Esercizi di Ricapitolazione

Giovedì 17/1

Esercizio

Trovare tutti e soli i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n+2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha^n}{n+2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^n}{n+2}$$

Criterio asintotico della radice

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{|\alpha|^n}{n+2}} = \lim_n \frac{|\alpha|}{\sqrt[n]{n+2}} = |\alpha|$$

$\sqrt[n]{n+2} = e^{\frac{1}{n}\ln(n+2)} \to 1$

Se $|\alpha| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi converge

Se $|\alpha| > 1$, $\lim_n \frac{|\alpha|^n}{(n+2)} = +\infty$

$\Rightarrow \lim_n \frac{\alpha^n}{n+2}$ non fa zero $\Rightarrow$ la serie non converge

Studiamo $|\alpha| = 1$, cioè $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$

- $\alpha = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ diverge

- $\alpha = -1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$

non converge assolutamente perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

Converge semplicemente?

Quella è una serie di Leibniz $\sum (-1)^n a_n$

dove $a_n = \frac{1}{n+2} > 0$

$\lim_n a_n = 0$ e

$\{a_n\}_{n \geq 1}$ è decrescente

$a_{n+1} = \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n+2} = a_n$

$\Rightarrow$ la serie converge

Osservazione

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \alpha^n} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} |\alpha|^n$$

$$\lim_n \sqrt[n]{n^{\beta} |\alpha|^n} = |\alpha|$$

$\Rightarrow$ se $|\alpha| < 1$, la serie converge assolutamente, qualunque sia β

Se $|\alpha|>1$, $\lim_{n} n^{\beta}|\alpha|^{n} = +\infty$

$\Rightarrow$ la serie non ha termine generale infinitesimo, non può convergere, neanche semplicemente

Se $|\alpha|=1 \Rightarrow \alpha = 1$ o $\alpha = -1$

$\alpha = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}$

$\alpha = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}(-1)^{n}$

Quello che succede dipende da β

Esercizio

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1}$$

(escluse la derivata seconda)

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Segno: $f(x) \geq 0 \iff x > 1$
  e $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$
- Simmetrie: no

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1} =$$

$\frac{1}{x-1} \to -\infty$

$t = \frac{1}{x-1}$

$$= \lim_{t\to -\infty} t e^t = 0$$

$\frac{1}{x-1} \to +\infty$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1} \; +\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ è asintoto verticale

$\frac{1}{x-1} \to 0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ è asintoto orizzontale completo

<u>Studio di f'</u>

f è derivabile perché quoziente di funzioni derivabili

$$f'(x) = D\left(\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-1}\right) =$$

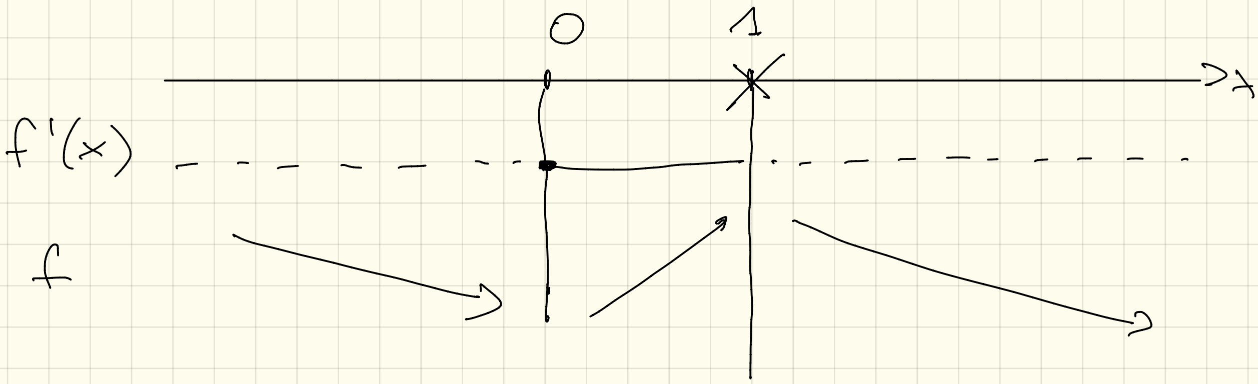
$$= \frac{(x-1)\cdot D\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right) - e^{\frac{1}{x-1}}\, D(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\cdot e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\left(-\frac{1}{(x-1)^{\cancel{2}}}\right) - e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\left[-\frac{1}{x-1} - 1\right] = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\left(-\frac{x}{x-1}\right)$$

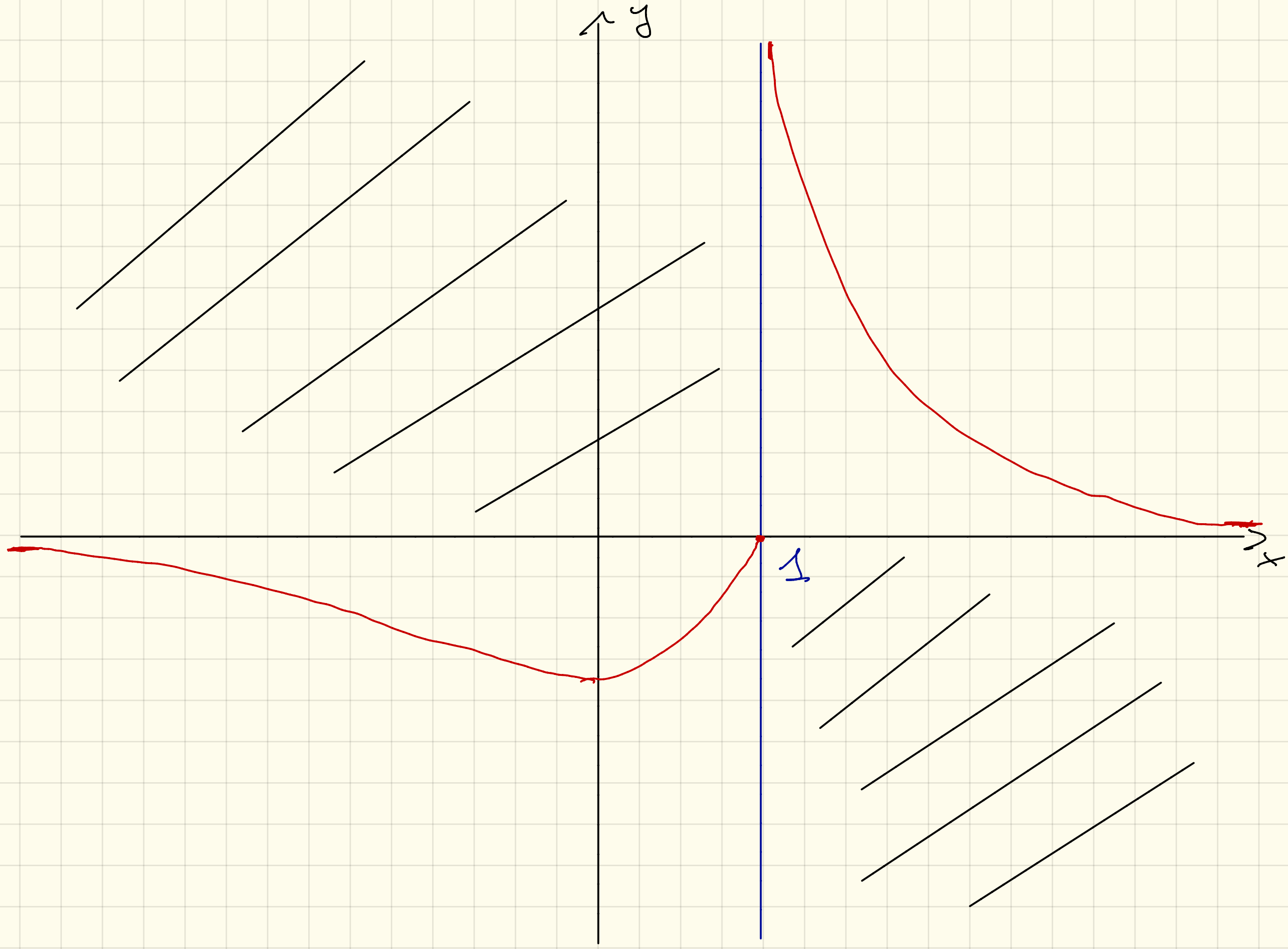
$$f'(x) \geq 0 \iff -\frac{x}{x-1} \geq 0$$

$$\iff \frac{x}{x-1} \leq 0 \iff 0 \leq x < 1$$



$f(x) < 0$ $\qquad$ $f(x) > 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ è punto di minimo assoluto

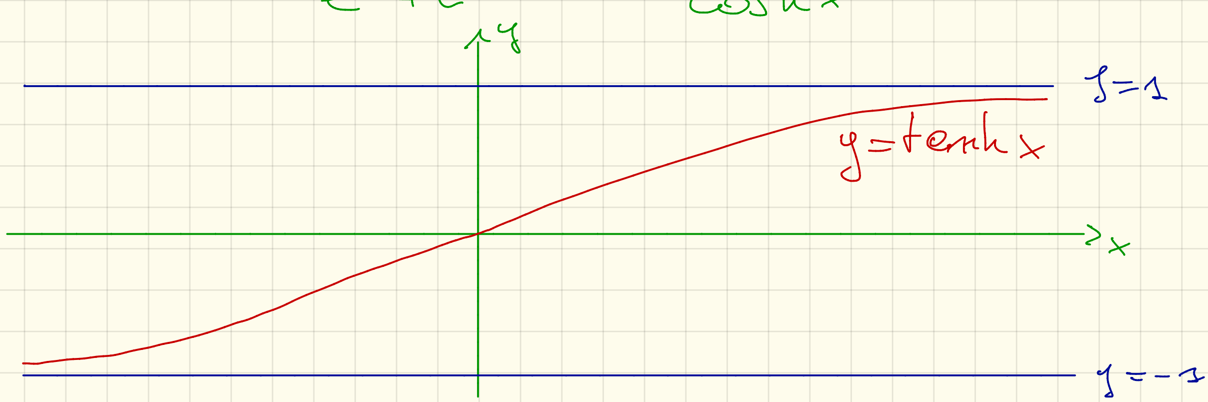


Esercizio

Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \ln(1 - |\tanh x|)$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$



- dom $f = \mathbb{R}$ perché $1 - |\tanh x| > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- Simmetrie

$$f(-x) = \ln(1 - |\tanh(-x)|) =$$
$$= \ln(1 - |-\tanh x|) =$$
$$= \ln(1 - |\tanh x|) = f(x)$$
$$\Rightarrow f \text{ è pari}$$

- Segno: $f(x) \geq 0 \iff 1 - |\tanh x| \geq 1$
$\iff |\tanh x| \leq 0 \iff \tanh x = 0$
$\iff x = 0$

$\Rightarrow f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \text{dom} f$ e
$f(x) = 0 \iff x = 0$
$\Rightarrow x = 0$ è punto di massimo assoluto

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(1 - |\tanh x|) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Non ho asintoti orizzontali

Asintoti obliqui

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(1 - |\tanh x|\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(1 - \tanh x\right) =$$

$\tanh x > 0$ in un intorno di $+\infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{2e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left[\ln(2e^{-x}) - \ln(e^{x} + e^{-x})\right] =$$

$\ln 2 + \ln e^{-x} = \ln 2 - x$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left[\ln 2 - x - \ln\left(e^{x}(1 + e^{-2x})\right)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left[\ln 2 - x - \ln e^{x} - \ln(1 + e^{-2x})\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2 - 2x - \ln(1+e^{-2x})}{x} = -2$$

$\ln(1-\tanh x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) + 2x \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln 2 - 2x - \ln(1+e^{-2x}) + 2x \right] = \ln 2$$

$\Rightarrow$ la retta di equazione $y = -2x + \ln 2$ è asintoto obliquo a $+\infty$

$\Rightarrow$ la retta di equazione $y = 2x + \ln 2$ è asintoto obliquo a $-\infty$ per simmetria (f è pari!!!)

Studio di f'

f è derivabile per $\tanh x \neq 0$, cioè per $x \neq 0$ e vale

$$f'(x) = D\left(\ln\left(1 - |\tanh x|\right)\right) =$$

$$= \overbrace{\frac{1}{1-|\tanh x|}}^{>0} \cdot \left(-\operatorname{sgn}(\tanh x)\right) \cdot \left(\underbrace{\overbrace{1-(\tanh x)^2}^{>0}}_{\frac{1}{(\cosh x)^2}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) =$$

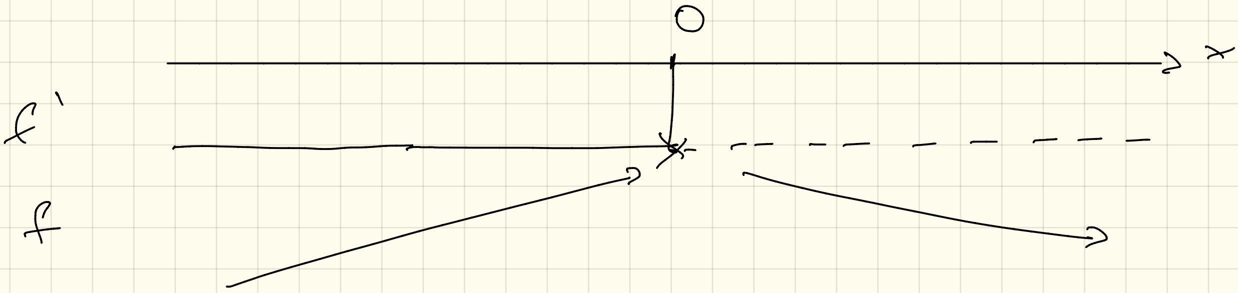
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-|\tanh x|}\left(\overbrace{-\operatorname{sgn}(\tanh x)}^{\to -1}\right)\cdot(1-\tanh^2 x) =$$

$$= -1 = f'_+(0)$$ (f è continua in $x=0$ e quindi possiamo utilizzare il teorema del limite della derivata)

Per simmetria (f è pari!) $f'_-(0) = 1$

$$f'(x) > 0 \iff -\operatorname{sgn}(\tanh x) > 0$$

$$\iff \tanh x < 0 \iff x < 0$$



Conferma che $x=0$ è punto di massimo assoluto

Studio di f'', $x>0$ (f è pari!)

$$f''(x) = -D\left(\frac{\operatorname{sgn}(\tanh x)}{1-|\tanh x|}\cdot(1-\tanh^2 x)\right) =$$

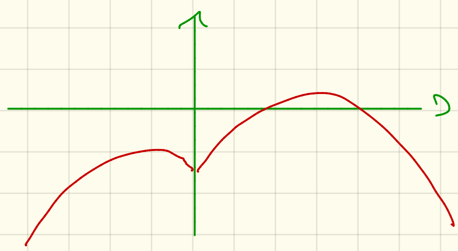
$$= -\operatorname{sgn}(\tanh x)\cdot D\left(\frac{1-\tanh^2 x}{1-|\tanh x|}\right) =$$

$$= -D\left(\frac{1-\tanh^2 x}{1-\tanh x}\right) =$$

$$= -D\left(\frac{(1-\tanh x)(1+\tanh x)}{1-\tanh x}\right) =$$

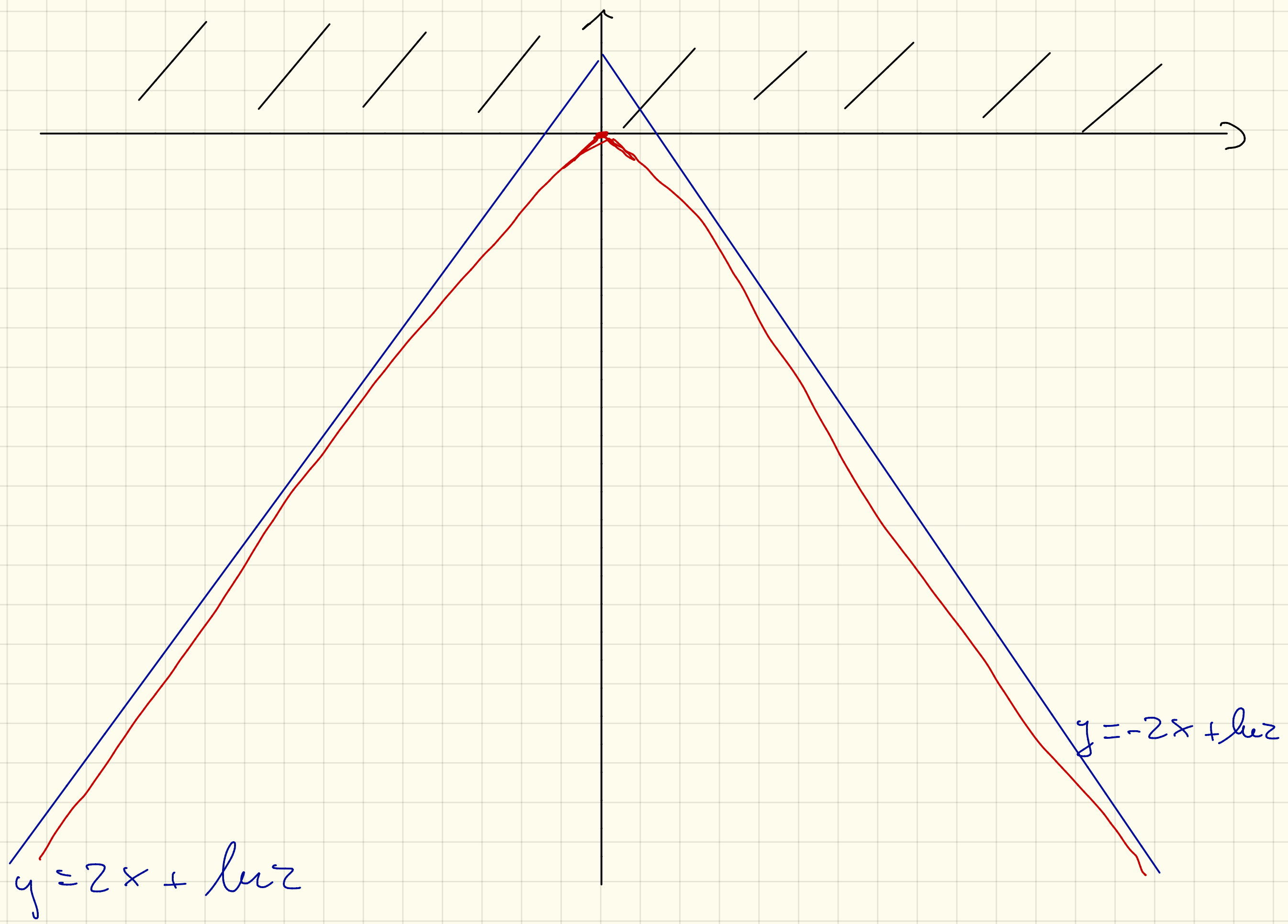
$$= -D(1+\tanh x) = -(1-\tanh^2 x) < 0 \quad \forall x>0$$

$\Rightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$ (per simmetrie)



Poiché $f'_-(0) > f'_+(0)$ possiamo concludere che f è concava in $\mathbb{R}$

concava in $]-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty[$



Esercizio

Calcolare il

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_{1/x}^{1} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\,dt}{\ln x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^{1} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\,dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\,dt}_{\text{per quali } \alpha \text{ converge?}}$$

Studiamo il comportamento di

$$\frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha} \quad \text{per } t \to 0^+$$

$$\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t = \left(t - \frac{1}{6} t^3 + o(t^3)\right) + $$
$$- \left(t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right) =$$
$$= -\frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{3} t^3 + o(t^3) = \frac{1}{6} t^3 + o(t^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha} \geq 0 \text{ definitivamente per } t \to 0^+$$

$$\frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha} \sim \frac{t^3}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-3}}$$

e $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha-3}}\, dt$ converge $\Leftrightarrow$

$$\alpha - 3 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \int_{1/x}^1 \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\, dt =$$

$$= \begin{cases} \exists \text{ finito} & \text{se } \alpha < 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{1/x}^{1} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\, dt}{\ln x} = 0 \qquad \text{se } \alpha < 4$$

Se $\alpha \geq 4$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{1/x}^{1} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\, dt}{\ln x} \overset{(H)}{=}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{\operatorname{sen}(1/x) - \operatorname{arctan}(1/x)}{(1/x)^\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1/x}$$

$$D\left(\int_1^y f(t)\,dt\right) = f(y)$$

$$F(y) = \int_y^1 f(t)\,dt = -\int_1^y f(t)\,dt \Rightarrow F'(y) = -f(y)$$

$$x \mapsto \int_{1/x}^{1} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\, dt$$

$$x \xmapsto{\varphi} \frac{1}{x} \qquad\qquad y \xmapsto{F} \int_y^1 \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\, dt$$

$$\to F(\varphi(x))$$

$$\Rightarrow D F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}(\varphi(x)) - \operatorname{arctan} \varphi(x)}{(\varphi(x))^\alpha} \cdot \varphi'(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{1/x}^{1} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{arctan} t}{t^\alpha}\, dt}{\ln x} =$$

$\alpha \geq 4$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x) - \operatorname{arctan}(1/x)}{x} x^\alpha =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \operatorname{arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \frac{1}{x^{1-\alpha}} =$$

PdS

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{6} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \cdot \frac{1}{x^{1-\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{6} \frac{1}{x^{4-\alpha}} = \begin{cases} 1/6 & \text{se } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

//