

INTEGRALI TEORIA

MERCOLEDÌ 9/1

Funzioni integrali e teoremi fondamentali del calcolo

$$\tilde{F}(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{\sqrt{t}} f(t) dt, \quad x \neq 0$$

$f(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow 0^+$ $f \in C^0([0, +\infty[)$

$\Rightarrow f$ è integrabile in $[a, b]$ con

$a > 0$ e quindi anche

nell'intervallo di estremi t e x^2 con

$x \neq 0$

$\Rightarrow \tilde{F}$ è ben definita $\forall x \neq 0$

Non so calcolare "esplicitamente"
 $\tilde{F}$. Posso dire comunque qualcosa
su $\tilde{F}$

- $\tilde{e}$ continua?
- $\tilde{e}$ derivabile? Eventualmente, dove $\tilde{e}$ derivabile?
- $\exists \lim_{x \rightarrow 0} \tilde{F}(x)$?

$\hookrightarrow -\int_0^1 \frac{e^+}{\sqrt{t}} dt$: come lo determino visto
che t $\tilde{e}$ illimitata in un
intorno di 0?

$$\tilde{F}(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^+}{\sqrt{t}} dt$$

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^+}{\sqrt{t}} dt, \quad \varphi(x) = x^2$$

$$\tilde{F}(x) = (F \circ \varphi)(x) = F(\varphi(x))$$

concentriamoci su F

Teorema fondamentale del calcolo integrale
(seconda versione): $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata e
integrabile in ogni intervallo $[a, b] \subseteq I$.

Sia $a \in I$ fissato e si consideri
la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in I$$

Allora, F è continua in I . Inoltre,
se f è continua in un punto $x_0 \in I$, allora

F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

In particolare, se $f \in C^0(I)$, allora
 $F \in C^1(I)$ ed è una primitiva di
 f in I .

[Riprendendo l'esempio,

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt \quad \text{è derivabile}$$

$$\forall x > 0 \quad e \quad F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}, \quad \begin{matrix} \tilde{F} = F \circ \varphi \\ \varphi(x) = x^2 \end{matrix}$$

$$\text{e quindi } \tilde{F}'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) =$$

↪ è derivabile $\forall x \neq 0$

$$= \frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2}} \cdot 2x = \frac{e^{x^2}}{|x|} 2x = 2e^{x^2} \operatorname{sgn} x, \quad x \neq 0$$

Dim del teorema

- Continuità di F

$x_0 \in I$ e dimostriamo che F è continua in x_0

Per semplicità assumiamo f limitata in I , cioè supponiamo che $\exists M > 0 \mid |f(t)| \leq M \quad \forall t \in I$

Stimiamo $|F(x) - F(x_0)|$: lo

scopo è dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$$

$$\begin{aligned} 0 \leq |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_a^x f(t) dt + \int_{x_0}^a f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x M dt \right| = M |x - x_0| \end{aligned}$$

$x \rightarrow x_0$

$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt, \quad a \leq b$

- Derivabilità di F in $x_0 \in I$ punto di continuità di f

Devo dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0), \text{ cioè}$$

che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = 0$$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left[\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt \right] =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt$$

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt \right|$$

Per fissare le idee assumiamo $x > x_0$ (guardiamo il limite per $x \rightarrow x_0^+$)

$$0 \leq \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \frac{1}{x - x_0} \left| \int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)] dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \sup_{x_0 \leq t \leq x} |f(t) - f(x_0)| dt =$$

→ costante

$$= \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\sup_{x_0 \leq t \leq x} |f(t) - f(x_0)| \right) \cdot (x - x_0) =$$

$$= \sup_{x_0 \leq t \leq x} |f(t) - f(x_0)|$$

$$0 \leq \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \sup_{x_0 \leq t \leq x} |f(t) - f(x_0)|$$

Se dimostro che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \sup_{x_0 \leq t \leq x} |f(t) - f(x_0)| = 0, \text{ concludo}$$

con il teorema dei due carabinieri

Devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid$

$$0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow \sup_{x_0 \leq t \leq x} |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Fissato $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |$

se $0 < t - x_0 < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
perché f è continua in x_0

Sia ora $0 < x - x_0 < \delta$ e
 $x_0 \leq t \leq x \Rightarrow 0 < t - x_0 < \delta$



$\Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [x_0, x]$

$\Rightarrow \sup_{x_0 \leq t \leq x} |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, come si vuole //

Integrali generalizzati

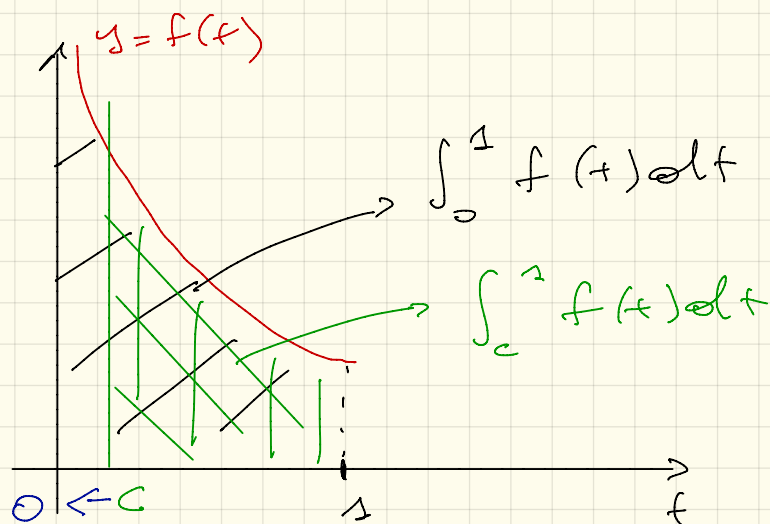
- integrali su intervalli limitati di funzioni illimitate
- integrali su intervalli illimitati

Es.: Come definire $\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$

Sappiamo dare un significato a

$$\int_c^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$$

$\forall c > 0$: prendo
 $\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{e^t}{\sqrt{t}} dt$



$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln t \, dt &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \ln t \, dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[t \ln t - t \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-1 + c - c \ln c) = \\ &= -1 \end{aligned}$$

Def $\therefore a, b \in \mathbb{R}, a < b, f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$
 integrabile in ogni intervallo $[c, b] \subseteq]a, b[$
 ($a < c \leq b$). Se esiste finito il

$$\left[\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(t) \, dt, \right]$$

allora f si dice integrabile in senso
improprio o generalizzato in $]a, b[$ ed
 il numero

$$\left[\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(t) \, dt \right]$$

si dice integrale generalizzato o improprio
di f in $]a, b]$

Dato $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ integrabile
in ogni intervallo $[a, d] \subseteq [a, b[$
($a \leq d < b$), se esiste finito

$$\left[\lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(t) dt, \right]$$

allora f si dice integrabile in senso im-
proprio o generalizzato in $[a, b[$ e
il numero

$$\left[\int_a^b f(t) dt = \lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(t) dt \right]$$

si dice integrale improprio o generaliz-
zato di f in $[a, b[$.

Se f è integrabile in senso generalizzato
in un intervallo I , si dice anche che
l'integrale generalizzato di f in I converge
o è convergente.

Se invece $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(t) dt$ (o $\lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(t) dt$)
è uno dei simboli $\pm \infty$, si dice che f

he integrale improprio divergente

Es.: $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(1+x)^2} dx \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow -1$

Per definizione

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(1+x)^2} dx &= \lim_{d \rightarrow -1^-} \int_{-2}^d \frac{1}{(1+x)^2} dx = \\ &= \lim_{d \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{1+x} \right) \Big|_{-2}^d = \lim_{d \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{1+d} - 1 \right) = +\infty \\ &\Rightarrow \text{l'integrale diverge} \end{aligned}$$

Es.: $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow 1^+$

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^+} \left(2\sqrt{x-1} \right) \Big|_c^3 = \lim_{c \rightarrow 1^+} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{c-1}) = \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ l'integrale è convergente

Esempio importante

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ / $\alpha > 0$

$$\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} dx \xrightarrow{\text{per } x \rightarrow x_0^+} +\infty$$
$$\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow x_0^+} \int_c^{x_0+1} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} dx =$$
$$= \begin{cases} \lim_{c \rightarrow x_0^+} \ln(x-x_0) \Big|_c^{x_0+1} & \alpha = 1 \\ \lim_{c \rightarrow x_0^+} \frac{1}{1-\alpha} (x-x_0)^{1-\alpha} \Big|_c^{x_0+1} & \alpha \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{c \rightarrow x_0^+} -\ln(c-x_0) = +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \lim_{c \rightarrow x_0^+} \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{(c-x_0)^{\alpha-1}} \right) & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+1} \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

In particolare,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Es.: $\int_0^1 \frac{\sec 1/x}{x^2} dx$

$$\int_0^1 \frac{\sec(1/x)}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{\sec(1/x)}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{c \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x} \Big|_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\cos 1 - \cos \frac{1}{c} \right)$$

$D \cos \frac{1}{x} = (-\sec \frac{1}{x}) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
che non esiste

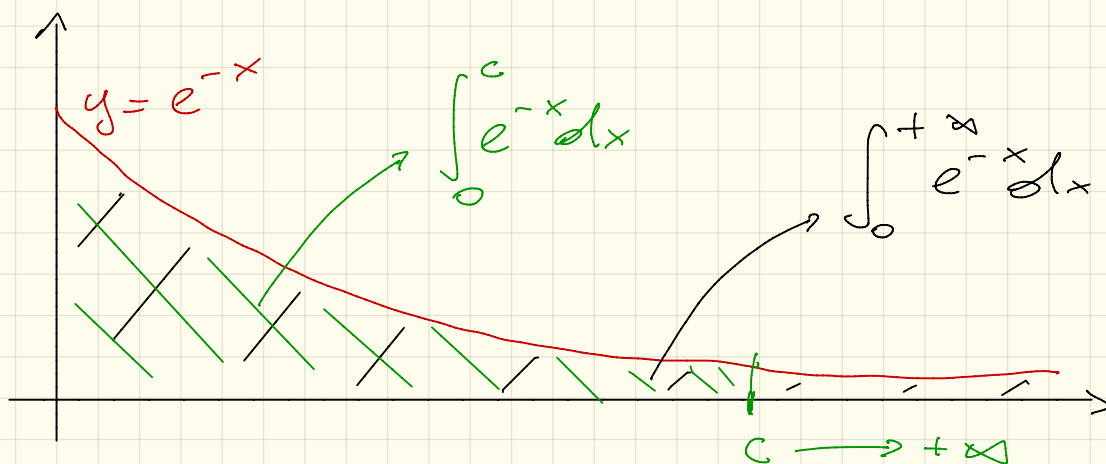
Osservazione: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

limitata. Se f è integrabile (nel senso solito) in $[a, b]$, allora è integrabile anche in senso generalizzato e i due integrali coincidono;

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(t) dt \\ &= \lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(t) dt \end{aligned}$$

GIOVEDÌ 10/1

Es.: come è possibile definire
 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$?



$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c e^{-x} dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} -e^{-x} \Big|_0^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} (1 - e^{-c}) = 1\end{aligned}$$

Definizione: $a \in \mathbb{R}$, $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
integrabile in ogni sottointervallo $[a, c] \subseteq$
 $\subseteq [a, +\infty[$. Se esiste finito

$$\left[\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx \right]$$

allora si dice che f è integrabile in senso

o generalizzato in $[a, +\infty[$ e il numero

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$$

Si dice integrale improprio o generalizzato di f in $[a, +\infty[$

$b \in \mathbb{R}$, $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$
integrabile in ogni sottointervallo
 $[d, b] \subseteq]-\infty, b]$. Se esiste
finito

$$\lim_{d \rightarrow -\infty} \int_d^b f(x) dx$$

allora f si dice integrabile in senso improprio o generalizzato in $]-\infty, b]$,
e il numero

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow -\infty} \int_d^b f(x) dx$$

si dice integrale improprio o generalizzato di f in $]-\infty, b]$

Exemplo importante

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_1^C \frac{1}{x^\alpha} dx =$$
$$= \begin{cases} \lim_{C \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^C & \text{se } \alpha = 1 \\ \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^C & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{C \rightarrow +\infty} \ln C = +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{C^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Esempio importante

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_0^C e^{\alpha x} dx =$$

$$= \begin{cases} \lim_{C \rightarrow +\infty} C & \text{se } \alpha = 0 \\ \lim_{C \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \right|_0^C & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 0 \\ \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha C} - 1) & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} dx \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 0$$

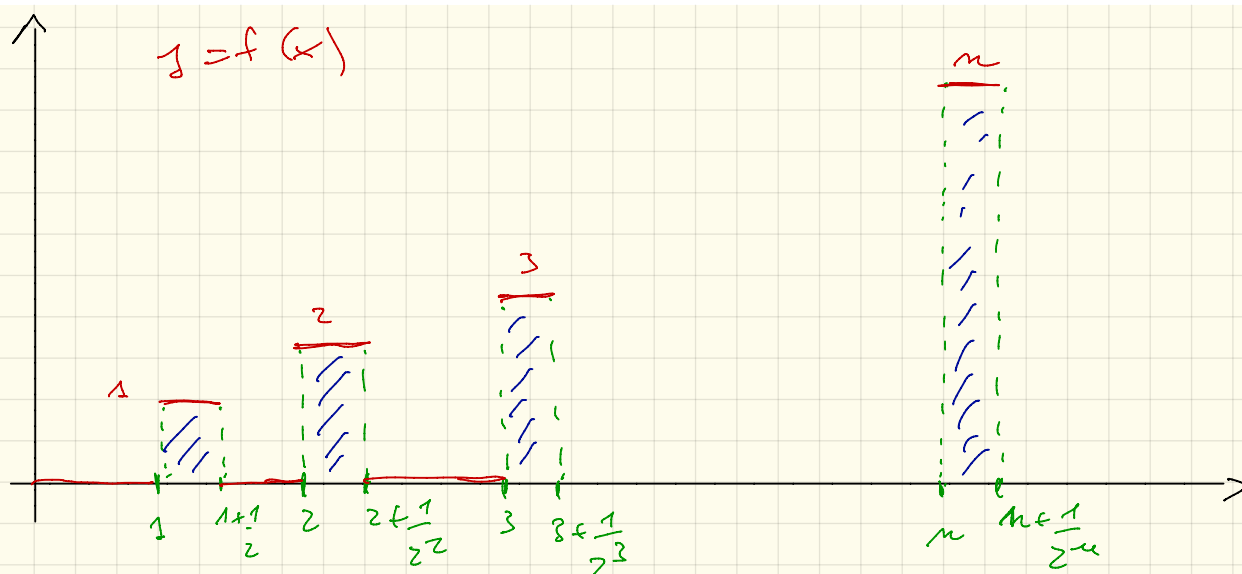
Attenzione!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{e } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

sono affermazioni indipendenti l'una dall'altra



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ non esiste

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \text{somme delle aree dei rettangoli} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot n < +\infty$$

Es: $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}, x > 0$

Come definire $\int_0^{+\infty} f(x) dx$?

→ due problemi:

1) sto integrando su un intervallo illimitato

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx + \\ + \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_2^d \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{aligned} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^d \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \arctan x \Big|_c^0 + \lim_{d \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^d = \pi \end{aligned}$$

Es.: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 e^{-x^2} dx + \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^d e^{-x^2} dx = \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} dx$$

1) integrale su un intervallo illimitato

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = -\infty$$



$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx +$$

$$+ \lim_{d \rightarrow 1^-} \int_{1/2}^d \frac{1}{\sqrt{x}} dx +$$

$$+ \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge $\Leftrightarrow$ convergono
 i 4 integrali impropri $\int_0^{1/2}$, $\int_{1/2}^1$, $\int_1^3$, $\int_3^{+\infty}$

Absolute integrabilità e criterio del confronto

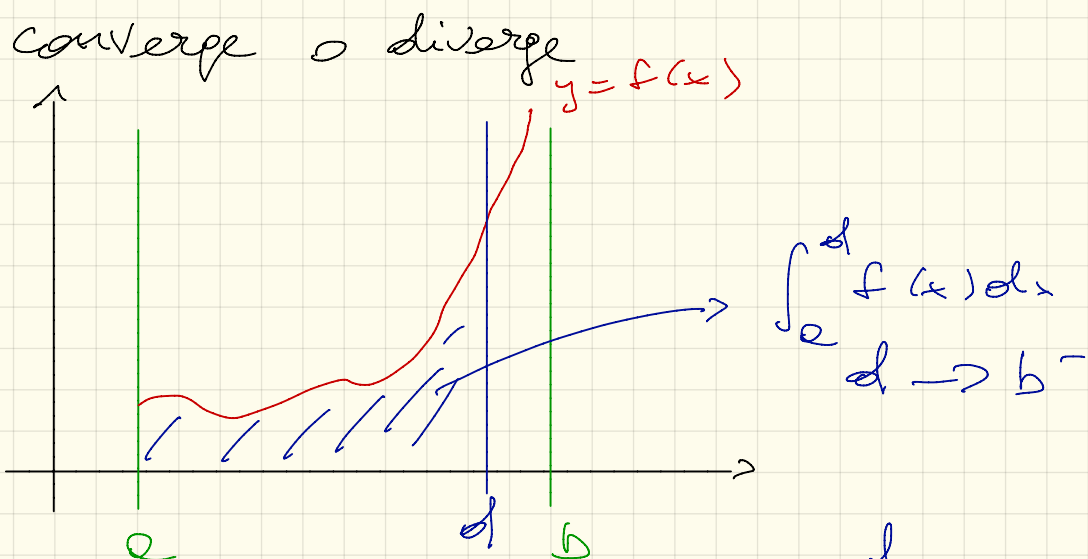
Definizione: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

Si dice assolutamente integrabile in senso improprio o generalizzato int se $|f|$ è integrabile in senso improprio in I . In tal caso, si dice che l'integrale improprio di f in I è assolutamente convergente.

Teorema : Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ assolutamente integrabile
in senso improprio in I . Allora f
ha integrale improprio convergente su I
(cioè è integrabile in senso improprio
in I).

Teorema : $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ integrabile
in ogni sottointervallo $[a, d] \subseteq [a, b[$.
Se $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \rightarrow b^-$,
allora l'integrale improprio di f in $[a, b[$



la funzione $\varphi(d) = \int_a^d f(x) dx$
è crescente
 $\Rightarrow$ ha limite per $d \rightarrow b^-$

Teorema: $f, g:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$,
integrabili in ogni sottointervallo
 $[c, b] \subseteq]a, b]$ e tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ definitivamente per } x \rightarrow a^+$$

Allora

1) Se $\int_a^b g(x) dx$ converge, allora $\int_a^b f(x) dx$
converge

2) Se $\int_a^b f(x) dx$ diverge, allora $\int_a^b g(x) dx$
diverge

Un risultato analogo vale per funzioni definite su $[a, b[$

Dim.: Per semplicità, assumiamo
che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in]a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b g(x) dx$$

ed entrambi i limiti esistono
perché f e g sono non negative

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_c^b f(x) dx \leq \int_c^b g(x) dx \quad \forall c \in]a, b]$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^b f(x) dx \leq \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^b g(x) dx$$

$$\cdot \Rightarrow \text{se } \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^b g(x) dx \text{ é finito}$$

$$\Rightarrow \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^b f(x) dx \text{ é finito}$$

$$\cdot \Rightarrow \text{se } \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^b f(x) dx = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^b g(x) dx = +\infty \quad //$$

Exemplo importante

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\cdot \quad \alpha = 1$$

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx &= \int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\beta} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_2^d (\ln x)^{-\beta} \frac{1}{x} dx = \end{aligned}$$

↗ $\beta \neq 1$

$$\rightarrow \beta \neq 1$$

$$= \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\beta} (\ln x)^{1-\beta} \Big|_2^d =$$

$$= \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\beta} \left[\frac{1}{(\ln d)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} \right] =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta < 1 \\ \frac{1}{\beta-1} \frac{1}{(\ln 2)^{\beta-1}} & \text{se } \boxed{\beta > 1} \end{cases}$$

$$\text{se } \beta = 1, \int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)} dx = +\infty \text{ (per caso)}$$

$$\bullet \alpha > 1$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$$

$$1 < \frac{\alpha+1}{2} < \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}}{\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha (\ln x)^\beta} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}}{\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}} \leq 1 \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}}_{g(x)} \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow +\infty$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}} dx \text{ converge perche' } \frac{\alpha+1}{2} > 1$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx \text{ converge per } \alpha > 1$$

In modo analogo si dimostra che per $\alpha < 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ diverge

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx \text{ converge} \Leftrightarrow$$

$$\alpha > 1 \text{ oppure } (\alpha = 1 \text{ e } \beta > 1)$$

Esempio importante

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx =$$

$$= \lim_{C \rightarrow 0^+} \int_C^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx =$$

$\downarrow$
 $t = 1/x$

$$= \lim_{C \rightarrow 0^+} \int_{1/2}^2 \frac{t^\alpha}{\left| \ln \frac{1}{t} \right|^\beta} \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt =$$

$\text{---} \ln t$

$$= \lim_{C \rightarrow 0^+} \int_2^{1/C} \frac{1}{t^{2-\alpha} |\ln t|^\beta} dt =$$

$$= \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_2^d \frac{1}{t^{2-\alpha} |\ln t|^\beta} dt = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{2-\alpha} |\ln t|^\beta} dt$$

$d = \frac{1}{C}$

converge $\Leftrightarrow$

$$2-\alpha > 1 \text{ oppure } (2-\alpha = 1 \text{ e } \beta > 1)$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx \quad \text{converge} \Leftrightarrow$$

$$\alpha < 1 \quad \text{oppure} \quad (\alpha = 1 \text{ e } \beta > 1)$$

Es.: $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^d \frac{\sin x}{x} dx =$$

$$= \lim_{d \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos x}{x} \int_{\pi}^d + \int_{\pi}^d \frac{\cos x}{x^2} dx \right) =$$

$$= \lim_{d \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos d}{d} - \frac{1}{\pi} + \int_{\pi}^d \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

→ 0

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^d \frac{\cos x}{x^2} dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

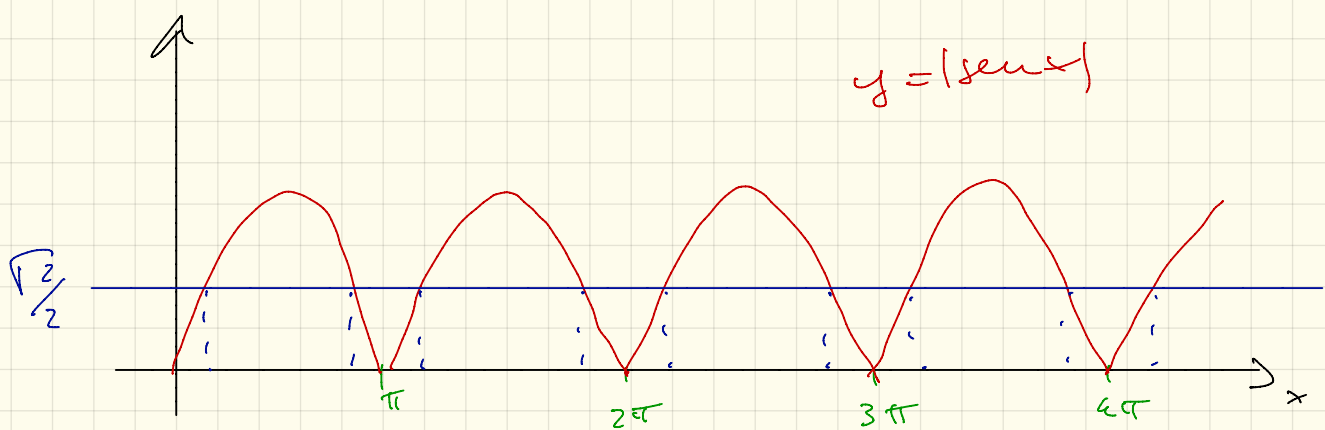
$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{che ha integrale convergente in } [\pi, +\infty[$$

$\Rightarrow \frac{\cos x}{x^2}$ è assolutamente integrabile
in senso improprio in $[\pi, +\infty[$

$\Rightarrow$ lo integrale improprio converge
in $[\pi, +\infty[$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge}$$

Si può dimostrare che $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$



$$\left[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi \right] \ni x \Rightarrow |\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3\pi}{4} + k\pi}$$

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3\pi}{4} + k\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Teorema (criterio asintotico del confronto):

$a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ integrabili
su ogni sottointervallo $[c, b] \subseteq]a, b[$.

Sia

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) Se $l \in \mathbb{R}, l \neq 0$, allora f è assolutamente integrabile in senso improprio in $]a, b[$
 $\Leftrightarrow$ lo è g

2) Se $l = 0$ e g è assolutamente integrabile in senso improprio in $]a, b[$, allora anche f è assolutamente integrabile in senso improprio in $]a, b[$

3) Se $l = +\infty$ e g non è assolutamente integrabile in senso improprio in $]a, b[$ ($\int_a^b |g(x)| dx = +\infty$), allora anche f non è assolutamente integrabile in senso improprio in $]a, b[$ ($\int_a^b |f(x)| dx = +\infty$)

Un risultato analogo vale se $f, g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$,
 $b \in \overline{\mathbb{R}}$, integrabili in ogni sottointervallo
 $[a, d] \subseteq [a, b[$.

MARTEDÌ 15/4

Teorema (Criterio integrale per le serie):

$k_0 \in \mathbb{N}$ fissato

$f: [k_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ funzione
decrescente non negativa ($f(x) \geq 0$
 $\forall x \geq k_0$). Allora

$$\int_{k_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{+\infty} f(k) \text{ converge}$$

$$\sum_{k=R_0}^{+\infty} f(k) \geq \int_{R_0}^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=R_0}^{+\infty} f(k+1)$$

↓
 o converge o to $+\infty$
 perché $f(x) \geq 0$

[Utile per calcolare

$$\lim_n \frac{\ln n!}{n^\alpha}$$

$$\ln n \leq \int_n^{n+1} \ln x dx \leq \ln(n+1)]$$