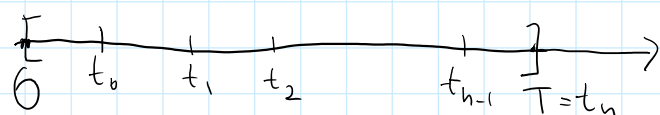


Calcolo integraleIntroduzione

Supp. di guidare un'auto che si muove di moto rettilineo a velocità $v(t)$, $t \in [0, T]$.
Voglio sapere lo spazio percorso tra l'istante iniziale $t=0$ e l'istante finale $t=T$.



Divido $[0, T]$ in tanti piccoli intervalli $[t_k, t_{k+1}]$
 $k = 0, \dots, n-1$.

In particolare, $t_0 = 0$, $t_n = T$.

Prendo $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ per $k = 0, \dots, n-1$.

Se $v(\cdot)$ è continua e $|t_k - t_{k+1}|$ è abbastanza piccolo, $v(t) \approx v(\tau_k) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}]$

Nell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ lo spazio percorso
 $s_k \approx v(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$

Lo spazio percorso $S(T)$ in $[0, T]$ sarà

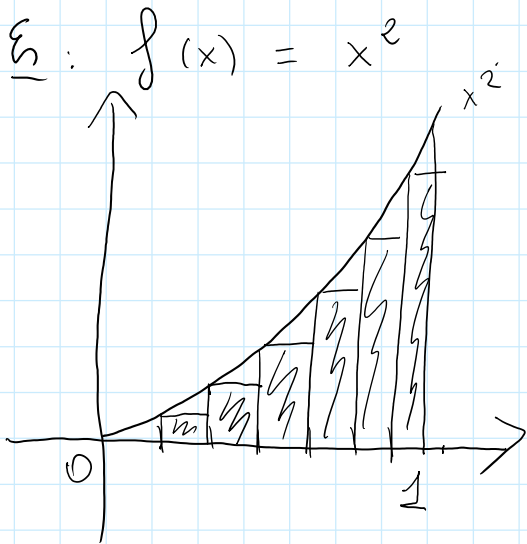
$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)$$

Più n è grande, cioè più $|t_{k+1} - t_k|$ è piccolo
 $\forall k$, migliore sarà l'approssimazione
per $n \rightarrow +\infty$

v , v_1 , $v_2 \dots v_n$ are approximations

$$\sum_{k=0}^{n-1} v(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k) \xrightarrow{\text{per } n \rightarrow +\infty} S(T)$$

$$\int_0^T v(t) dt \quad \downarrow$$



Vogliamo calcolare l'area
sottratta dal grafico di f
nell'intervallo $[0, 1]$

Subdividiere $[0,1]$ in Intervalle.

$$[x_i, x_{i+1}] \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$X_0 = 0, \quad X_n = 1$$

Prüfer $\exists i \in [x_i, x_{i+1}]$

Prendi il rettangolo di base $[x_i, x_{i+1}]$ e altezza $f(\xi_i) = \xi_i^2$

$$A \approx \sum \text{area dei rettangolini} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{y}_i^2 \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$\frac{n-1}{n} (X_{i+1} - X_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$$

$$\int_0^1 x^2 dx$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Se } \xi_i &= \frac{X_i + X_{i+1}}{2} \\ X_i &= \frac{i}{h}, \quad i = 0, \dots, h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{h} + \frac{i+1}{h} \right) = \frac{1}{2h} (2i+1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=0}^{h-1} \xi_i^2 (X_{i+1} - X_i) &= \sum_{i=0}^{h-1} \frac{1}{4h^2} (2i+1)^2 \cdot \frac{1}{h} = \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} \frac{1}{4h^3} (2i+1)^2 = \frac{1}{4h^3} \sum_{i=0}^{h-1} (2i+1)^2 = \frac{4h^2 - 1}{12h^2} \end{aligned}$$

$$\left(\text{in uso } \sum_{i=1}^h i^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} \text{ e } \sum_{i=1}^h i = \frac{h(h+1)}{2} \right)$$

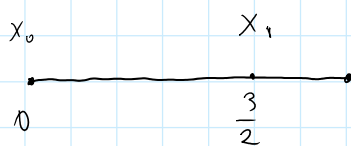
Passando al limite per $h \rightarrow +\infty$, otteniamo $\frac{1}{3}$
e quindi $A = \frac{1}{3}$

L'integrale di Cauchy - Riemann

def: Si dice partizione o molivizione di $[a, b]$ un insieme finito di punti $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ t.c.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

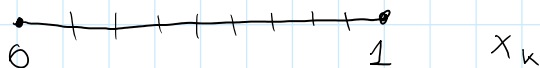
E : $I = [0, 2]$



$$\mathcal{P}_1 = \left\{ 0, \frac{3}{2}, 2 \right\}$$

molivizione di I

• $I = [0, 1]$



$n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, 1 \right\}$

def: ampiezza di una partizione $\mathcal{P}$ è

$$|\mathcal{P}| = \max \left\{ x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n \right\}$$

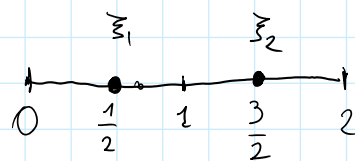
E: $|\mathcal{P}_1| = \max \left\{ \frac{3}{2} - 0, 2 - \frac{3}{2} \right\} = \frac{3}{2}$

$$|\mathcal{P}_n| = \max \left\{ \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} : k = 1, \dots, n \right\} = \frac{1}{n}$$

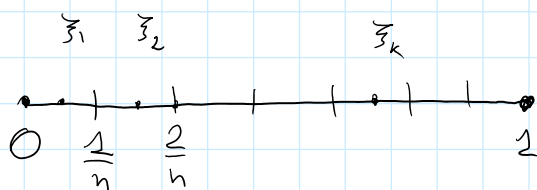
def: Si dice partizione puntata una coppia $(\mathcal{P}, \xi)$ dove $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ è una partizione di $[a, b]$ e $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ è una n-upla di numeri tali che

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ per } k = 1, \dots, n$$

E: $\mathcal{P}_1, \xi = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$



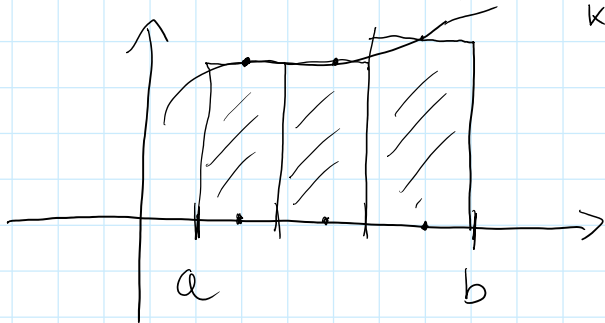
$$\mathcal{P}_n, \xi = \left\{ \frac{1}{2n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}, \dots, \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}, \dots \right\}$$



o Date una funzione limitata $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

la somma allo Cauchy o anche somma
puntata di f rispetto alla partizione puntata
 $(\mathcal{P}, \xi)$ è il numero

$$S(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$



def. (di integrale definito): una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Cauchy - Riemann (o solamente integrabile) in $[a, b]$ se esiste finito il limite delle somme puntate quando l'ampiezza della partizione tende a zero, ovvero se esiste $I \in \mathbb{R}$ t.c.
 $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. $\forall$ partizione puntata $(\mathcal{P}, \xi)$ con $|\mathcal{P}| < \delta$ si ha

$$|S(f, \mathcal{P}, \xi) - I| < \varepsilon$$

Il limite I viene chiamato integrale definito (o int. di Cauchy - Riemann) di f in $[a, b]$ e si indica

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ oppure } \int_{[a, b]} f(x) dx,$$

oppure $\int_a^b f$

N.B. : la variabile di integrazione è muta

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\heartsuit) d\heartsuit$$

• Vale

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(x) dx \quad (\text{per convenzione})$$

• Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, integrabile,

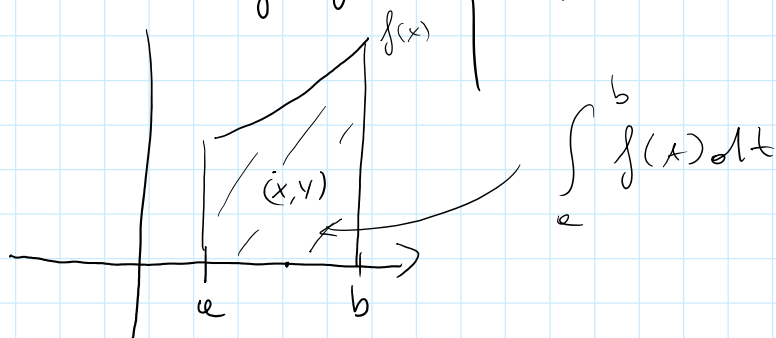
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, P_n, \xi_n)$$

per ogni succ. di partizioni puntate (P_n, ξ_n)

con $|P_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

• Se f è non negativa e integrabile, allora il suo integrale $\int_a^b f(x) dx$ è l'area del sottografico

$$Sg(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$



• Le funzioni costanti sono integrabili

Sic $f(x) = c \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

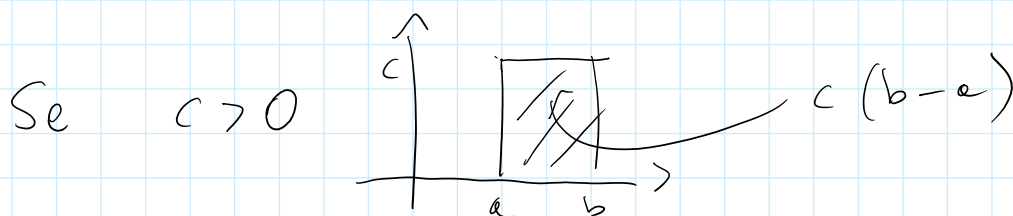
Sic (P, ξ) partizione puntata

$$S(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n c (x_k - x_{k-1})$$

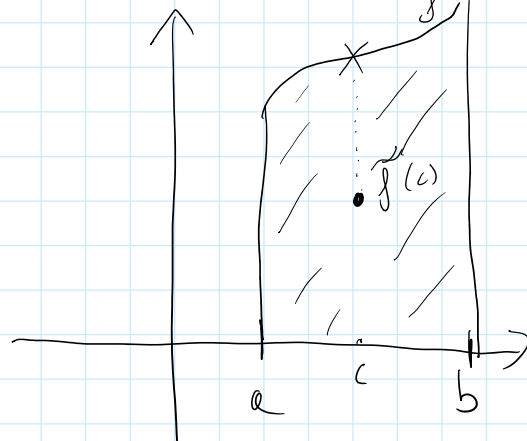
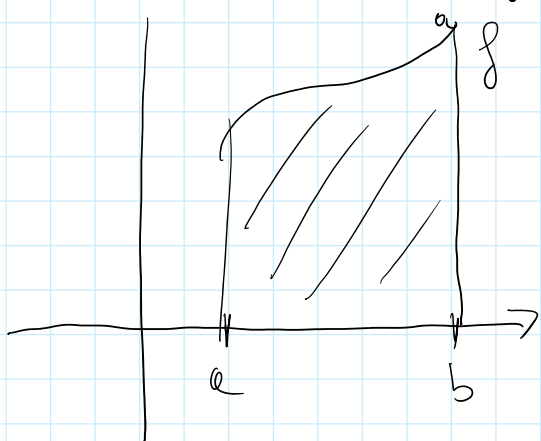
$$= c \left(\cancel{x_1} - \underset{\substack{\parallel \\ -a}}{\overset{\circ}{x_0}} + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \dots + \underset{\substack{\parallel \\ b}}{\overset{\circ}{x_n}} - \cancel{x_{n-1}} \right)$$

$$= c(-a + b) = c(b-a)$$



- Cambiando la funzione f in un numero finito

$\int_a^b f(x) dx$ non cambia



Classi di funzioni integrabili

Prop.: Date $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata,
allora sono equivalenti le seguenti affermazioni

1. f è integrabile secondo Cauchy-Riemann in

$[a, b]$

2. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che
coppie di partizioni $(\mathcal{P}', \xi')$ e $(\mathcal{P}'', \xi'')$
di $[a, b]$ con $|\mathcal{P}'|, |\mathcal{P}''| < \delta$

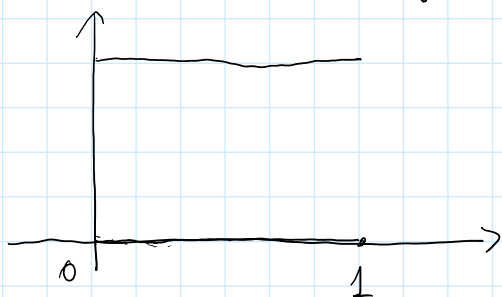
$$|S(f, \mathcal{P}', \xi') - S(f, \mathcal{P}'', \xi'')| < \varepsilon$$

dim: non lo facciamo.

Es: funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

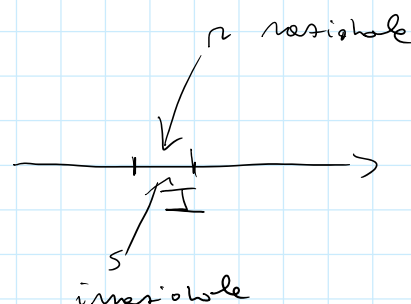
non $\bar{f}$ integrabile secondo C.-R.



Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R} \Rightarrow \forall I$ intervallo $\exists$

$r \in \mathbb{Q}, s \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ t.c.

$r \in I, s \in I$



Sia $\mathcal{P}$ part. di $[0, 1]$, $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$

$\forall i = 1, \dots, n$

$\lambda \geq 0, \Gamma x. x \cdot 1 \in \mathbb{R}$

$\lambda \geq 0, \Gamma v. v \cdot 1 \in \mathbb{R}$

$$2) \quad s_i \in L^{n-1, n-1} \cdot dx$$

$$2) \quad s_i \in L^{n-1, n-1} \cdot dx$$

$(\mathcal{P}, \xi)$ e $(\mathcal{P}, \bar{\xi})$ solo partizioni puntate

$$S(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{i=1}^n \overbrace{f(\xi_i)}^{=1} (x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (1 - 0) = 1$$

$$S(f, \mathcal{P}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^n \overbrace{f(\bar{\xi}_i)}^{=0} (x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$\mathcal{P}_n \quad \text{con} \quad |\mathcal{P}_n| \rightarrow 0$$

$$\left| \underbrace{S(f, \mathcal{P}_n, \xi_n)}_{\substack{\uparrow \\ \text{razionali}}} - \underbrace{S(f, \mathcal{P}_n, \bar{\xi}_n)}_{\substack{\uparrow \\ \text{irrazionali}}} \right| = 1 \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$$

e quindi il punto 2) della prop. non può valere.
 $(\Rightarrow f$ non è integrabile!)

Teorema: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona, allora f è integrabile in $[a, b]$

dim: non lo facciamo, ma è basata sulla proposizione precedente

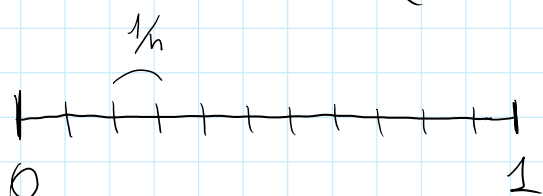
Es: funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ è crescente e quindi è integrabile

$\Rightarrow \exists \int_0^1 e^x dx = ?$ Voglio calcolare l'integrale $\int_0^1 e^x dx$

Idea $\int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \mathcal{P}_n, \xi_n)$

con $|\mathcal{P}_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

Costruiamo $(\mathcal{P}_n, \xi_n)$



$[0, 1]$ diviso in n intervalli
uguali

$$\mathcal{P}_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Per esempio $\xi_k = x_k = \frac{k}{n}$

$$S(f, \mathcal{P}_n, \xi_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(e^{\frac{1}{n}} \right)^k$$

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{1 - e^{\frac{n+1}{n}}}{1 - e^{\frac{1}{n}}} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{1 - e^{1 + \frac{1}{n}}}{1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\cancel{x} - \cancel{x} - \frac{1}{h} + o\left(\frac{1}{h}\right) \right] \\
 & \quad \text{per } h \rightarrow +\infty \\
 & = \frac{1}{h} \left[\frac{1 + \frac{1}{h} - 1}{\frac{1}{h} + o\left(\frac{1}{h}\right)} - 1 \right] \\
 & = \frac{1}{h} \left[\frac{e^{1 + \frac{1}{h}} - 1}{\frac{1}{h} + o\left(\frac{1}{h}\right)} \right] - \frac{1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} e - 1 \\
 & \quad \downarrow \\
 & \quad 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \downarrow \\
 & e^1 - 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

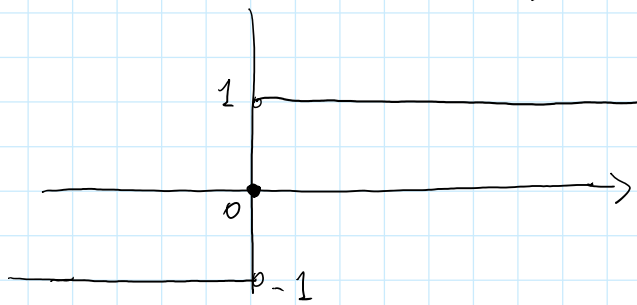
In generale, $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$

def: una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua a tratti se è continua tranne in al più un numero finito di punti di discontinuità dove la funzione ammette limiti destro e sinistro finiti

Es. 1.

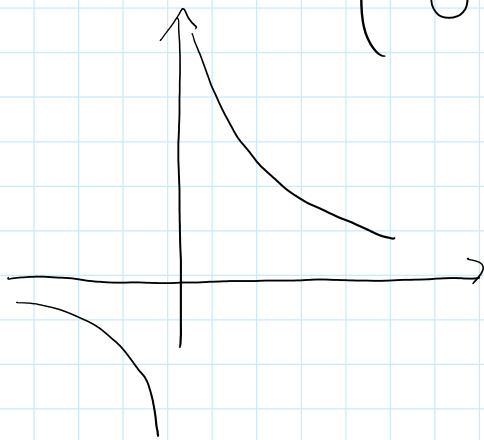
$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



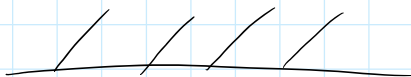
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \Rightarrow f \text{ è continua e kretti}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \forall x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow f \text{ non è continua e kretti}$$

$$f(x) = x - [x] \quad \text{è continua e kretti}$$



Teorema: se f è limitata in $[a, b]$ e continua e kretti, allora f è integrabile secondo Cauchy - Riemann. Inoltre se $\exists \alpha_{k-1}, \alpha_k [, k=1, \dots, m$ tali che $\bigcup_{k=1}^m [\alpha_{k-1}, \alpha_k] = [a, b]$ e sono sottointervalli

in cui la restrizione di f è continua,
allora vale

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$$

Om: f continua $\Leftrightarrow f$ continua e tratti
 $\Rightarrow f$ è integrabile

Proprietà dell'integrale

Teorema: Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili.

Allora:

1. [linearità dell'integrale]: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha f + \beta g$ è integrabile e vale

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

2. [prop. di additività risp. all'intervallo
integrazione]: Se $c \in]a, b[$, allora

f è integrabile in $[a, b]$ se e solo se
 f è integrabile sia in $[a, c]$ che $[c, b]$
e vale

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. (monotonie dell'integrale) : Se $f \leq g$ in $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

4. Se f è integrabile in $[a, b]$, allora anche $|f|$ lo è in $[a, b]$

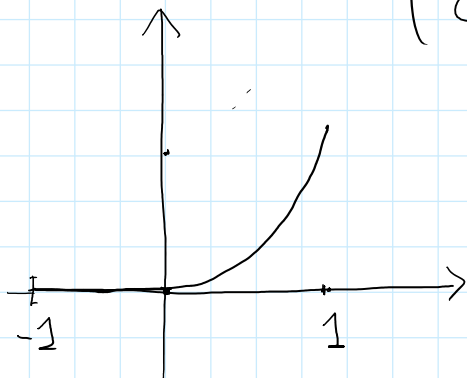
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

in particolare

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$$

Es :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ e^x - 1 & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$$



$\Rightarrow f$ è integrabile
in $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 0 + \int_0^1 (e^x - 1) dx$$

$$= \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 1 dx$$

$$= e^1 - e^0 - 1 \cdot 1 = e - 2$$

Es : Si discuta la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_{2n}^{2n+1} e^{-x^2} dx$$

$$\overbrace{a_n \geq 0}$$

Dim. che se $x \in [2n, 2n+1]$

$$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-4n^2} \quad \forall x \in [2n, 2n+1]$$

$$h \int_{2n}^{2n+1} e^{-x^2} dx \leq h \int_{2n}^{2n+1} e^{-4n^2} dx = h \cdot e^{-4n^2} (2n+1 - 2n)$$

$$= h e^{-4n^2} = \frac{h}{e^{n^2}} \cdot e^{-3n^2} \leq 1 \cdot e^{-3n^2} \quad (\text{def } n \rightarrow +\infty)$$

$$\leq e^{-3n} = (e^{-3})^n$$

$$\uparrow$$

$$n^2 \geq n$$

Mostrare $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-3})^n$ conv. ($e^{-3} < 1$) $\Rightarrow$ la serie iniziale converge.

$\uparrow$
confronto

Teorema (della media integrale): Siano

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{int.}, \quad m = \inf_{[a, b]} f, \quad M = \sup_{[a, b]} f$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

┌──────────────────┐
└──────────────────┘
 ↳ medie
 integrale

In particolare, se f è continua in $[a, b]$
esiste $c \in [a, b]$ A.c.

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a) \quad (\otimes)$$

dim: $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

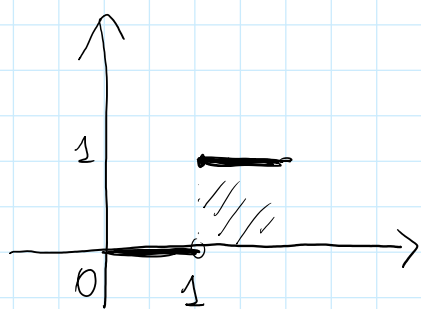
$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b m dx}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underbrace{\int_a^b M dx}_{M(b-a)}$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Se f è continua, per il teorema dei valori intermedi, $\exists c \in [a, b]$ A.c.

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \#$$

Qm: Se f non è continua, $\otimes$ può non
valere



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ ma non esiste $c \in [0, 2]$ A.c. $f(c) = \frac{1}{2}$

Il Teorema fondamentale del calcolo

def: Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Una funzione $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice primitiva
di f o funzione primitiva di f in A
se F è derivabile in A

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

Es: Se f è derivabile, f è primitiva di
 f'

$$\bullet f(x) = x^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists F \text{ t.c. } F'(x) = x^\alpha \\ \forall x$$

$$\text{Se } \alpha \neq -1, F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, F'(x) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot \cancel{(\alpha+1)} x^\alpha \\ = x^\alpha$$

$\Rightarrow F$ è primitiva di f

Se $\alpha = -1$? Devo trovare una primitiva

$$\text{di } \frac{1}{x}. \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$(\ln|x| + c)' = \frac{1}{|x|} \cdot \text{sgn}(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln|x| + c \text{ è primitiva di } f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$$

Teorema: siano F e G due primitive di f in $A = I$ intervallo, allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I$

$$\text{dim: } G'(x) = f(x) = F'(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow (G - F)'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow G - F \text{ è}$$

$$\text{costante in } I \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } G(x) - F(x) = c$$

$$\forall x \in I.$$

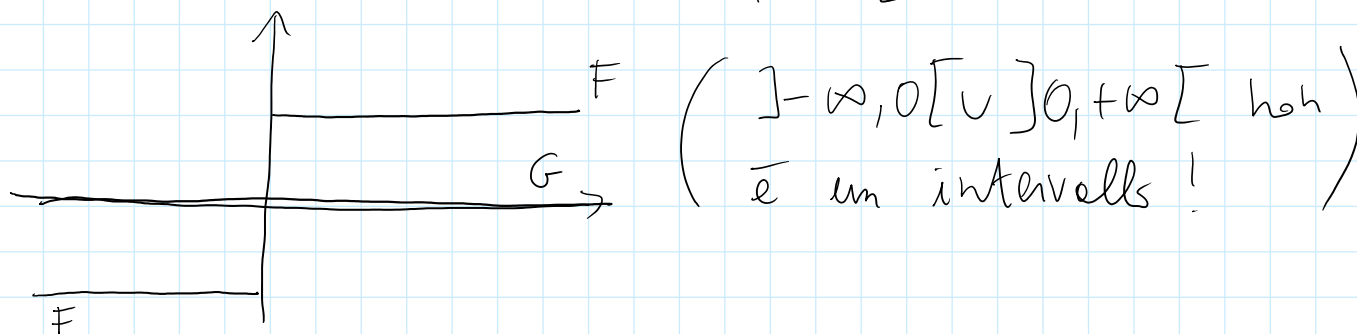
#

$$\forall x \in I.$$

#

N.B. $F(x) = \exp(x)$, $G(x) = 0$, sono
entrambe primitive di $f(x) = 0$ in
 $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Però non differiscono di una costante, cioè
non è vero che $\exists c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } G(x) = F(x) + c$
 $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$



Quindi $F(x)$ non è primitiva di 0 in
tutto $\mathbb{R}$

Teorema (fondamentale del calcolo): Sia
 $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile.
Se F è una primitiva di f in $[a, b]$
allora vale

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Teorema fondamentale del calcolo

In definitiva, l'int. definito di f in $[a, b]$ è uguale all'incremento di una qualunque primitiva di f quando passa da a a b .

dim: Sia F una primitiva di f in $[a, b]$. Fissata una partizione

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ di } [a, b]$$

per il Teorema di Lagrange $\forall k=1, \dots, n$

$$\exists \xi_k^* \in]x_{k-1}, x_k[\quad \text{d.c.}$$

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

$$\underbrace{F(x_0)}_{= F(a)} + \underbrace{F(x_n)}_{= F(b)} = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

$\Rightarrow F(b) - F(a)$ può essere espressa

Come un'opportuna somma puntata rispetto alla partizione $\mathcal{P}$

Per definizione di integrale, fissato $\varepsilon > 0$

$\exists \delta > 0$ t.c. $\forall (\mathcal{P}, \xi)$ con $|\mathcal{P}| < \delta$

$$\left| \underbrace{\sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})}_{S(f, \mathcal{P}, \xi)} - \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_I \right| < \varepsilon$$

Scelta $(\mathcal{P}, \xi)$ con $|\mathcal{P}| < \delta$ e

$$\xi = \{\xi_1^*, \dots, \xi_n^*\} \quad (\text{con } \xi_k^* \text{ come sopra})$$

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k^*) (x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

In altri termini ho mostrato che $\forall \varepsilon > 0$

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \#$$

NOTAZIONE :

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x) \Big|_a^b$$

Corollario: Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funz.
derivabile con derivata integrabile.
Allora

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

dim: f è primitiva di f' . #

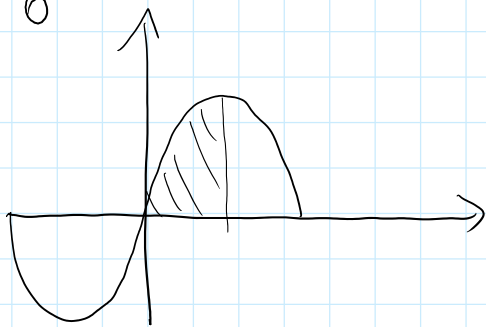
Es: $x \mapsto e^x$, $f(x) = e^x$

Primitiva di f è $F(x) = e^x$

$$\Rightarrow \int_a^b e^x dx = e^b - e^a \quad (\text{già visto})$$

• $f(x) = \sin x$, primitive di $f(x)$ è $F(x) = -\cos x$ su tutto $\mathbb{R}$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2) - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1$$



• $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx$, $F(x) = \ln|x|$ è primitive di $\frac{1}{x}$ in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln|x| \right]_{-2}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-2| = 0 - \ln 2 = \ln 2^{-1} = \ln \frac{1}{2}$$

def. data una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$,
integrale indefinito di f in A è
 l'insieme di tutte le primitive di f

in A e si denota

$$\int f(x) dx = \left\{ F : F \text{ è primitiva di } f \text{ in } A \right\}$$

Ans: Se $A = I$ intervallo, allora

$$\int f(x) dx = \left\{ F + c : c \in \mathbb{R} \right\}$$

con F una qualsiasi primitiva di f in I

e si indica con

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ans: l'int. indefinito è lineare