow \xi$ è punto angoloso

$$f'(x) \geq 0 \iff (\mathrm{sgn}\, \varphi(x))(2x+1) \geq 0$$



f è crescente in $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ e in $[\xi, +\infty[$

ed è decrescente in $[-\frac{1}{2}, \xi]$

$x = -\frac{1}{2}$ è punto di massimo assoluto

Studio della derivata seconda

$x \neq \xi$

1 se $x > \xi$

-1 se $x < \xi$

$$f'(x) = (\mathrm{sgn}\, \varphi(x))\, \varphi'(x)$$

$$f''(x) = (\mathrm{sgn}\, \varphi(x))\, \varphi''(x)$$

$$\varphi'(x) = 2\, \frac{2x+1}{(1+x^2)^2}$$

$$\varphi''(x) = -4\, \frac{3x^2+2x-1}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = -4\,\mathrm{sgn}\,\varphi(x) \cdot \frac{3x^2+2x-1}{(1+x^2)^3}$$

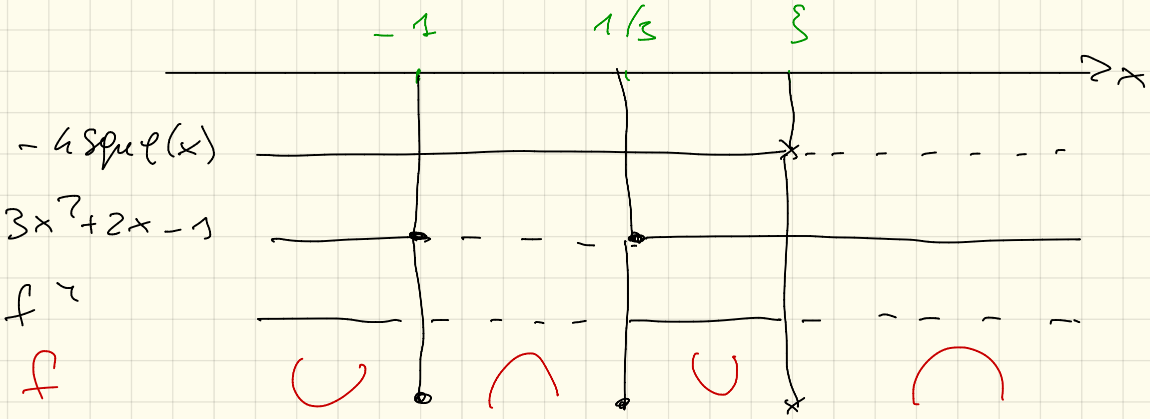
$$3x^2+2x-1 \geq 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 2}{3} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x \leq -1 \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1}{3}$$

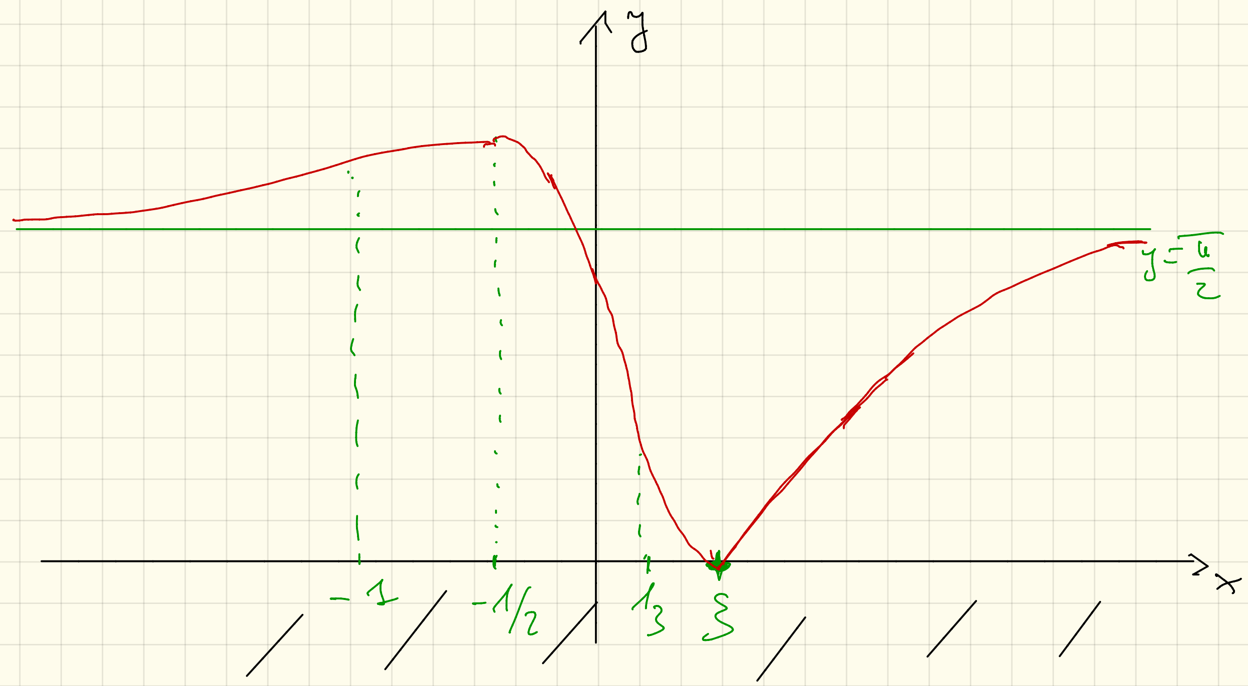
$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{2} + \arctan\frac{1}{3} < -\frac{3}{2} + \arctan 1 =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} < 0 \implies \frac{1}{3} < \xi$$

perché $\varphi(x) < 0 \iff x < \xi$



f è convessa in $]-\infty, -1]$ e in $\left[\frac{1}{3}, \xi\right]$, ed è concava in $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ e in $[\xi, +\infty[$



GIOVEDÌ 13/12

<u>Esercizio</u>

Trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione definita da

$$f(x) = e^{\operatorname{sen}(2x)} + \ln(1+\alpha x) - \cos(\beta x)$$

sia infinitesimo del massimo ordine possibile per $x \to 0$

(f ha ordine di infinitesimo $a>0$ per $x \to 0$ se $\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^a} = l \in \mathbb{R},\ l \neq 0$, cioè se $|f(x)| = l|x|^a + o(|x|^a)$)

Mi procuro lo sviluppo di Mac Laurin di f

$$f(x) = e^{\operatorname{sen}(2x)} + \ln(1+\alpha x) - \cos(\beta x) =$$

$$= 1 + \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2x))^2 + \frac{1}{6}(\operatorname{sen}(2x))^3 +$$

$$+ o((\operatorname{sen} 2x)^3) + \alpha x - \frac{1}{2}(\alpha x)^2 + \frac{1}{3}(\alpha x)^3 +$$

$$+ o((\alpha x)^3) - \left(1 - \frac{(\beta x)^2}{2} + o((\beta x)^3)\right) =$$

$$= 1 + \left(2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(2x + o(x^2)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}(2x + o(x^2))^3 + \alpha x - \frac{1}{2}(\alpha x)^2 + \frac{1}{3}(\alpha x)^3 - 1 +$$

$$+ \frac{(\beta x)^2}{2} + o(x^3) =$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}\left(4x^2 + o(x^3)\right) +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(8x^3 + o(x^4)\right) + \alpha x - \frac{1}{2}(\alpha x)^2 + \frac{1}{3}(\alpha x)^3 +$$

$$+ \frac{(\beta x)^2}{2} + o(x^3) =$$

$$= (2+\alpha)x + \left(2 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right)x^2 + \frac{\alpha^3}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = (2+\alpha)x + \left(2 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right)x^2 + \frac{\alpha^3}{3}x^3 + o(x^3)$$

Trovare α, β affinché f sia infinitesima del massimo ordine possibile

$$\begin{cases} 2+\alpha = 0 \\ 2 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} = 0 \end{cases}$$

butto via il termine di primo grado

sparisce il termine di secondo grado

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ 2 - \frac{4}{2} + \frac{\beta^2}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Esercizio

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + \operatorname{senh} x + 2e^x}{x^3} = 3$$

Determinare il polinomio di Maclaurin di f di grado 3

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + o(x^3)$$

$$= a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$$

Trovare a, b, c, d

$$f(x)+\operatorname{senh} x+2e^x =$$

$$= a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3) +$$

$$+ x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) +$$

$$+ 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) =$$

$$= a+2 + (b+3)x + (c+1)x^2$$

$$+ \left(d + \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3)$$

$$3 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)+\operatorname{senh} x+2e^x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a+2+(b+3)x+(c+1)x^2+(d+\frac{1}{2})x^3+o(x^3)}{x^3} =$$

$$\overset{\text{PdS}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{a+2+(b+3)x+(c+1)x^2+(d+\frac{1}{2})x^3}{x^3} = 3$$

$$\begin{cases} a+2=0 \\ b+3=0 \\ c+1=0 \\ d+\frac{1}{2}=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \\ c=-1 \\ d=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = -2-3x-x^2+\frac{5}{2}x^3+o(x^3)$$

Esercizio

Cercare un'approssimazione di e con 6 cifre decimali esatte

Fissati x_0 ed x $\exists\ \xi$ compreso tra $x_0=0$ ed x tale che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$= (\exp)^{(n+1)}(\xi)$

Se prendo $x=1$, $\exists\ \xi \in]0,1[$ tale che

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$$

$$\left| e - \underbrace{\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)}_{\in\mathbb{Q}} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

errore

perché $e^{\xi} < e < 3$ essendo $\xi \in]0,1[$

6 cifre decimali esatte $\Rightarrow \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$

scelgo $n \mid \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$

$n = 8$

$$e^x = e^1 + (\exp)'(1)(x-1) + \frac{(\exp)''(1)}{2}(x-1)^2 + \dots$$

$$= e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 + \dots$$

$\rightarrow 1 + 1 + \dots + \frac{1}{8!}$ dà un'approssimazione di e con 6 cifre decimali esatte

Per cose: fare lo stesso cosa con

$\cos 1$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + $$
$$+ (-1)^n \frac{\operatorname{sen} \xi}{(2n+3)!} x^{2n+3}$$

$x = 1$

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+2)!} + $$
$$+ (-1)^n \frac{\operatorname{sen} \xi}{(2n+3)!}$$

per qualche $\xi \in]0, 1[$