I intervallo, F primitiva di $f: I \to \mathbb{R}$

$$\int f(x)\,dx = \{ F + c : c \in \mathbb{R} \}$$

$$= F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Es: $\int \underbrace{x^{-\alpha}}_{\frac{1}{x^\alpha}}\,dx = \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \in]0, +\infty[$
$x \in]-\infty, 0[$

$$\int \underbrace{x^{-1}}_{\frac{1}{x}}\,dx = \ln|x| + c \qquad \alpha = 1$$

$x \in]0, +\infty[$

$x \in]-\infty, 0[$

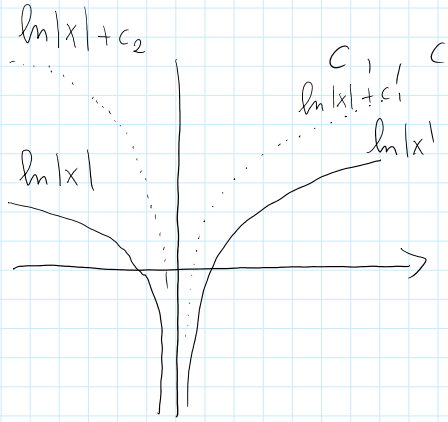
Cosa succede se considero una primitiva di $\frac{1}{x}$ in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$?

Cosa succede se considero l'int. indefinito di $\frac{1}{x}$ in $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$?

Per esempio

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \left\{ F(x) = \begin{cases} \ln|x| + c_1 & x \in]0, +\infty[\\ \ln|x| + c_2 & x \in]-\infty, 0[\end{cases} \right.$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$



N.B.: a volte non è possibile trovare una primitiva in termini di funzioni elementari.

e^{-x^2}

esempi vari:

$\int e^{-x^2} dx$ non è esprimibile tramite funzioni elementari.

- A volte $\int f(x)\,dx = \emptyset$

Per esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

f è definita su tutto $\mathbb{R}$, vorrei trovare $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $F' = f$ in $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1 & x \geq 0 \\ -x + c_2 & x < 0 \end{cases} \quad (*)$$

Se F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, allora F è continua su tutto $\mathbb{R}$

F è derivabile, devo scegliere $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che F def. da $(*)$ sia continua.

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = c_1$

$\lim_{x \to 0^-} F(x) = c_2$

$\Rightarrow$ Devo avere $c_1 = c_2$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} x + c & \text{se } x \geq 0 \\ -x + c & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$= |x| + c$$

$\Rightarrow F$ non è derivabile in 0

$\Rightarrow$ non esiste primitiva di $f(x)$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

- Oss: l'int. indefinito è lineare

  f, g int., $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

  $$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f\, dx + \beta \int g\, dx$$

Tecniche di integrazione

- $\int_a^b f(t)\, dt \Rightarrow$ serve $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $F' = f$

  $$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

- Integrazione per sostituzione

  $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

  $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ di classe C^1 e t.c. $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$

  F primitiva di f in $[a,b]$

  $$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$$

  $$\int_c^d \underbrace{(F \circ \varphi)'(t)}_{f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)}\, dt = \Big[F(\varphi(t)) \Big]_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c))$$

  $$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\boxed{\int_c^d f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx}$$

$$\int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_a^b f$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

- x sostituita da $\varphi(t)$
- dx sostituito da $\varphi'(t)\,dt$
- a sostituito da c (che è tale che $\varphi(c) = a$ e p.to iniziale di $[c,d]$)
- b sostituito da d (che è tale che $\varphi(d) = b$ e p.to finale di $[c,d]$)

- Se φ è invertibile

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

- Funziona anche per gli integrali indefiniti

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

[φ deve essere invertibile]

- Integrazione per parti

Da $(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

segue

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \int_a^b (fg)'(x)\,dx - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

e per l'integrale indefinito

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Esercizi

- $$\int\left(e^{3x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\right)dx = \int e^{3x}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{3x}\,3\,dx - \int x^{-3}\,dx + \int \frac{1}{1+\ln^2 x}\,\frac{1}{x}\,dx$$

$3 = (3x)'$ $\qquad$ $\frac{1}{x} = (\ln x)'$

$$= \frac{1}{3}\left(\int e^y\,dy\right)_{y=3x} - \frac{1}{-3+1}\,x^{-2} + \left(\int \frac{1}{1+y^2}\,dy\right)_{y=\ln x}$$

$3x = y$, $x = \frac{1}{3}y$ $\qquad$ $y = \ln x$, $x = e^y$

$$= \frac{1}{3}\,e^{3x} + \frac{1}{2}\,x^{-2} + \left(\operatorname{arctg} y\right)_{y=\ln x} + C$$

$$= \frac{1}{3}\,e^{3x} + \frac{1}{2}\,x^{-2} + \operatorname{arctg}\ln x + C$$

Osservo: $\operatorname{arctg}\ln x = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)_{|t=\ln x} \cdot (\ln x)'$

$$= \frac{1}{1+(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

Es: $$\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$= -\int_0^{\pi/4} (-\sin x)\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$= -\int_0^{\cdot} (-\sin x) \cdot \frac{1}{\cos x}\, dx$$

$$-\int (-\sin x)\cdot \frac{1}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\, dx =$$

$$= -\left(\int \frac{1}{t}\, dt\right)_{t=\cos x} = -\ln|\cos x| + c$$

$$\Rightarrow -\int_0^{\pi/4} (-\sin x)\cdot \frac{1}{\cos x}\, dx = \Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \underbrace{\ln|1|}_{0}$$

Oss:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$$

o a.c. $F'(x) = f(x)$

- $$\int_0^1 \frac{e^x}{2e^x+3}\, dx = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2e^x+3}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\, dx = (*)$$

$g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

$$f(g(x)) = f(e^x) = \frac{1}{2e^x+3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3}, \quad F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+3|$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x+3} = \frac{1}{2x+3}$$

$$(*) = \left[\frac{1}{2}\ln|2e^x+3|\right]_0^1$$

$$\circledast = \left[\frac{1}{2}\ln|2e^x+3|\right]_0$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2e+3| - \frac{1}{2}\ln 5$$

Es (per casa) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

Es: $\int \underbrace{x}_{f(x)}\,\underbrace{\cos(2x)}_{g'(x)}\,dx = \circledast$

$$\left[\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\right]$$

Se $g'(x) = \cos 2x$, quale può essere g?

$$g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

$$\circledast = x\,\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x - \int 1\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\operatorname{sen}2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}2x\,dx = \textcircled{**}$$

Osservo

$$\int \operatorname{sen}2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$$

$$\textcircled{**} = \frac{x}{2}\operatorname{sen}2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$

Es (per casa): $\int \ln x\,dx \underset{\text{suggerimento}}{=} \int \underbrace{\ln x}_{f(x)}\cdot\underbrace{1}_{g'(x)}\,dx$

$\underset{\text{per parti}}{=} x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \dots$