

def: (serie di Taylor) : Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte in I int. di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Si dice che f è sviluppabile in I in serie di Taylor di p.to iniziale $x_0 \in I$ se la serie di Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

converge e vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$\forall x \in I$.

Es : • $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\cosh x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} x^{k+1} \quad \forall x \in]-1, 1]$

$$\bullet \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad \forall x \in]-1, 1]$$

$$\bullet \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ \arctan 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow \pi = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ & \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Obs: non tutte le funzioni di classe C^{∞} sono somme delle loro serie di Taylor.

Per esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Se $k > 0$ $f^{(k)}(0) = 0$ e di conseguenza

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \neq f(x) \quad \forall x \neq 0$$

$\Rightarrow f(x)$ non coincide con la serie di Taylor se $x \neq 0$.

$\Rightarrow f$ non è sviluppabile in serie di Taylor.