EQUAZIONI DIFFERENZIALI TEORIA

MARTEDÌ 15/1

Equazioni differenziali

$\overline{F} = m\,\overline{a}$ $\qquad \overline{a} = \overline{s}''(t)$

$\hookrightarrow \quad m\,\overline{s}''(t) = \overline{F}$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2 \text{ o } x = 3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow \qquad\quad \Uparrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{R} \qquad\quad \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Questa è un'equazione dove, note m e $\overline{F}$, l'incognita è una funzione $\overline{s}(t)$

Un'equazione differenziale è un'equazione del tipo

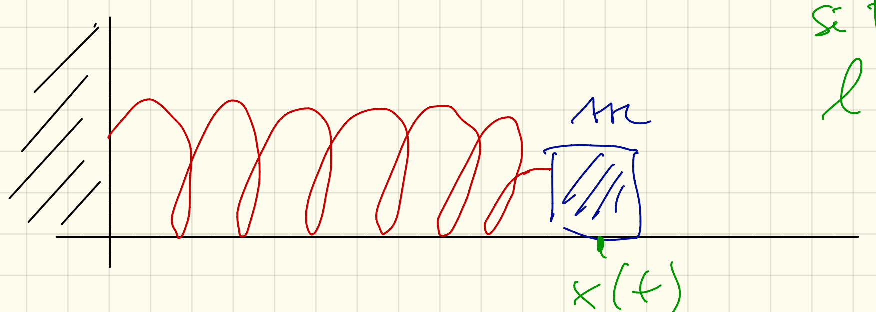
$$f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

dove f è funzione nota e compaiono le derivate $y', y'', \dots, y^{(n)}$ di una funzione incognita y

Es: corpo di massa m vincolato ad una molla di costante elastica $k > 0$, il suo moto obbedisce alla legge

$$m\, x''(t) = -k\, x(t)$$

si trascura l'attrito



$\hookrightarrow$ posizione all'istante t

Es.: legge di carica di un condensatore di capacità C

$$L\,Q''(t) + R\,Q'(t) + \frac{1}{C}\,Q(t) = \mathcal{E}(t)$$

$Q(t)$ quantità di carica presente nel circuito all'istante t

L induttanza

R resistenza

$\mathcal{E}(t)$ forza elettromotrice

Es.: Equazione logistica o di Verhulst

$$y'(t) = r\,y(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

$r, K > 0$

$y(t)$ numero di individui di una certa popolazione

Ci occuperemo di equazioni del primo ordine, cioè dove compare solo la derivata prima

- lineari

$$y' = a(t)\, y + b(t)$$

$y = y(t)$ funzione incognita

con a e b funzioni note

- a variabili separabili

$$y' = f(y)\, g(t)$$

con f e g funzioni note

Equazioni lineari del primo ordine

$$y' = a(t)\, y + b(t)$$

$a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

Se $b(t) = 0 \ \forall t$, l'equazione si dice omogenea, altrimenti è detta non omogenea

Cosa è una soluzione in I?

Def.: una soluzione è una funzione
$y: I \to \mathbb{R}$ derivabile e
tale che
$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \quad \boxed{\forall t \in I}$$

Es.: $y' = y$ $\quad a(t) = 1$, $b(t) = 0$ $\forall t$
$I = \mathbb{R}$

- $y(t) = e^t$ è soluzione?
  E' derivabile? Sì
  $y'(t) = e^t = y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ è soluzione

- $y(t) = 2e^t$ è soluzione?
  E' derivabile in $\mathbb{R}$? Sì
  $y'(t) = 2e^t = y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ è soluzione

- $y(t) = ce^t$, $c \in \mathbb{R}$
  è derivabile e $y'(t) = ce^t = y(t)$
  $\forall t \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ è soluzione $\forall c$
  $\Rightarrow$ ho infinite soluzioni

- $y(t) = e^{2t}$ è soluzione?

E' derivabile $\forall t \in \mathbb{R}$

$$y'(t) = 2e^{2t} = 2y(t) \quad ?!$$

- $y(t) = (t+1)e^{t^2}$ è soluzione?

E' derivabile $\forall t \in \mathbb{R}$ e

$$y'(t) = e^{t^2} + 2t(t+1)e^{t^2}$$

$$y'(t) = y(t) \quad \text{se} \quad t = 0$$

$y'(0) = 1 = y(0)$ No! perché deve essere $y'(t) = y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$!!

Problema di Cauchy

a, b continue

$$\begin{cases} y' = a(t)\,y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \leftarrow \text{dato iniziale} \end{cases}$$

$t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$

Come calcolo una soluzione?

- $y' - a(t)\,y = b(t)$

Sia $A(t)$ una primitiva di a e prendiamo $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$

$(A(t_0) = 0)$

$$y' - a(t)\,y = b(t) \qquad / \cdot e^{-A(t)}$$

$$e^{-A(t)}\,y'(t) - a(t)\,e^{-A(t)}\,y(t) = b(t)\,e^{-A(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)}\,y(t)\right) =$$

$$= e^{-A(t)}\,y'(t) + y(t)\,D\left(e^{-A(t)}\right) =$$

$$= e^{-A(t)}\,y'(t) + y(t) \cdot e^{-A(t)} \cdot D(-A(t)) =$$

$$= e^{-A(t)}\,y'(t) - a(t)\,e^{-A(t)}\,y(t)$$

$\Rightarrow$ L'equazione si riscrive

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)}\,y(t)\right) = e^{-A(t)}\,b(t)$$

Integro tra t_0 e t (generico)

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\left(e^{-A(s)}\,y(s)\right) ds = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\,b(s)\,ds$$

y_0, noto

$$\Rightarrow \quad e^{-A(t)}\,y(t) - e^{-A(t_0)}\,y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\,b(s)\,ds$$

$$A(t_0) = 0 \Rightarrow e^{-A(t_0)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad e^{-A(t)}\, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\, b(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\, b(s)\, ds \right]}$$

dove $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$

$$y(t_0) = \underbrace{e^{A(t_0)}}_{=1} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t_0} e^{-A(s)}\, b(s)\, ds \right] = y_0$$

$$y'(t) = D\left(e^{A(t)}\right) \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\, b(s)\, ds \right] +$$

$$+\, e^{A(t)}\, D\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\, b(s)\, ds \right] =$$

$$= a(t) \underbrace{e^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}\, b(s)\, ds \right]}_{y(t)} +$$

$$+\, e^{A(t)} \cdot e^{-A(t)}\, b(t) =$$

$$= a(t)\, y(t) + b(t) \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ $y(t)$ risolve il problema di Cauchy.

Teorema: Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

$a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)\, y + b(t) & , t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione definita su I

data da

$$y(t) = e^{A(t)} \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s)\, ds \right], \quad \text{con } A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$$

Es.:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y(t) = 0$ $\quad \forall t \geq 0$ è soluzione

perché $y(0) = 0$ e $y'(t) = 0 = \sqrt{y(t)}$
$\forall t \geq 0$

$\tilde{y}(t) = \dfrac{t^2}{4}$ $\qquad \tilde{y}(0) = 0$

$\tilde{y}'(t) = \dfrac{t}{2} = \sqrt{\tilde{y}(t)} \quad \forall t \geq 0$

$\Rightarrow \tilde{y}$ è soluzione

Es.:

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad t > 0$$

$$y(t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{è soluzione}$$

$y(0) = 1$ e

$$y'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = y^2(t) \quad \forall t$$

è soluzione in $[0, 1[$

$$\lim_{t \to 1} y(t) = +\infty$$

Mercoledì 16/1

Integrale generale di $y' = a(t)\,y + b(t)$

$\hookrightarrow$ l'insieme di tutte le soluzioni

$$y' - a(t)\,y = b(t) \qquad / \cdot e^{-A(t)}$$

dove A è primitiva di a in I, intervallo dove sono definite a e b (che supponiamo continue)

$$A'(t) = a(t) \qquad \forall t \in I$$

$$\underbrace{e^{-A(t)} y'(t) - a(t) e^{-A(t)} y(t)}_{\frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)} y(t)\right)} = e^{-A(t)} b(t)$$

$$\Rightarrow e^{-A(t)} y(t) = \int e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

↳ integrale indefinito

$$\Rightarrow \underbrace{y(t) = e^{A(t)} \int e^{-A(t)} b(t)\, dt}$$

questo è l'integrale generale

Equazioni a variabili separabili

$$y' = f(y)\, g(t) \quad , \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

<u>Definizione</u>: una soluzione di $y' = f(y)\, g(t)$ in I è una funzione $y: I \to \mathbb{R}$ <u>derivabile</u> tale che

$$y'(t) = f(y(t))\, g(t) \quad \forall t \in I$$

Come sono fatte le soluzioni ?

1) Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ | $f(y_0) = 0$

$\Rightarrow y(t) = y_0 \quad \forall t \in I$ è soluzione

- è derivabile

- $y'(t) = 0 \quad \forall t \in I$

ma $0 = f(y_0)\, \rho(t) \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow y'(t) = f(y(t))\, \rho(t) \quad \forall t \in I$

2) Partiamo supponendo di avere una soluzione $y(t)$

$$\Rightarrow \quad y'(t) = f(y(t))\, \rho(t)$$

con $f(y(t)) \neq 0$

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = \rho(t)$$

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))}\, dt = \int \rho(t)\, dt$$

$\rightsquigarrow$ riscriviamo con un cambio di variabili

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))}\,dt =$$

$z = y(t) \qquad dz = y'(t)\,dt$

$$= \int \frac{1}{f(z)}\,dz \Big|_{z=y(t)}$$

Se F è primitiva di $\frac{1}{f(y)}$ e

G è primitiva di g

$$\int \frac{y'(t)}{f(y(t))}\,dt = F(y(t)) + c_1 \,, \quad \int g(t)\,dt = G(t) + c_2$$

$$\Rightarrow F(y(t)) = G(t) + c$$

Giochetto $\qquad y' = f(y)\, g(t)$

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(y)\, g(t)$$

$$\text{"}\frac{dy}{f(y)} = g(t)\,dt\text{"}$$ → separo le variabili y e t

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t)\,dt$$

Teorema: f, g funzioni continue

$$y' = f(y)\, g(t), \quad t \in I$$

Se $f(y_0) = 0$, $y(t) = y_0$ è soluzione.

Se $f(y) \neq 0$ $\forall\, y \in$ intervallo J, detta F una primitiva di $\frac{1}{f}$ in J e G una primitiva di g in I, allora ogni funzione derivabile $y: I \to \mathbb{R}$ con $y(t) \in J$ $\forall\, t \in I$ e tale che

$$F(y(t)) = G(t) + c, \quad \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ costante}$$

è soluzione dell'equazione nell'intervallo I. Dato un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y)\, g(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

se f è di classe C^1 in un intorno di y_0, allora il problema ha un'unica soluzione definita in un intorno di t_0